بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

مجموعه های کراندار در گروه های توپولوژی و نشاننده ها

استاد راهنما:

دکتر غلامرضا رضایی

تحقیق و نگارش:

علی مفتاح

(این پایان نامه از حمایت مالی معاونت پژوهشی دانشگاه سیستان و بلوچستان بهره مند شده است)

مهر ۱۳۸۷

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان مجموعه های کراندار در گروه های توپولوژیک و نشانده ها قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی محض توسط دانشجو علی مفتاح تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر غلامرضا رضایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می باشد.

علی مفتاح

این پایان نامه واحد درسی شناخته می شود و در تاریخ ۸۷/۷/۲۵ توسط هیئت داوران بررسی و درجه بسیار خوب به آن تعلق گرفت.

	نام و نام خانوادگی	امضاء	تاریخ
استاد راهنما:	دکتر غلامرضا رضایی		
استاد راهنما:			
استاد مشاور:			
داور ۱:	دکتر نصرالله گرامی		
داور ۲:	دکتر رحمت الله لشکری		
نماینده تحصیلات تکمیلی:	دکتر اکبر گلچین پور		

۱۳۸۷/۱۰/۲۱

دانشگاه سیستان و بلوچستان

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب علی مفتاح تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو: علی مفتاح

امضاء

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

و

همسر فداکارم

سپاسگزاری

با حمد و سپاس خداوند تبارک و تعالی و آرزوی سلامتی آقا امام زمان حضرت ولی عصر (عج ا...)، بر خود لازم می دانم تا از زحمات استاد ارجمند جناب دکتر غلامرضا رضایی و راهنمایی های ایشان در این پایان نامه تشکر و قدردانی نماییم. از جناب دکتر رحمت الله لشکری پور و جناب دکتر نصر الله گرامی که داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم. از جناب دکتر اکبر گلچین به عنوان نماینده تحصیلات تکمیلی تشکر و قدردانی می نماییم. از دوست خوبم آقای سید حسین رسولی که در این زمینه کمک قابل ملاحظه ای انجام دادند تشکر و قدردانی می نماییم. از راهنمایی ها و کمک های دوستان خوبم آقایان: آرش علائی، مهدی جعفری، محمد جواد غلامی، فرزاد محمدی، علی شاه کرمی، روح الله چوبین، هادی سعیدی، پویان خامه چی، روح الله قاعدی، محمد خزائلی و رسول ملک زاده،... تشکر و قدردانی می نماییم.

چکیده

در این پایان‌نامه، پس از بیان تعاریف مقدماتی از فضاهای توپولوژی، انواع فشردگی در فضاهای توپولوژی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به بیان تعدادی از قضایای اساسی فضاهای توپولوژی می‌پردازیم. گروه‌های توپولوژی را تعریف کرده و قضایای آن و دستگاه اساسی از همسایگی‌ها برای یک نقطه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. پس از تعریف نگاشت‌های به طور کامل بسته نشان می‌دهیم که وجود یک زیرفضای فشرده‌ی متر ناپذیر از یک گروه توپولوژی G نشان می‌دهد که G شامل یک ابردنباله‌ی ناشمارا (یک فشرده‌سازی تک نقطه‌ای از یک فضای گسسته‌ی ناشمارا) است. وجود یک ابردنباله‌ی ناشمارا در یک گروه توپولوژی اثر قوی روی زیر مجموعه‌های کراندار از گروه می‌گذارد. (برای مثال، اگر یک گروه توپولوژی G شامل یک ابردنباله‌ی ناشمارا باشد و K یک زیرمجموعه‌ی بسته و کراندار G باشد که شامل هیچ ابردنباله‌ی ناشمارا نباشد، آن‌گاه هر زیرمجموعه دلخواه A از K در $G \setminus (K \setminus A)$ کراندار است.) همچنین نشان می‌دهیم که هر گروه توپولوژی آبلی پیش‌فشرده H می‌تواند به عنوان یک زیرگروه بسته، در یک گروه توپولوژی آبلی پیش‌فشرده نشانده شود به طوری که H در G کراندار باشد و همه زیرمجموعه‌های کراندار از گروه خارج قسمتی G/H متناهی باشند.

