دانشگاه زنجان
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

گراف مولد گروه های متناهی

نگارش:
شمسی صفی لو

استاد راهنما:
دکتر سید مجید جعفریان امیری

بهمن ۱۳۸۹

قدردانی

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از خانواده مهربانم به ویژه پدر و مادرم که با لطف بی دریغ و حمایت های بیشائبه شان مرا یاری نمودند سپاس گزاری نمایم.

همچنین لازم می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید مجید جعفریان امیری، که قطعاً بدون کمک ها و راهنمایی های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی رسید صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

در خاتمه از جناب آقایان دکتر آرین نژاد و دکتر جعفرزاده که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند و با پیشنهادات ارزنده خود باعث بهبود این رساله شدند، کمال امتنان را دارم.

چکیده

فرض کنید G یک گروه متناهی غیر دوری باشد که توسط دو عنصر تولید می‌شود، گراف مولد $\Gamma(G)$ روی عناصر G را چنین تعریف می‌کنیم، گرافی که مجموعه رئوس آن عناصر G باشد و دو رأس متمایز بوسیله یک یال به یکدیگر وصل می‌شوند اگروتنهااگر G به وسیله آن دو عنصر تولید شود. اندازه بزرگترین زیرگراف کامل در گراف مولد $\Gamma(G)$، عدد خوشه‌ی $\Gamma(G)$ نامیده می‌شود و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود و کمترین تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ‌کردن گراف مولد $\Gamma(G)$ به گونه‌ای که رأس‌هایی که بوسیله یک یال به یکدیگر متصل شده‌اند رنگ‌های متمایزی داشته باشند عدد رنگی گراف مولد $\Gamma(G)$ نامیده می‌شود و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود. برای گروه G پارامتر دیگری نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد که این پارامتر، پوشش کمین این گروه می‌باشد و این چنین تعریف می‌شود، کوچکترین عدد صحیح مثبت nای، که G توسط n زیرگروه سره‌اش پوشانده شود و با $\sigma(G) = n$ نشان داده می‌شود. همواره داریم $\omega(G) \leq \chi(G)$ و $\chi(G) \leq \sigma(G)$.

در این رساله به مطالعه رابطه و محاسبه‌ی عدد خوشه، عدد رنگی گراف مولد و پوشش کمین برخی گروه‌های حل‌پذیر و گروه‌های خطی می‌پردازیم. همچنین پوشش کمین گروه‌های کاملاً تحویل‌پذیر را بررسی می‌نماییم.

واژگان کلیدی: گراف مولد، عدد خوشه، عدد رنگی، پوشش کمین، گروه‌های خطی، گروه‌های حل‌پذیر، گروه‌های کاملاً تحویل‌پذیر

مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی غیر دوری باشد که توسط دو عنصر تولید می‌شود. گراف مولد $\Gamma(G)$ روی عناصر G را چنین تعریف می‌کنیم، گرافی که مجموعه رئوس آن عناصر G باشد و دو رأس متمایز بوسیله یک یال به یکدیگر وصل می‌شوند اگروتنهااگر G به وسیله آن دو عنصر تولید شود. عدد خوشه گراف $\Gamma(G)$، اندازه بزرگترین زیرگراف کامل در گراف $\Gamma(G)$ می‌باشد و با $\omega(G)$ نشان داده می‌شود و عدد رنگی گراف $\Gamma(G)$، کمترین تعداد رنگ مورد نیاز برای رنگ‌کردن گراف $\Gamma(G)$ به گونه‌ای که رأس‌هایی که بوسیله یک یال به یکدیگر متصل شده‌اند رنگ‌های متمایزی داشته باشند، می‌باشد و با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود. این مفهوم اولین بار توسط شخصی به نام آتیلا ماروتی و آندریا لوچینی[۱] مطرح شد. نتایج بسیاری درباره‌ی دو پارامتر عدد خوشه و عدد رنگی این گراف توسط این اشخاص و دیگران به دست آمده است.

برای گروه G پارامتر دیگری نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد، این پارامتر، پوشش کمین گروه G می‌باشد و این چنین تعریف می‌شود، کوچکترین عدد صحیح مثبت nای را که G توسط n زیرگروه سره‌اش پوشانده می‌شود و با $\sigma(G) = n$ نشان داده می‌شود. همواره داریم $\omega(G) \leq \chi(G)$ و $\chi(G) \leq \sigma(G)$.

