بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه مازندران
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

موضوع:
گراف های مقسوم علیه صفر یک حلقه

استاد راهنما:
دکتر یحیی طالبی

استاد مشاور:
دکتر علی اصغر طالبی

نگارش:
فروغ کاظمی کیاسری

پاییز ۱۳۹۰

چکیده

مطالعه گرافهای مقسوم علیه صفر یک حلقه این امکان را می دهد تا خواص یک حلقه را با توجه به مقسوم علیه های صفر آن بررسی نماییم. همچنین می توان خواص جبری یک حلقه را با ابزارهای موجود در نظریه گراف مورد بررسی قرار داد.

در این پایان نامه به مطالعه گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ای می پردازیم که در شرایط تقسیم پذیری برای عناصر حلقه و شرایط مقایسه پذیری برای ایده آل های حلقه صدق می کند.

در ابتدا برخی تعاریف و مفاهیم لازم از نظریه حلقه ها و نظریه گراف ها آورده شده است. در ادامه به بررسی گرافهای مقسوم علیه صفر روی حلقه های جابجایی و غیر جابجایی پرداخته شد. به ویژه گراف مقسوم علیه صفر حلقه های زنجیری بررسی شده است و در پایان نیز گراف مقسوم علیه صفر حلقه‌ای خاص معرفی شده است.

کلمات کلیدی : ایده آل های اول مرتب خطی ، ϕ- حلقه ها ، حلقه های زنجیری ، گراف مقسوم علیه صفر ، ایده آل های اول تقسیم شده ، قلمرو شبه ارزیابی ، حلقه شبه ارزیابی .

فهرست مندرجات

مقدمه

جبر مجرد، شاخه ای از جبر است که به بررسی ساختارهای جبری گوناگون از جمله حلقه ها می پـردازد. ایـن شاخه از جبر که حوزه پژوهش بسیاری از ریاضی دانان معاصر است، به شاخه های جبر جابجایی و جبـر غیـر جابجایی تقسیم می شود. علاوه بر قضایای بنیادی زیادی که در این زمینه وجود دارند، قضایایی نیز هسـتند کـه حلقه ها را با توجه به خواص عناصر آنها بررسی می کنند. مثلاً خواص مقسوم علیه های صفر، پـوچ تـوان هـا، خودتوان ها و وارون پذیرها. در این پایان نامه خواص حلقه های جابجایی و غیر جابجایی را با توجه به مقسوم علیه های صفر آن بررسی می کنیم. اولین بار در سال ۱۹۹۸ ، بک [1] [۱۸] مفهوم گراف مقسوم علیه صفر را برای یک حلقه جابجایی بیان کرد. بک تمام اعضای یک حلقه جابجایی و یکدار را رئوس گراف در نظر می گرفت و کار اصلی او پیدا کردن شروط لازم و کافی برای متناهی بودن عدد رنگی گراف بود. همچنین با توجه به تعریف او، دو راس x و y مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$. بررسی های مربوط به رنگ آمیزی گرافها توسط اندرسون[2] و نصیر[3] [۲] ادامه یافت. اما از این گراف نتایج جالب به دست نمی آمد و علاوه بر آن خـواص بـدیهی زیـادی داشت. مثلاً همه رئوس آن با صفر مجاور بودند.

سپس اندرسون و لیونیگستون[4] [۷] گراف جدیدی را تعریف کردند که رئوس آن مقسوم علیه های صفر مخالف صفر یک حلقه جابجایی بودند. این گراف به خوبی ویژگی های مقسوم علیه های صفر حلقه های جابجایی را نشان داده و به مطالعه خواص جبری حلقه ها با استفاده از ابزارهای موجود در نظریه گراف می پرداخت.

[1] Beck
[2] Anderson
[3] Naseer
[4] Livingston

منابع اصلی در این پایان نامه عبارتند از:

[۱] Anderson, D. F. and Badawi, A., *On the zero-divisor graph of a ring*, J. Comm. Algebra ۳٦, ۳۰۷۳-۳۰۹۲, (۲۰۰۸).

[۲] Anderson, D. F., Levy, R. and Shapiro, J., *Zero-divisor graphs, von Neumann regular rings, and Boolean Algebras*, J. Pure Appl. Algebra ۱۸۰, ۲۲۱-۲٤۱, (۲۰۰۳).

[۳] Anderson, D. F. and Mulay, S. B., *On the diameter and girth of a zero-divisor graph*, J. Pure Appl. Algebra ۲۱۰, ٥٤۳-٥٥۰, (۲۰۰۷).