فهرست مندرجات

پیش‌گفتار

در اوایل دهه ۱۸۸۰، گئورک کانتور تلویحاً استدلال‌هایی در برهان بعضی قضایا بکار برده بود، که اساساً هم ارز اصل انتخاب بودند. اما او توجه نداشت که یک اصل موضوع قوی جدیدی به کار می‌برد. درسال ۱۹۰۴، ارنست تسرملو[1] (۱۸۷۱—۱۹۵۳) بعد از مطالعات دقیق، اصل انتخاب را صریحاً عنوان کرد و از آن در اثبات قضیه خوش‌ترتیبی استفاده کرد. چون برای خوش‌ترتیب کردن، حتی مجموعه آشنای اعداد حقیقی، هیچ راهی پیدا نشده است. علیرغم حکم قضیه خوش‌ترتیبی، تا مدت حداقل شش سال بعد از ظهور این قضیه، مقالات انتقادی زیادی درباره برهان تسر ملو نوشته شد. اکثراً اصل انتخاب را رد کردند. با این حال اکثر منتقدین باید می‌پذیرفتند که اگر اصل موضوع انتخاب را قبول می‌کردند، نمی‌توانستند اشتباهی در برهان تسر ملو برای قضیه خوش‌ترتیبی بیابند. بنابراین، انتقاد از قضیه خوش‌ترتیبی به انتقاد از اصل انتخاب منجر می‌شد. به نظر می‌رسید که فقط دو راه وجود دارد:

الف) اصل را بر این بگذاریم که تنها نتیجه‌های ساخته شدنی را بپذیریم و نتیجه‌های وجودی محض را نپذیریم، آن‌گاه روش‌ها و عرصه‌های ریاضیات آنقدر محدود می‌شوند که خارج از حساب، تنها زمینه‌های بسیار کوچکی را می‌توان بررسی کرد.

ب) نتیجه‌های ساخته شدنی و وجودی محض، از جمله اصل موضوع انتخاب، را بپذیریم و در نتیجه به حل مسائل بیشتر و توسعه دادن ریاضیات بپردازیم.

برای اینکه بتوان مشخص کرد که پیروی از کدام روش عاقلانه است، باید قبلاً به دو سوال مشکل زیر توجه شود:

۱) آیا اصل انتخاب از اصول موضوع موجود مستقل است یا به وسیله دیگر اصول موضوع موجود ریاضی ثابت می‌شود؟

۲) آیا اصل انتخاب با دیگر اصول کلاسیک ریاضی سازگار است یا ممکن است افزودن اصل انتخاب به دیگر اصول موضوع کلاسیک ریاضی موجب به وجود آمدن تناقض شود؟

بسیاری از ریاضی‌دانان برای رسیدن به جواب‌های این دو سوال کوشش فراوان کردند. چندین سال بعد، در ۱۹۳۸ کورت گودل [2] با اثبات اینکه افزودن اصل موضوع انتخاب به دیگر اصول موضوع موجود ریاضی هیچ

[1] Ernest Zermelo

[2] K. Godel

تناقضی ایجاد نمی‌کند، به سوال دوم جواب داد. کشف گودل به جامعه‌ی ریاضی و به‌خصوص به استفاده کنندگان از اصل موضوع انتخاب آسایش خاطر و اطمینان زیادی داد. اما تحقیق برای پاسخ به سوال اول همچنان ادامه یافت. بالاخره، در سال ۱۹۶۳ پل کوهن کاملاً به سوال جواب داد. در حقیقت او ثابت کرد که اصل موضوع انتخاب از دیگر اصول موضوع موجود، مستقل است. به عبارت دیگر، اصل موضوع انتخاب را نمی‌توان به عنوان یک قضیه با استفاده از اصول موضوع کلاسیک ریاضی ثابت کرد.

امروزه اصل موضوع انتخاب را به عنوان یک اصل جدید اکثراً پذیرفتند، و لزوم آن برای آنالیز حقیقی جدید، نظریه اعداد اصلی و ترتیبی ترامتناهی، جبر جدید و عرصه وسیعی از توپولوژی روشن شده است.

فصل ۱

گروه‌های توپولوژی

۱—۱ مقدمه

در این فصل گروه‌های توپولوژی را تعریف کرده و دستگاه اساسی همسایگی‌ها برای یک نقطه را مورد بررسی قرار می‌دهیم. انواع فشردگی در گروه‌های توپولوژی را تعریف کرده و به بیان تعدادی از قضایای اساسی گروه‌های توپولوژی می‌پردازیم.

۱—۲ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این قسمت تعدادی از تعاریف و مفاهیم اولیه را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱: یک زیرمجموعه B از فضای X را در X کراندار(تابعاً کراندار) گوییم، اگر برای هر تابع پیوسته

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

تصویر $f(B)$ در اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ کراندار باشد.