پوشش کمین برای اولین بار توسط کوهن[۲] در سال ۱۹۹۴ در مرجع [۷] مطرح شد. نتایج اثبات شده در این مقاله منجر به دوحدس برای گروه‌های حل‌پذیر گردید. حدس اول این بود، گروهی وجود ندارد که $\sigma(G) = ۷$ باشد و حدس دوم این مطلب را بیان می‌کرد، اگر G یک گروه غیر دوری حل‌پذیر متناهی باشد، آنگاه $\sigma(G) = p^a + ۱$ می‌باشد، که در آن p^a مرتبه‌ی فاکتور اصلی خاصی از G می‌باشد. تامکینسون[۳] در سال ۱۹۹۷ این دو حدس را در مرجع [۳۰] اثبات نمود. نتایج بسیاری درباره‌ی پوشش کمین گروه‌ها به دست آمده است. یکی از نتایج در این رابطه، که در این رساله نیز به آن پرداخته شده است، پوشش کمین گروه‌های کاملاً تحویل‌پذیر می‌باشد که توسط عبداللهی و جعفریان‌امیری در سال ۲۰۰۸ در مرجع [۱] به آن پرداخته شده است. موضوع اصلی این رساله، بررسی گراف مولد گروه‌های متناهی است.

در فصل اول تعاریف و قضایایی در رابطه با گروه و گروه‌هایی که در این رساله به آنها پرداخته شده است، ارائه

---
[۱] A. Lucchini, and A. Maróti
[۲] J. H. Cohn
[۳] M. J. Tomkinson

می‌گردد.

در فصل دوم به معرفی پوشش کمین گروه‌ها پرداخته و قضایای اساسی مربوط به این موضوع بررسی می‌شود. همچنین در این فصل پوشش کمین گروه‌های کاملاً تحویل‌پذیر را بررسی می‌نماییم.

در فصل سوم پوشش کمین گروه‌های حل‌پذیر و گراف مولد گروه‌های متناهی از ارتفاع فیتینگ حداکثر ۲ و گروه‌های فروبینوس بررسی می‌شود.

در فصل چهارم پوشش کمین و گراف مولد گروه‌های خطی روی فضای برداری از بعد ۲ بررسی می‌شود. در نهایت پوشش کمین و گراف مولد گروه سوزوکی را مطالعه می‌کنیم.

فهرست مطالب

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

در این فصل به ذکر تعاریف، لم‌ها و قضـــایای مورد نیاز در ایــن پایان نامه مـــی‌پردازیم. در سراسر این پایان نامه منظور از G، گروه متناهی می‌باشد و p یک عدد اول است.

تعریف ۱.۰.۱. *فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه‌ای ناتهی از G است. آنگاه مجموعه‌ی*

$$C_G(H) = \{y \in G | xy = yx, \forall x \in H\}$$

را مرکز ساز H در G می‌نامیم.

در حالتی که $H = \{x\}$ ، زیرمجموعه‌ای تک عضوی از G باشد، آنگاه به جای $C_G(H)$ به اختصار می‌نویسیم $C_G(x)$ و آن را مرکزساز x در G می‌نامیم. توجه کنید $C_G(H)$ زیرگروه G است.

تعریف ۲.۰.۱. *اگر G یک گروه باشد، آنگاه*

$$Z(G) = C_G(G) = \{x \in G \mid xy = yx, \forall y \in G\}$$

را مرکز گروه G می‌نامیم.