در فصل اول این پایان نامه ، تعاریف پایه نظریه حلقه و نظریه گراف را بررسی می کنیم. در فصل دوم گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه های جابجایی بیان شده است که پیش نیازی برای فصول بعدی می باشد. در فصل سوم گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه های غیر جابجایی آورده شده است که در این بخش به بررسی گراف مقسوم علیه صفر حلقه ای پرداختیم که در آن ایده آل های اول حلقه که مشمول در مجموعه مقسوم علیه های صفر حلقه می باشند مرتب خطی باشند و همچنین گراف مقسوم علیه صفر حلقه های زنجیری مورد مطالعه قرار گرفته است. فصل چهارم به گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه ای خاص که در شرایط معینی صدق می کند اختصاص یافته است.

فصل ۱

مقدماتی بر نظریه گراف ها و حلقه ها

۱. ۱ مفاهیم لازم از نظریه گراف ها

۱. ۱. ۱ **تعریف** : گراف G را به صورت (V,E) تعریف می‌کنیم که در آن V یک مجموعه ناتهی از عناصری به نام رئوس و E مجموعه‌ای متناهی از زوج های نامرتب از عناصر V ، موسوم به یال ها است.

V را مجموعه راس و E را مجموعه یال می نامند. به طور شهودی می توان گراف G را با تعدادی نقطه در صفحه که در تناظر یک به یک با اعضای V هستند نشان داد.

برای ترسیم یال ها ، اگر $\{\upsilon , \omega\} \in E$ باشد ، کافی است پاره خطی بین دو نقطه مربوط به υ و ω رسم کنیم.

۱. ۱. ۲ **تعریف** : در گراف G دو راس υ و ω را مجاور گویند هرگاه یالی بین آن دو وجود داشته باشد.

۱. ۱. ۳ **تعریف** : یک مسیر در گراف $G = (V,E)$ بین دو راس υ و ω ، دنباله ای از رئوس $x_i \in V$ به طوری که $x_۱ = \upsilon$ و $x_n = \omega$ و x_i متمایز هستند.

همچنین $\{x_i , x_{i+۱}\}$ یک یال در E و طول مسیر $x_۱ \ldots x_n$ برابر با $n - ۱$ می باشد. اگر $x_۱ = x_n$، آنگاه $x_۱ \ldots x_n$ یک دور به طول $n - ۱$ است.

۱. ۱. ۴ **تعریف** : در گراف G طول کوتاهترین مسیر بین دو راس υ و ω را با $d(\upsilon,\omega)$ نشان می دهیم. اگر بین این دو راس مسیری وجود نداشته باشد، قرار می دهیم $d(\upsilon,\omega) = \infty$. همچنین ،

$$diam\,(G) = \sup \{\, d(\upsilon,\omega) \mid \upsilon , \omega \in V \,\}$$

تعریف می کنیم و آن را قطر گراف G می نامیم.

۱. ۱. ۵ تعریف : طول کوتاهترین دور در گراف G را کمر گراف می گویند و آن را با نماد $gr(\mathrm{G})$ نشان می دهند.

۱. ۱. ۶ تعریف : گراف G را کامل گویند هر گاه هر دو راس متمایز آن مجاور باشند. گراف کامل با n راس را با K_n نشان می‌دهند.

۱. ۱. ۷ تعریف : گراف G را r-بخشی گویند هرگاه بتوان مجموعه راسها را به r مجموعه مجزا افراز کرد به طوری که بین راسهای هیچ یک از این مجموعه ها یالی وجود نداشته باشد. گراف r-بخشی G را کامل گویند هرگاه هر دو راسی که در یک مجموعه نیستند با یکدیگر مجاور باشند.

۱. ۱. ۸ تعریف : گراف $K_{1,s}$ را گراف ستاره می نامند.

۱. ۱. ۹ تعریف : گراف G که بین هر دو راس دلخواه آن یک مسیر وجود دارد گراف همبند نامیده می شود.

۱. ۱. ۱۰ تعریف : گراف G را کاملاً ناهمبند گویند هرگاه هیچ دو راس از G مجاور نباشند.

۱. ۱. ۱۱ تعریف : گرافی که درجه تمام رئوس آن یکی باشد گراف منتظم نامیده می شود.