قضیه۱.۲.۲: اگر α یک عدد ترتیبی اختیاری باشد، آن‌گاه مجموعه تمام اعداد ترتیبی مانند β که در شرط $\beta \prec \alpha$ صدق کند یک مجموعه خوش‌ترتیب است که عدد ترتیبی آن α است.

برهان: به [۱۵] مراجعه کنید.

با توجه به قضیه ۲.۲.۱ می‌توان عدد ترتیبی α را با مجموعه $\{\beta \mid \beta \prec \alpha\}$ یکی در نظر گرفت و به این ترتیب هر عدد ترتیبی را یک مجموعه خوش‌ترتیب از اعداد ترتیبی دانست. مثلاً

$$
\begin{aligned}
&۰ \equiv \emptyset,\\
&۱ \equiv \{۰\},\\
&۲ \equiv \{۰, ۱\},\\
&\vdots\\
&\omega = \{۰, ۱, ۲, \ldots\},\\
&\omega + ۱ = \{۰, ۱, ۲, \ldots, \omega\}.
\end{aligned}
$$

عدد ترتیبی مجموعه اعداد طبیعی N، با رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی، را با حرف یونانی ω نشان می‌دهند یعنی، $\omega = ord\{۱, ۲, ۳, \ldots\}$.

تعریف ۱.۲.۳: فرض کنید X فضای توپولوژی باشد. X را فضای $T_۰$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز x و y از X، مجموعه بازی مانند U موجود باشد به طوری که $x \in U$ و $y \in X \setminus U$ یا $y \in U$ و $x \in X \setminus U$.

تعریف ۱.۲.۴: فضای توپولوژی (X, τ) را $T_۱$ می‌گوییم، هرگاه به ازای هر دو نقطه متمایز x, y از X، دو مجموعه‌ی باز $U_۱$ و $U_۲$ وجود داشته باشند به طوری که $x \in U_۱ \cap (X \setminus U_۲)$ و $y \in U_۲ \cap (X \setminus U_۱)$.

تعریف ۱.۲.۵: فضای توپولوژی $(X.\tau)$ را $T_۲$ یا فضای هاسدورف می‌گوییم، هرگاه به ازای هر دو عضو متمایز از X مانند x, y دو مجموعه باز $U_۱$ و $U_۲$ موجود باشد به طوری که $x \in U_۱$ و $y \in U_۲$ و $U_۱ \cap U_۲ = \emptyset$.

تعریف ۱.۲.۶: فرض کنید مجموعه‌های تک عضوی در X بسته باشند. در این صورت، X را منتظم خوانیم اگر به ازای هر نقطه‌ی آن مانند x و هر مجموعه‌ی بسته جدا از x مانند B، مجموعه‌های باز جدا از همی بترتیب، شامل x و حاوی B موجود باشند.

تعریف ۱.۲.۷: فضای توپولوژی X را تماماً منتظم گوییم هرگاه مجموعه‌های

تک عضوی در X بسته باشند و به ازای هر نقطه‌ای مانند $x_\circ$ و هر مجموعه بسته‌ای مانند A که شامل $x_\circ$ نباشد، تابعی پیوسته مانند $f : X \longrightarrow [\circ, ۱]$ موجود باشد به طوری که $f(x_\circ) = ۱$ و $f(A) = \circ$.

تعریف ۸.۲.۱: فرض کنید مجموعه‌های تک عضوی در X بسته باشند. در این صورت X را نرمال خوانیم اگر به ازای هر دو مجموعه بسته جدا از هم مانند A و B، مجموعه‌های باز جدا از همی به‌ترتیب، حاوی A و B موجود باشند.

تعریف ۹.۲.۱: فضای توپولوژی X را تماماً نرمال گوییم، اگر هر زیر فضای آن مانند Y خود یک فضای توپولوژی نرمال باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱: زیرمجموعه A از فضای توپولوژی X را چگال گوییم اگر $X = \bar{A}$.

قضیه ۱۱.۲.۱ (قضیه بیر) : اگر X یک فضای متری کامل باشد، اشتراک هر گردایه شمارش پذیر از زیرمجموعه‌های باز چگال X، در X چگال است.

برهان: به [۱۵] مراجعه کنید.