قضیه ۳.۰.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد و $H \trianglelefteq G$ ، اگر $|H| = p$ و p کوچک‌ترین عدد اولی باشد که $|G|$ را عاد کند، در این صورت H زیرگروهی از مرکز G می‌باشد.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۴.۰.۱. *فرض کنیم G یک گروه و $H \leq G$، در این صورت تعداد هم‌رده‌های چپ یا راست (متناهی یا نامتناهی) H در G را اندیس H در G نامیده و با $[G : H]$ نمایش می‌دهیم.*

قضیه ۵.۰.۱. *(لاگرانژ) اگر G یک گروه متناهی و $H \leq G$، آنگاه $|H|$ مقسوم‌علیهی از $|G|$ است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۶.۰.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $H \leq G$، آنگاه $[G : H] = \dfrac{|G|}{|H|}$.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۷.۰.۱. *اگر G یک گروه و $x \in G$، آنگاه کوچک‌ترین عدد صحیح و مثبت n که برای آن داشته باشیم $x^n = e$ را مرتبه‌ی x می‌نامیم و می‌نویسیم $O(x) = n$. اگر چنین nای موجود نباشد، آنگاه x را از مرتبه نامتناهی نامیده و می‌نویسیم $O(x) = \infty$.*

لم ۸.۰.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $x \in G$، آنگاه $O(x)||G|$.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۹.۰.۱. *فرض کنیم H زیرگروهی از گروه G باشد، در این صورت H را یک زیرگروه نرمال G می‌نامیم هرگاه به ازای هر x از G داشته باشیم $xH = Hx$. به آسانی دیده می‌شود که H زیرگروه نرمال G است اگروتنهااگر به ازای هر x از G و هر h از H، $x^{-1}hx \in G$.*

تعریف ۱۰.۰.۱. *فرض کنیم X زیرمجموعه‌ای ناتهی از گروه G باشد. هسته X عبارت است اززیرگروه نرمال تولید شده با اجتماع همه‌ی زیرگروه‌های نرمال G که مشمول X هستند. هسته X را با $Core_G(X)$ نشان می‌دهیم.*

قضیه ۱۱.۰.۱. *اگر G یک گروه، $N \leqslant G$ و $[G : N] = ۲$، آنگاه $N \trianglelefteq G$.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۱.۰.۱۲. *فرض کنیم G یک گروه و M زیرمجموعه‌ای ناتهی از G است. در این صورت*

$$N_G(M) = \{g \in G | g^{-1}Mg = M\}$$

را نرمال‌ساز M در G می‌نامیم. در حالتی که $M = \{x\}$ زیرمجموعه‌ای تک عضوی باشد واضح است که

$$N_G(M) = C_G(M).$$

قضیه ۱.۰.۱۳. *اگر G یک گروه و M زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد، آنگاه $N_G(M) \leqslant G$. در حالتی که M زیرگروهی از G است داریم*

$$M \trianglelefteq N_G(M).$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱.۰.۱۴. *(قضیه تناظر) فرض کنیم $N \trianglelefteq G$ و $\nu : G \to \frac{G}{N}$ برووریختی طبیعی باشد، دراین صورت ν تناظری یک‌به‌یک بین گردایه همه زیرگروه‌های G که حاوی Nاند و گردایه همه زیرگروه‌های $\frac{G}{N}$ برقرار می‌کند. اگر در این تناظر، زیرگروه H از G به زیرگروه H^* از $\frac{G}{N}$ نظیر شود آنگاه*

(۱) $H^* = \frac{H}{N} = \nu(H)$،

(۲) $K \leq H$، اگروتنهااگر $K^* \leq H^*$ و $[H : K] = [H^* : K^*]$،

(۳) $K \trianglelefteq H$، اگروتنهااگر $K^* \trianglelefteq H^*$ و $\frac{H}{K} \cong \frac{H^*}{K^*}$.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱.۰.۱۵. *فرض کنیم G یک گروه و $N \trianglelefteq G$، در این صورت $\dfrac{H}{N} \trianglelefteq \dfrac{G}{N}$ اگروتنهااگر $N \leq H \trianglelefteq G$.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۱.۰.۱۶. اگر G یک گروه و $x, y \in G$، آنگاه $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ را جابه‌جاگر x, y می‌نامیم. زیرگروه G تولیدشده به وسیله‌ی تمام جابه‌جاگرهای اعضای G را، زیرگروه جابه‌جاگر [1] G می‌نامیم و آن را با G' نمایش می‌دهیم (گاهی نیز G' را زیرگروه مشتق [2] G نیز می‌نامیم).