۱. ۱. ۱۲ **تعریف** : یک زیرگراف از گراف G ، خود یک گراف است که تمام رئوس آن به V(G) تعلق دارند و تمام یالهای آن عضو E(G) هستند.

۱. ۱. ۱۳ **تعریف** : دو گراف $G_۱$ و $G_۲$ را یکریخت گویند هرگاه تناظر یک به یک بین رئوس $G_۱$ و $G_۲$ وجود داشته باشد به طوری که تعداد یالهایی که هر دو راس از $G_۱$ را به هم متصل می کند برابر تعداد یالهایی باشد که رئوس نظیر در $G_۲$ را به هم وصل می کند.

۱. ۲ مفاهیم لازم از نظریه حلقه ها

فرض کنید R یک حلقه دلخواه باشد. تعاریف زیر را برای حلقه R بیان می کنیم:

۱. ۲. ۱ **تعریف** : عنصر $۰ \neq a \in R$ را یک مقسوم علیه صفر حلقه R گوییم هرگاه $۰ \neq b \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $ab = ۰$ یا $ba = ۰$ باشد. مجموعه مقسوم علیه های صفر حلقه R را با نماد Z(R) نشان می دهیم.

۱. ۲. ۲ **تعریف** : حلقه R را حوزه صحیح نامند هرگاه R دارای هیچ مقسوم علیه صفری نباشد.

۱. ۲. ۳ **تعریف** : عنصر $a \in R$ را پوچ توان نامند هرگاه به ازاء عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $a^n = ۰$.

بدیهی است که در حلقه R هر عنصر پوچ توان یک مقسوم علیه صفر است.

۱. ۲. ۴ **تعریف** : عنصر $a \in R$ را خود توان نامند هرگاه $a^۲ = a$ باشد. عنصر خود توان a را غیر بدیهی نامند هرگاه $a \neq ۰$ و $a \neq ۱$ باشد.

اگر R حلقه ای باشد که دارای هیچ مقسوم علیه صفری نباشد، آن گاه تنها عناصر خود توان در R عبارتند از ۰ و ۱. زیرا اگر $e \neq ۰ , ۱$ عضو خود توان دیگری از R باشد یعنی $e^۲ = e$ ، آن گاه $e\,(e-۱) = ۰$ و از آنجا که R هیچ مقسوم علیه صفری ندارد پس $e = ۰$ یا $e = ۱$.

۱. ۲. ۵ **یاد آوری** : اگر عنصر $a \in R$ معکوس پذیر باشد، آن گاه a نمی تواند یک مقسوم علیه صفر باشد.

۱. ۲. ۶ **تعریف** : حلقه R را پوچ می نامند هرگاه

$$R^۲ = \{ab \mid a,b \in R\} = ۰$$

۱. ۲. ۷ **تعریف** : فرض کنید R یک حلقه و I زیر مجموعه ای از R باشد. پوچساز I را با نماد $Ann\,(I)$ نشان می دهند و به صورت

$$Ann\,(I) = \{a \in R \mid ax = ۰ \quad \forall\, x \in I\}$$

تعریف می کنند.

۱. ۲. ۸ تعریف : حلقه یکدار R را حلقه تقسیم نامند هرگاه هر عنصر ناصفر آن یکه باشد.

۱. ۲. ۹ تعریف : حلقه تقسیم تعویض پذیر R را یک میدان می نامند.

۱. ۲. ۱۰ نماد گذاری : برای هر زیر مجموعه X از حلقه R قرار می دهیم :

$$X^* = X \setminus \{۰\}$$

۱. ۲. ۱۱ تعریف : I یک ایده آل پوچ نامیده می شود هرگاه هر عنصر آن پوچ توان باشد و I یک ایده آل پوچ توان نامیده می شود هرگاه به ازاء عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $I^n = \{۰\}$.

۱. ۲. ۱۲ تعریف : ایده آل P از حلقه R را اول می نامند اگر به ازاء هر دو ایده آل A و B از R ، $AB \subseteq P$ ایجاب کند که $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

ایده آل M از حلقه R را ماکسیمال گویند اگر $M \neq R$ و هیچ ایده آل I از R موجود نباشد به طوری که $M \subset I \subset R$. مجموعه ایده آل های ماکسیمال را با نماد $\mathrm{Max}\,(R)$ نشان می دهیم.

۱. ۲. ۱۳ تعریف : حلقه R را موضعی گویند هرگاه R دقیقاً یک ایده آل ماکسیمال داشته باشد.