تعریف ۱۲.۲.۱: مجموعه $E \subset X$ را هیچ جا چگال گوییم، اگر $\overline{E}$ شامل زیرمجموعه باز ناتهی از X نباشد یا به عبارت دیگر، $(\overline{E})^\circ = \emptyset$.

تعریف ۱۳.۲.۱: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند و تابع $f : X \longrightarrow Y$ تناظری دوسویی باشد. اگر f وتابع معکوس آن

$$f^{-۱} : Y \longrightarrow X$$

هر دو پیوسته باشند، f را همسان‌ریختی گویند.

تعریف ۱۴.۲.۱: فرض کنید X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد. شیئی بیرون از X در نظر می‌گیریم. می‌توانیم این شی ء را برای سهولت با نماد ∞ نمایش دهیم و با الحاق این شی ء به X، مجموعه $Y = X \cup \{\infty\}$ را تشکیل دهید. حال با تعریف گردایه‌ای از انواع مجموعه‌های زیر به عنوان مجموعه‌های باز در Y، در آن توپولوژی‌ای می‌سازیم:

(۱) U، که در آن U یکی از زیرمجموعه‌های باز X است.

(۲) $Y \setminus C$، که در آن C یکی از زیرمجموعه‌های فشرده‌ی X است.

فضای Y را فشرده شده تک نقطه‌ای X گویند.

خواص اساسی فشرده شده تک نقطه‌ای در قضیه ذیل گنجانده شده است.

قضیه ۱۵.۲.۱: فرض کنید X یک فضای هاسدورف موضعاً فشرده باشد که فشرده نیست و Y فشرده شده تک نقطه‌ای X باشد. در این صورت Y فضایی هاسدورف و فشرده است. X زیرفضایی از Y است، مجموعه $Y \setminus X$ متشکل از یک نقطه است و $\bar{X} = Y$.

برهان: به [۱۵] مراجعه کنید.

تعریف ۱۶.۲.۱: یک فضای توپولوژی X را شبه فشرده گوییم، اگر $C(X,\mathbb{R}) = C^{*}(X,\mathbb{R})$، که $C(X,\mathbb{R})$ همه توابع پیوسته از X به Y است و $C^{*}(X,\mathbb{R})$ همه توابع کراندار در $C(X,\mathbb{R})$ است.

تعریف ۱۷.۲.۱: $A \subseteq X$ را $c-$ فشرده در X نامند، اگر هر تابع پیوسته $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$، A را به یک زیرمجموعه فشرده از $\mathbb{R}$ انتقال دهد.

هر زیرمجموعه $c-$ فشرده از فضای X، مانند A، در X کراندار است. همچنین یک فضای شبه فشرده، روی خودش کراندار و $c-$ فشرده است.

مفهوم پیرافشردگی یکی از سودمندترین تعمیم‌های فشردگی است. بسیاری از فضاهایی که قبلاً با آن‌ها

مانوس شدیم پیرافشرده هستند. مثلاً هر فضای توپولوژی هاسدورف فشرده، فضایی پیرافشرده است.

تعریف ۱.۲.۱۸: فضای X را پیرافشرده خوانیم در صورتی که هاسدورف باشد و هر پوشش باز آن مانند $\mathcal{A}$ دارای یک تظریف باز موضعاً متناهی مانند $\mathcal{B}$ باشد که X را بپوشاند.

تعریف ۱.۲.۱۹: زیرمجموعه A از فضای توپولوژی X را یک مجموعه G_δ گویند در صورتی که مساوی مقطع گردایه‌ای شمارا از زیر مجموعه‌های باز X باشد.

تعریف ۱.۲.۲۰: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند و تابع $f : X \longrightarrow Y$ موجود باشد. مجموعه A از فضای X را یک فایبر خوانند در صورتی که هر عضو آن به‌وسیله نگاشت تصویر به یک عنصر پایه از فضای Y فرستاده شود.

تعریف ۱.۲.۲۱: فرض کنید $x \in X$ باشد. کوچکترین عدد اصلی از یک پایه برای X شامل x را مختصات نقطه x در فضای توپولوژی X خوانند و با $\chi(x, X)$ نمایش می‌دهند.

اگر $F \subseteq X$ باشد، کوچکترین عدد اصلی از یک پایه برای X در F را مختصات زیرمجموعه F در فضای توپولوژی X خوانند و با $\chi(F, X)$ نمایش می‌دهند. $\chi(X, X)$ را شبه مختصات X نامیده و با $\psi(X)$ نمایش می‌دهند. رابطه $\psi(X) \leq \aleph_0$ بر قرار است اگر و فقط اگر هر نقطه از X، یک مجموعه G_δ در X باشد.