قضیه ۱.۰.۱۷. اگر G یک گروه باشد، آنگاه $G' \trianglelefteq G$ و $\frac{G}{G'}$ آبلی است.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱.۰.۱۸. اگر G یک گروه و $N \trianglelefteq G$، آنگاه برای این‌که $\frac{G}{N}$ آبلی باشد لازم و کافی است که $G' \leq N$.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۱.۰.۱۹. فرض کنیم G یک گروه و $g \in G$، در این صورت هر خودریختی G به شکل

$$\varphi_g : G \to G, \quad \varphi_g(x) = g^{-1}xg \ , \ \forall x \in G$$

را خودریختی درونی [3] G می‌نامیم. خودریختی‌های G را که درونی نباشند، خودریختی‌های بیرونی [4] می‌نامیم. مجموعه‌ی خودریختی‌های درونی G را با $Inn(G)$ و مجموعه خودریختی‌های بیرونی G را با $Out(G)$ نمایش می‌دهیم. مجمموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۰.۲۰. اگر G یک گروه باشد، آنگاه با قانون ترکیب توابع، $Aut(G)$ یک گروه و

$$Inn(G) \trianglelefteq Aut(G).$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱.۰.۲۱. (قضیه‌ی اول یکریختی) اگر $f : G_1 \longrightarrow G_2$ یک هم‌ریختی از گروه G_1 به گروه G_2 باشد، آنگاه

$$kerf = \{g_1 \in G_1 | f(g) = e\}$$

[1] commutator
[2] derived
[3] inner automorphism
[4] outer automorphism

زیرگروه نرمال G می‌باشد همچنین داریم

$$\frac{G_1}{ker f} \cong Im(f).$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۲۲.۰.۱. *(قضیه‌ی دوم یکریختی) اگر G یک گروه، $H \leqslant G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه*

$$\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{HK}{K}.$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۲۳.۰.۱. *(قضیه‌ی سوم یکریختی) فرض کنیم G یک گروه و $H \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ همچنین $H \trianglelefteq G$ در این صورت*

$$\frac{\frac{G}{H}}{\frac{K}{H}} \cong \frac{G}{K}.$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۲۴.۰.۱. *اگر G یک گروه باشد، آنگاه*

$$\frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G).$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۲۵.۰.۱. *فرض کنیم G یک گروه دوری است، در این صورت*

الف) اگر G نامتناهی باشد، آنگاه $G \cong \mathbb{Z}$،

ب) اگر G متناهی و از مرتبه‌ی n باشد، آنگاه $G \cong Z_n$.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۲۶.۰.۱. *اگر G یک گروه دوری متناهی از مرتبه n باشد، آنگاه برای هر مقسوم‌علیه m از n زیرگروهی از G با مرتبه ی m وجود دارد.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۲۷.۰.۱. *یک جبر لی[۵] یک فضای برداری $\mathfrak{g}$ روی یک میدان F با یک عمل دوتایی*

$$[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

می‌باشد، هرگاه دارای شرایط زیر باشد

(1) $[ax+by, z] = a[x, z]+b[y, z] \;\; , \;\; [z, ax+by] = a[z, x]+b[z, y] \quad \forall a, b \in F \quad , \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

(2) $[x, x] = 0 \quad \forall x \in \mathfrak{g} \qquad , \qquad [x, y] = -[y, x] \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$

(3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \qquad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$

شرط (۳) را اتحاد ژاکوبی می‌گویند. این عمل دوتایی را براکت لی نیز می‌نامند.

تعریف ۲۸.۰.۱. *مشتق روی جبر لی $\mathfrak{g}$ یک نگاشت خطی $D : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ می‌باشد که شرط زیر را داراست*

$$D[a, b] = [a, D(b)] + [D(a), b]$$

برای هر $a \in \mathfrak{g}$، $ad(a)$ مشتق a روی $\mathfrak{g}$ نامیده می‌شود، این نگاشت را نگاشت مشتق داخلی [۶] می‌نامیم.