۱. ۲. ۱۴ **تعریف** : فرض کنید R یک حلقه باشد. رادیکال جیکوبسون حلقه R را که با نماد J(R) نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$J(R) = \bigcap_{m\in Max(R)} m$$

R را نیم ساده گویند اگر $J(R) = \{۰\}$.

۱. ۲. ۱۵ **تعریف** : حلقه $R \neq \{۰\}$ را ساده می نامند هرگاه $\{۰\}$ و R تنها ایده آل های R باشند. هر حلقه تقسیم یک حلقه ساده است.

فصل ۲

گراف مقسوم علیه صفر روی حلقه های جابجایی

۲. ۱ مقدمه

در سرتاسر این بخش حلقه ها جابجایی در نظر گرفته شده اند و به بررسی اندازه، قطر و کمر گراف $\Gamma(R)$ می پردازیم. همچنین، ارتباط میان گراف و یکریختی حلقه را بیان می کنیم. در حقیقت، این فصل مقدمه ای برای فصول بعدی خواهد بود.

۲. ۲ تعاریف و مقدمات اولیه

۲. ۲. ۱ تعریف: فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار باشد و فرض کنید $Z(R)$ مجموعه مقسوم‌علیه‌های صفر حلقه R باشد. گراف مقسوم علیه صفر R که با $\Gamma(R)$ نشان داده می شود گرافی است غیر جهتدار که رئوسش $Z(R)^* = Z(R) \setminus \{۰\}$ (مجموعه مقسوم علیه های صفر غیر صفر حلقه R) است. به ازاء هر دو راس مجزای $x,y \in Z(R)^*$ این دو راس مجاورند اگر و تنها اگر $xy = ۰$.

۲. ۲. ۲ قضیه : فرض کنیم R یک حلقه جابجایی باشد. آن گاه $\Gamma(R)$ متناهی است اگر و تنها اگر R متناهی یا حوزه صحیح باشد. به ویژه اگر $۱ \leq |\Gamma(R)| < \infty$ ، آن گاه R متناهی بوده و میدان نمی باشد.

برهان . ($\Longleftarrow$) فرض کنید $\Gamma(R)\ (= Z(R)^*)$ ناتهی و متناهی باشد. آن گاه $۰ \neq x,y \in R$ وجود دارند به طوری که $xy = ۰$. قرار می دهیم $I = Ann\ (x)$. آن گاه $I \subset Z(R)$ یک ایده آل متناهی از R است پس به

ازای هر $r \in \mathrm{R}$ داریم$ry \in \mathrm{I}$. فرض می کنیم (فرض خلف) R نامتناهی باشد آن گاه $i \in \mathrm{I}$ موجود است به طوری که مجموعه $J = \{r \in \mathrm{R} \mid ry = i\}$ نامتناهی است. حال برای هر $r\,,\, s \in J$ داریم :

$(r - s)\, y = ۰$. لذا $Ann\,(y) \subset \mathrm{Z(R)}$ نامتناهی است که در تناقض با متناهی بودن $\Gamma(\mathrm{R})$ می باشد، بنابراین R متناهی است.

($\Longleftarrow$) اگر R متناهی باشد واضح است که مجموعه مقسوم علیه های صفر R نیز متناهی و در نتیجه $\Gamma(\mathrm{R})$ نیز متناهی خواهد بود. اگر R حوزه صحیح باشد، آن گاه فاقد مقسوم علیه صفر مخالف صفر بوده و در نتیجه گراف متناظر با آن تهی است. □

۲. ۲. ۳ قضیه : فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. آن گاه $\Gamma(\mathrm{R})$ همبند است و $diam\,(\Gamma(\mathrm{R})) \leq ۳$.

برهان . فرض کنید $x,y \in \mathrm{Z(R)}^*$ مجزا باشند. اگر $xy = ۰$ ، آن گاه $\mathrm{d}(x,y) = ۱$. لذا فرض کنید $xy \neq ۰$.

اگر $x^۲ = y^۲ = ۰$ ، آن گاه $x - xy - y$ مسیری از x به y به طول ۲ می باشد، پس $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. اگر $x^۲ = ۰$ و $y^۲ \neq ۰$ ، آن گاه $b \in \mathrm{Z(R)}^* \setminus \{x,y\}$ وجود دارد به طوری که $by = ۰$. در این حالت، اگر $bx = ۰$ ، آن گاه $x - b - y$ مسیری از x به y به طول ۲ می باشد، پس $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. اگر $bx \neq ۰$ ، آن گاه $x - bx - y$ مسیری از x به y به طول ۲ می باشد، پس $\mathrm{d}(x,y) = ۲$. اگر $x^۲ \neq ۰$ و $y^۲ = ۰$ ، آن گاه به نتایجی مشابه حالت قبل می‌رسیم. حال فرض می کنیم xy و $x^۲$ و $y^۲$ همگی مخالف صفر باشند.