قضیه ۱.۲.۲۲: فرض کنید ϕ همریختی از گروه G به G با هسته‌ی K باشد. در این صورت $\phi(G)$ یک گروه است و یکریختی طبیعی از $\phi(G)$ به G/K وجود دارد.

برهان: به [۱۱] مراجعه کنید.

تعریف ۱.۲.۲۳: گروه G را بولی گویند، اگر برای هر $x \in G$، رابطه $x^2 = e$ برقرار باشد.

۱—۳ رسته گروه‌های توپولوژی

در این قسمت رسته گروه‌های توپولوژی را مورد بررسی قرار داده و تعدادی از قضایای مهم آن را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۱.۳.۱: یک گروه توپولوژی عبارت است از یک مجموعه G که در شرایط ذیل صدق کند:

۱) G یک گروه است،

۲) G یک فضای توپولوژی است،

۳) نگاشت ضرب

$$g_1 : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto x.y$$

ونگاشت معکوس

$$g_2 : G \longrightarrow G$$
$$x \longmapsto x^{-1}$$

پیوسته باشند(توپولوژی روی $G \times G$ حاصل ضربی است).

اگر عمل گروه جمعی باشد به جای $x.y$ و x^{-1} به ترتیب از $x + y$ و $-x$ استفاده می‌شود. پیوستگی نگاشت ضرب از نوع همزمان است. اگر نگاشت ضرب روی دو متغیر به طور جداگانه پیوسته باشد، به آن گروه پیراتوپولوژیک گویند

مثال ۲.۳.۱: مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یک گروه توپولوژی است که باعمل جمع معمولی یک گروه و با توپولوژی متر معمولی $d(x, y) =| x - y |$ یک فضای توپولوژی است. با در نظر گرفتن

نگاشت‌های تصویری

$$\pi_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto a$$

و

$$\pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto b$$

که پیوسته‌اند نتیجه می‌شود نگاشت

$$g_1 = \pi_1 + \pi_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(a, b) \longmapsto a + b$$

پیوسته است. از طرفی

$$i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto a$$

پیوسته است، پس

$$g_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$a \longmapsto -a$$

که $g_2 = (-1)i$ نیز پیوسته است.

مثال ۳.۳.۱: (i) $\mathbb{R}^*$ مجموعه تمام اعداد حقیقی ناصفر نسبت به عمل ضرب معمولی اعداد یک گروه و با توپولوژی متر معمولی یک فضای توپولوژی است. از طرفی

$$g_1 = \pi_1\pi_2 : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$(a, b) \longmapsto ab$$

و

$$\frac{1}{i} = g_2 : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$$
$$a \longmapsto \frac{1}{a}$$

پیوسته‌اند. لذا $\mathbb{R}^*$ یک گروه توپولوژی است.

(ii) گروه خطی عام[1] $GL_n(\mathbb{R})$، مجموعه تمام ماتریس‌های $n \times n$ نامنفرد با درایه‌های در $\mathbb{R}$ نسبت به ضرب ماتریس‌ها گروه و با توپولوژی القایی جزئیت در $\mathbb{R}^{n^2}$ یک فضای توپولوژی است. یعنی درایه‌های ماتریس $A_{n\times n} = (a_{i,j})$, $i,j = (1, 2, ..., n)$ را با نقطه

$$(a_{11}, ..., a_{1n}, a_{21}, ..., a_{2n}, ..., a_{n1}, ..., a_{nn})$$

در فضای اقلیدسی E^{n^2} همانند می‌کنیم. فرض کنید M مجموعه ماتریس‌های $n \times n$، $A = (a_{ij})$ با درایه‌های در $\mathbb{R}$ باشد. به M توپولوژی حاصل‌ضربی

$$\underbrace{E^1 \times E^1 \times ... \times E^1}_{n^2}$$

را نسبت می‌دهیم. نشان می‌دهیم نگاشت‌های

$$g_1 : M \times M \longrightarrow M$$
$$(A, B) \longmapsto AB$$

و

$$g_2 : M \longrightarrow M$$
$$A \longmapsto A^{-1}$$

پیوسته اند.

حال اگر $A = (a_{i,j})$ و $B = (b_{i,j})$، در آن صورت $AB = (c_{ij})$ که $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. نگاشت تصویری

[1] General linear group