تعریف ۲۹.۰.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی و $N \rhd G$ و H زیرگروهی از G باشد، H را مکمل[۷] N در G می‌نامیم اگر $NH = G$ و $N \cap H = ۱$. اگر N یک مکمل در G داشته باشد، می‌گوییم G روی N شکافته می‌شود.*

تعریف ۳۰.۰.۱. *فرض کنید $N \lhd G$، زیرگروه H از G متمم[۸] N در G نامیده می‌شود هرگاه $NH = G$. در حالت کلی G یک متمم N در G می‌باشد. هر مکمل N در G یک متمم N در G نیز می‌باشد.*

---
[۵] lie algebra
[۶] inner derivation
[۷] complement
[۸] supplement

تعریف ۳۱.۰.۱. G -گروه A، گروهی است با نگاشت $\theta : G \longrightarrow Aut(A)$. اگر ابهامی وجود نداشته باشد، قرار می‌دهیم $a^{\theta(g)} = a^g$ که در آن $a \in A$ و $g \in G$ می‌باشد.

در G -گروه A داریم

$$C_G(A) := \{g \in G| \ \ a^g = a \ \ , \ \ \forall a \in A\}$$

و

$$I_G(A) := \{g \in G| \ \text{یک خودریختی داخلی را در } A \text{ القاء می‌کند } g\}$$

تعریف ۳۲.۰.۱. G -گروه‌های A و B، G - یکریخت نامیده می‌شوند هرگاه یکریختی $\varphi : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری‌که $a^{g\varphi} = a^{\varphi g}$ که در آن $a \in A$ و $g \in G$ می‌باشد. این یکریختی را با نماد $A \cong_G B$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۰.۱. ϖ را برابر مجموعه‌ای از اعداد اول تعریف می‌کنیم.

عدد صحیح n یک ϖ - عدد نامیده می‌شود اگر هر عدد اول p که مقسوم‌علیه n باشد، عضوی از ϖ باشد. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، G را یک ϖ - گروه می‌نامیم اگر $|G|$ یک ϖ - عدد باشد. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، در این صورت ϖ - زیرگروه نرمال، ماکسیمال منحصربه‌فردی در G وجود دارد که با $O_\varpi(G)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳۴.۰.۱. گروه دو وجهی D_{2n} را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$D_{2n} =< a, b >= \{a, b| \ a^n = b^2 = 1, \ ba = a^{-1}b\}$$

که از مرتبه $2n$ می‌باشد.

۱.۱ عمل گروه‌ها بر مجموعه‌ها و گروه‌های جایگشتی

تعریف ۱.۱.۱. اگر Ω یک مجموعه‌ی ناتهی باشد، آنگاه هر نگاشت دوسویی $\pi : \Omega \longrightarrow \Omega$ یک جایگشت Ω نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه‌ی تمام جایگشت‌های مجموعه‌ی Ω را که با قانون ترکیب توابع تشکیل گروه می‌دهند، گروه متقارن [۹] روی مجموعه‌ی Ω نامیده و با S_Ω نمایش می‌دهیم. در حالتی که $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ مجموعه‌ای متناهی و دارای n عضو باشد، گروه متقارن روی Ω را با S_n نمایش داده و آن را گروه متقارن درجه‌ی n می‌خوانیم.

لازم به ذکر است که هر جایگشت را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب تعداد زوج دورهای به طول دو و یا حاصل‌ضرب تعداد فرد دورهای دوتایی نمایش داد.

تعریف ۳.۱.۱. گروه G ساده [۱۰] نامیده می‌شود هرگاه تنها زیرگروه‌های نرمال آن زیرگروه‌های بدیهی $\{e\}$ و G باشند.

قضیه ۴.۱.۱. $A_n (n \geq 5)$ گروهی ساده است که در آن A_n گروه متناوب روی n حرف است.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۵.۱.۱. فرض کنیم A_4 گروه متناوب از مرتبه‌ی ۱۲ باشد، در این صورت

(۱) A_4 فقط یک زیرگروه نرمال غیربدیهی و سره، یکریخت با K_4 معرفی می‌شود که ساختار گروه K_4 به شکل زیر می باشد

$$K_4 =< a, b, c | a^2 = b^2 = c^2 = e,\ ab = c,\ ac = b,\ bc = a > .$$

(۲) A_4 دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی ۶ نیست،

(۳) S_4 فقط دارای یک زیرگروه نرمال از مرتبه ۱۲ می‌باشد که همان A_4 است.