پس $a,b \in \mathrm{Z(R)}^* \setminus \{x,y\}$ وجود دارند به طوری که $ax = by = ۰$. اگر $a = b$ ، آن گاه $x - a - y$ مسیری به طول ۲ است. لذا فرض کنید $a \neq b$. اگر $ab = ۰$ آن گاه $x - a - b - y$ مسیری به طول ۳ است،

پس $d(x,y) \leq ۳$. اگر $ab \neq ۰$ ، آن گاه $x - ab - y$ مسیری به طول ۲ است، پس $d(x,y) = ۲$. در نتیجه $d(x,y) \leq ۳$ و لذا $diam\,(\Gamma(R)) \leq ۳$. □

۲. ۳ ارتباط گراف و یکریختی حلقه

۲. ۳. ۱ قضیه : فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. آن گاه راسی از $\Gamma(R)$ موجود است که با تمام رئوس $\Gamma(R)$ مجاور است اگر و تنها اگر $R \cong Z_۲ \times A$ که A یک حوزه صحیح است یا اینکه $Z(R)$ یک ایده آل پوچساز باشد (و بنابراین اول است) .

برهان . ($\Longrightarrow$) فرض کنید $a \in Z(R)^*$. اگر $R \cong Z_۲ \times A$ که A حوزه صحیح است، آن گاه به ازاء هر $(x,y) \in Z_۲ \times A$ داریم $(x,y)\,(۱,۰) = ۰$. یعنی $(۱,۰)$ راسی است که مجاور به همه رئوس دیگر می باشد.

در حالت دوم، اگر $(x \in R)$ $\quad Z(R) = Ann\,(x)$ ، آن گاه x مجاور به هر راس گراف است.

($\Longleftarrow$) چون a راسی است که مجاور به همه رئوس گراف است، داریم:

$$Z(R) = Ann\,(a) \cup \{a\}$$

یعنی $Ann\,(a)$ با افزودن عضو a به مجموعه مقسوم علیه های صفر تبدیل می شود.

اگر $a^۲ = ۰$ باشد، آن گاه $a \in Ann\,(a)$ و در نتیجه $Ann\,(a) = Z(a)$ یک ایده آل اول از R است.

اگر $a^۲ \neq ۰$ باشد، آن گاه $a^۲ = a$ است زیرا در غیر این صورت $a^۲$ راسی از $\Gamma(R)$ بوده که طبق فرض قضیه مجاور به a است. پس $aa^۲ = ۰$. حال چون $Z(R) \setminus \{a\} \subseteq Ann\,(a)$ ، پس $Ann\,(a)$ در بین همه

ایده آل ها که شامل a^2 هستند ماکسیمال است و در نتیجه، $Ann\ (a)$ اول است. از آنجا که $a^2 \in Ann\ (a)$ ، نتیجه می گیریم $a \in Ann\ (a)$ و لذا $a^2 = 0$ که تناقض است. بنابراین باید $a^2 = a$ باشد. لذا

$$R = Ra \oplus R\ (1 - a)$$

ادعا می کنیم $Ra = \{0,a\}$. زیرا در غیر این صورت $x \in Ra \setminus \{0,a\}$ وجود دارد به طوری که $x = ra\ \ (r \in R)$. حال داریم :

$$x\ (1 - a) = ra\ (1 - a) = ra - ra^2 = 0 \implies x \in Z(R)^*$$

اما از آنجا که $ax = (ra)\ a = ra = x \neq 0$ ، پس x به a متصل نیست که تناقض است. بنابراین $Ra = \{0,a\}$ و در نتیجه $Ra \cong Z_2$. از طرفی $A = R\ (1 - a)$ حوزه صحیح است. چون در غیر این صورت، $0 \neq a_1\ ,\ a_2 \in A$ وجود دارند به طوری که $a_1 a_2 = 0$. چون a راسی است که مجاور به همه رئوس گراف از جمله a_2 است، پس داریم $(a + a_1)\ a_2 = 0$. بنابراین $(a + a_1)$ راسی از گراف است که مجاور به a نیست که تناقض است. لذا $R \cong Z_2 \times A$ که A حوزه صحیح است. □

۲. ۳. ۲ قضیه : فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. آنگاه $\Gamma(R)$ یک گراف کامل است اگر و تنها اگر $R \cong Z_2 \times Z_2$ یا به ازای هر $x,y \in Z(R)$ ، $xy = 0$.

برهان . $(\Longleftarrow)$ بدیهی است .

($\Longleftarrow$) فرض کنید $\Gamma(\mathrm{R})$ کامل باشد، اما $x \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$ وجود داشته باشد به طوری که $x^۲ \neq ۰$. نشان می‌دهیم که $x^۲ = x$. اگر چنین نباشد، آن گاه $x^۳ = x^۲ x = ۰$. بنابراین $x^۲ (x+x^۲) = ۰$ که $x^۲ \neq ۰$، لذا $x+x^۲ \in \mathrm{Z}(\mathrm{R})$. اگر $x+x^۲ = x$، آن گاه $x^۲ = ۰$ که تناقض است.

پس $x+x^۲ \neq x$، لذا

$$x^۲ = x^۲ + x^۳ = x (x+x^۲) = ۰$$

چون $\Gamma(\mathrm{R})$ یک گراف کامل است تناقض می باشد. پس $x^۲ = x$، داریم $\mathrm{R} \cong \mathrm{Z}_۲ \times A$ و لزوماً $A \cong \mathrm{Z}_۲$. □

۲. ۳. ۳ نتیجه : فرض کنید R یک حلقه جابجایی و متناهی باشد. در این صورت $\Gamma(\mathrm{R})$ یک گراف ستاره است اگر R با یکی از حلقه های زیر یکریخت باشد.

(۱) $\mathrm{Z}_۲ [x] / (x^۲)$ یا $\mathrm{Z}_۴$.

(۲) $\mathrm{Z}_۴ [x] / (۲x,x^۲-۲)$ یا $\mathrm{Z}_۲ [x] / (x^۳)$ یا $\mathrm{Z}_۸$.

(۳) $\mathrm{Z}_۳ [x] / (x^۲)$ یا $\mathrm{Z}_۹$.

(۴) A یا $\mathrm{Z}_۲ \times \mathrm{A}$ که A یک میدان نامتناهی می باشد.

۲. ۳. ۴ قضیه : فرض کنید R حلقه ای باشد که بیش از نه عضو داشته و حداقل دو مقسوم علیه صفر داشته باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

(۱) $\Gamma(\mathrm{R})$ شامل دور نمی باشد.

(۲) $\Gamma(\mathrm{R})$ یک گراف ستاره است.

(۳) یا $R \cong Z_2 \times A$ که A یک حوزه صحیح است یا $I = \{0,x\}$ رادیکال ایده آل R بوده، R/I حوزه صحیح و $\mathrm{Ann}\,(x)$ مجموعه مقسوم علیه های صفر R می باشد.

۲. ۳. ۵ قضیه : فرض کنید B , A دو مجموعه با بیش از یک عضو باشد و فرض کنید Γ یک گراف دو بخشی روی B , A باشد. فرض کنید R یک حلقه باشد که $\Gamma = \Gamma(R)$. چنانچه R یک حلقه جابجایی و متناهی باشد، آنگاه $R \cong K \oplus L$ که K و L میدان متناهی با بیش از دو عضو می باشند. چنانچه R نامتناهی باشد، آنگاه R جمع مستقیمی از SوT می باشد که S و T حوزه های صحیح با بیش از دو عضو می باشند. بالعکس، اگر $R \cong S \oplus T$ که S و T حوزه های صحیح با بیش از دو عضو باشند، آنگاه $\Gamma(R)$ یک گراف دو بخشی روی مجموعه های B , A است که B , A بیش از یک عضو دارند.

فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد. برای هر $x\,,\,y \in R$ تعریف می کنیم

$$x \sim y \Leftrightarrow Ann\,(x) = Ann\,(y)$$

به وضوح $\sim$ یک رابطه هم ارزی روی R است و به رابطه هم ارزی روی $\Gamma(R)$ تحدید می شود.

۲. ۳. ۶ قضیه : فرض کنید R یک حلقه جابجایی با حلقه خارج قسمتی کلی $T\,(R)$ باشد. در این صورت گراف های $\Gamma(T(R))$ و $\Gamma(R)$ یکریختند.