تعریف ۶.۱.۱. قرار دهید G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد، فرض کنیم به ازای هر g از G وهر x از X، عضو یکتایی از X که آن را به علامت $g \bullet x$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به طوری که

[۹] Symmetric group
[۱۰] simple

(i) به ازای هر x از X، $x \bullet 1 = x$،

(ii) به ازای g_1، g_2 از G و هر x از X، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$،

در این صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و $\bullet$ را عمل[۱۱] G بر X گوییم و با نماد $(G|X)$ نشان می‌دهیم برای سهولت در نوشتن به جای $x \bullet g$ معمولاً خواهیم نوشت xg.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم گروه G بر مجموعه X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. گوییم g عضو (یا نقطه) x را ثابت نگه می‌دارد هرگاه $xg = x$. مجموعه‌ی $\{xg | g \in G\}$ را مدار شامل x گویند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید گروه G بر مجموعه‌ی Ω عمل می‌کند. هسته‌ی این عمل عبارت است از

$$N = \{g \in G | \omega^g = \omega, \ \forall \omega \in \Omega\}$$

عمل $(G|\Omega)$ صادق[۱۲] نامیده می‌شود. هرگاه $N = \{1\}$، ۱ عضو بی اثر گروه G است. از تعریف فوق به وضوح دیده می‌شود که $N \trianglelefteq G$. اگر $N = G$ آنگاه عمل G بر Ω بدیهی[۱۳] نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای ناتهی و $G|\Omega$، در این صورت عمل G روی Ω انتقالی[۱۴] نامیده می‌شود، هرگاه G تنها دارای یک مدار باشد. یعنی

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega \quad \exists g \in G \quad \ni \quad \alpha^g = \beta.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و Ω مجموعه‌ای ناتهی و $G|\Omega$، در این صورت عمل G روی Ω منظم[۱۵] نامیده می‌شود، هرگاه برای دو عنصر x و y در Ω دقیقاً یک عنصر $g \in G$ وجود دارد به طوری‌که $g.x = y$.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $(G|\Omega)$ و $\omega \in \Omega$، مجموعه‌ی $G_\omega = \{g \in G | \omega^g = \omega\}$ را ثابت ساز[۱۶] ω در G می‌نامیم.

---

[۱۱] action
[۱۲] faithful
[۱۳] trivial
[۱۴] transitive
[۱۵] regular or simple transitive
[۱۶] stabilizer

قضیه ۱۲.۱.۱. *اگر $(G|\Omega)$ انتقالی باشد، آنگاه*

$$\omega \in \Omega \ , \ [G : G_\omega] = |\Omega|.$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۱۳.۱.۱. *فرض کنید $(G|\Omega)$ و G گروهی متناهی است. اگر Δ یک مدار عمل $(G|\Omega)$ باشد، آنگاه $|\Delta|$، $|G|$ را می‌شمارد همچنین برای $\omega \in \Delta$ داریم*

$$[G : G_\omega] = |\Delta|.$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۱۴.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و p یک عدد اول باشد گروه G را یک p -گروه نامیم اگروتنهااگر $|G|$ توانی از p باشد.*

زیرگروه H از G را یک p -زیرگروه G گوییم در صورتی که H یک p -گروه باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. *p -گروه آبلی متناهی G را یک p -گروه آبلی مقدماتی [۱۷] می‌نامیم، در صورتی که مرتبه‌ی هر عضو غیربدیهی آن برابر p باشد.*

قضیه ۱۶.۱.۱. *اگر G یک گروه و $|G| = p^n$ و p عددی اول، آنگاه*

$$Z(G) \neq ۱.$$

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۱۷.۱.۱. *اگر $|G| = p^۲$ و p عددی اول، آنگاه G گروه آبلی و یکریخت با $Z_p \times Z_p$ یا $Z_{p^۲}$است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱۸.۱.۱. *فرض کنید $|G| = p^n$ و $G \gneqq H$، در این صورت $N_G(H) \gneqq H$.*

[۱۷] elementary abelian

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱.۱.۱۹. *(قضیه کیلی) هر گروه با زیرگروهی از یک گروه متقارن یکریخت است. به بیان دیگر به ازای هر گروه G مجموعه‌ای مانند Ω وجود دارد به طوری‌که G با زیرگروهی از S_Ω یکریخت است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

۱.۲ قضیه‌های سیلو و کاربردهایی از آن

تعریف ۱.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد، $|G| = p^n m$ و $(m,p) = 1$، در این صورت هر زیرگروه مرتبه‌ی p^n از G یک p - زیرگروه سیلو [۱۸] G نامیده می‌شود و مجموعه تمام p -زیرگروه های سیلوی G را با نماد $Syl_p(G)$ نشان می‌دهند.*

قضیه ۱.۲.۲. *(قضیه سیلو) فرض کنید G یک گروه متناهی، $|G| = p^n m$ و $(m,p) = 1$. در این صورت*

(الف) *G حداقل یک $p-$ زیرگروه سیلو دارد،*

(ب) *هر $p-$ زیرگروه در یک $p-$ زیرگروه سیلوی G قرار دارد،*

(پ) *هر دو $p-$ زیرگروه سیلوی G مزدوج اند،*

(ج) *تعداد همه‌ی $p-$ زیرگروه‌های سیلو G همنهشت ۱ به پیمانه‌ی p است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۱.۲.۳. *(قضیه کشی) اگر G یک گروه متناهی و p عددی اول باشد که $p||G|$، آنگاه G دارای عضوی از مرتبه‌ی p است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

[۱۸] Sylow p- Subgroup

لم ۴.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی و $H \leq G$ ، در این صورت تعداد مزدوج های H در G برابر است با $[G : N_G(H)]$.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۵.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی و $H, K \leq G$ ، در این صورت*

$$|HK| = \frac{|H|.|K|}{|H \cap K|}.$$

(HK الزاماً زیرگروهی از G نیست.)

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۶.۲.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $p||G|$، آنگاه تعداد p - زیرگروه‌های سیلو G مقسوم‌علیه‌ی $|G|$ است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

لم ۷.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی، $p||G|$ و p عددی اول. اگر G تنها دارای یک p - زیرگروه سیلو P باشد، آنگاه $P \trianglelefteq G$ و اگر $P \in Syl_p(G)$ و داشته باشیم $P \trianglelefteq G$ در این صورت G تنها دارای یک p - زیرگروه سیلو است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی و $p||G|$، اگر $N \trianglelefteq G$ و $P \in Syl_p(G)$ ، در این صورت*

الف) $N \cap P \in Syl_p(N)$ ،

ب) $\frac{PN}{N} \in Syl_p(\frac{G}{N})$.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید P یک p - گروه متناهی باشد، $H \lneqq P$ و $|H| = p^k$. در این صورت P دارای زیرگروهی از مرتبه ی p^{k+1} و شامل H است.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

قضیه ۱۰.۲.۱. *هرگاه G یک p - گروه غیر دوری و متناهی باشد، در این صورت G یک زیرگروه نرمال مانند N دارد به طوری‌که*

$$\frac{G}{N} \cong C_p \times C_p.$$

که در آن C_p گروه آبلی دوری از مرتبه p می‌باشد.

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

تعریف ۱۱.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه و $H \lneqq G$، در این صورت H را یک زیرگروه ماکسیمال [۱۹] G می‌نامیم هرگاه اگر $H \leqslant K \leqslant G$ آنگاه $K = H$ یا $K = G$.*

لم ۱۲.۲.۱. *اگر P یک p - گروه باشد، آنگاه هر زیرگروه ماکسیمال P دارای اندیس p در P است و اگر $H \lneqq P$ یک زیرگروه ماکسیمال P باشد آنگاه $H \lhd P$.*

برهان. به مرجع [۳۳] رجوع شود. ■

۳.۱ حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌ها و تحویل‌پذیری

تعریف ۱.۳.۱. *فرض کنید $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ خانواده‌ای متناهی از گروه‌هاست. حاصل ضرب دکارتی $\prod_{i=1}^{n} G_i$ با عمل ترکیب مولفه‌ای حاصل‌ضرب مستقیم [۲۰] خارجی خانواده‌ی $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه و $\{G_i\}_{1\leqslant i\leqslant n}$ خانواده‌ای متناهی از زیرگروه‌های G است، G حاصل ضرب مستقیم داخلی G_iها نامیده می‌شود، هرگاه*

[۱۹] Maximal subgroup
[۲۰] Direct product