بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ی علوم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد در رشته ی
فیزیک (گرایش ذرات بنیادی)

بررسی کامپکتونها و سالیتونهای توپولوژیک

توسط
محمد محمدی

استاد راهنما:
دکتر عزیز الله عزیزی

شهریور ماه ۱۳۸۶

به نام خدا

بررسی کامپکتونها و سالیتونهای توپولوژیک

به وسیلهٔ:

محمد محمدی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشتهٔ:

فیزیک

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه ی عالی

دکترعزیز الله عزیزی، استاد یار فیزیک(رئیس کمیته) ....

دکتر نعمت الله ریاضی، استاد فیزیک ....

دکتر سید محمد زبرجد، استاد یار فیزیک ....

دکتر نادر قهرمانی، استاد فیزیک ....

شهریور ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادر عزیز و فداکارم

سپاسگزاری

حال که در سایه الطاف پروردگار یکتا، تحقیق در مورد این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود واجب می دانم که از زحمات کلیه کسانی که از آغاز تا به امروز، مرا تشویق و یاری نموده اند، کمال تشکر و قدردانی را به عمل آورم.

تقدیر و تشکر خاص خود را، تقدیم استاد علم و اخلاق، جناب آقای دکتر عزیز الله عزیزی می نمایم. بی شک، بدون راهنماییهای ارزشمند و حمایت های همه جانبه ایشان، پیمودن این راه پر مشقت میسر نبود.

همچنین از پدر و مادر عزیزم که مشوق اصلی من در طی این مسیر بوده اند، کمال تشکر را به عمل می آورم. در ضمن از استاد محترم مشاور، جناب آقای دکتر نعمت الله ریاضی و دوستان عزیز هم اتاقیم نهایت تشکر را می نمایم.

چکیده

بررسی کامپکتونها و سالیتونهای توپولوژیک

به وسیله ی:

محمد محمدی

در این رساله ابتدا با ارائهٔ تعریفی کامل و جامع از مفاهیمی همچون جوابهای منفرد و سالیتونها، سعی می کنیم زمینهٔ مساعدی را جهت مطالعهٔ جوابهای سالیتونیِ معادلات غیر خطی فراهم نماییم. در ادامه به بررسی جوابهای منفرد و سالیتونی در نظریهٔ میدانهای کلاسیک با در نظر گرفتن یک چگالی لاگرانژی کلی می پردازیم. مفاهیمی چون قابلیت برخورد (که ناشی از بعضی ملا حظات پدیدهٔ برخورد می باشد) در کنار مفاهیمی چون بار توپولوژیک، شرایط لازمی را معین می سازد که بررسی ما را تنها به نوع خاصی از سیستمها محدود می سازد. با به کار گیری این مفاهیم، در ادامه به بررسی شباهتهای نزدیک این جوابها با ذرات کلاسیک می پردازیم و با تعریف سیستم های سالیتونی به عنوان سیستمهایی که به تمام معنا جوابهای سالیتونی دارند، به بررسی سیستمهای خاصی مانند سیستم ساین گوردون و سیستمهای سینوسی می پردازیم. بیان مفهوم قابلیت برخورد به عنوان شرایط لازم برای داشتن جوابهای سالیتونی، وجود جوابهای کامپکتونی یعنی جوابهایی سالیتونی با پهنای کاملاً محدود را منتفی می داند. بنابراین در این رساله نشان می دهیم که برای چگالی لاگرانژی خاص مورد نظرمان جوابهای کامپکتونی نداریم.

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول: مقدمه ۱

فصل دوم : امواج منفرد و سالیتونی ۴

۲-۱- بررسی مقدماتی امواج ۴
۲-۲- امواج منفرد ۹
۲-۳- امواج سالیتونی ۹
۲-۴- معادلهٔ KdV ۱۲
۲-۵- ساده ترین روش برای بدست آوردن جوابهای منفرد ۱۳

فصل سوم: بررسی جوابهای سالیتونی وکامپکتونی در نظریهٔ میدانهای کلاسیک ۱۶

۳-۱- مقدمه ای در نظریهٔ میدانهای کلاسیک ۱۶
۳-۲-جوابهای منفرد و سالیتونی در نظریه میدانهای کلاسیک ۱۸
۳-۳- بررسی امواج منفرد در فضای ۱+۱ بعدی ۲۰
۳-۴- بررسی جوابهای سالیتونی در فضای ۱+۱ بعدی با یک میدان اسکالر ۲۹
۳-۴-۱ پتانسیل های غیر دوره ای ۳۰
۳-۴-۲- پتانسیل هایی با شرط $U(\varphi = 0) \neq 0$ ۳۲
۳-۵- سیستم هایی با بیش از یک میدان...... ۳۴
۳-۶- جوابهای توپولوژیک و غیر توپولوژیک و مفهوم بار توپولوژیک ۳۶
۳-۷- جوابهای کامپکتون و بررسی قابلیت وجود جوابهای کامپکتون در فضای ۱+۱ بعدی با یک میدان اسکالر...... ۳۸

فصل چهارم: دستگاه ساین گوردون ۴۳

۴-۲- بررسی معادلهٔ ساین گوردون ۴۳
۴-۳- بررسی خواص سالیتونی معادلهٔ ساین گوردون ۴۵
۴-۳- جواب Doublet معادلهٔ ساین گوردون ۴۷

فصل پنجم: بررسی دستگاه های سالیتونی ۴۹

۵-۱- سیستم سالیتونی ۴۹
۵-۲- سیستم φ^4 دوره‌ای ۴۹
۵-۲-۱- دسته های سالیتونی سیستم φ^4 دوره‌ای ۵۱
۵-۲-۲- برخورد جوابهای مشابه ۵۱
۵-۲-۳- برخورد جوابهای غیر مشابه ۵۴
۵-۳- سیستم $\sin^4$ (سینوس چهار) ۵۸
۵-۴- برخورد جوابهای منفرد سیستم $\sin^4$ و امواج تابشی ۵۹
۵-۵- سیستم های سینوسی ۶۴
۵-۶- سیستم های سالیتونی دیگر ۶۴

فصل ششم: نتایج ۷۰

فهرست شکلها

عنوان | صفحه

شکل ۲-۱ – نمودار های مر بوط به تحول زمانی معادلهٔ غیر خطی.. ۸
شکل ۲-۲- نمودارهای برخورد دو جواب منفرد از معادلهٔ غیر خطی KdV ۱۱

شکل ۳-۱- نمودارهای مربوط به تغییر مرجع یک پتانسیل ۲۲
شکل ۳-۲- نمودار فرضیِ $U(\varphi)$ بر حسب φ ۲۵
شکل ۳-۳- نمودارهای مربوط به حلهای منفردِ استاتیک پتانسیل φ^4 با $x_0 = 0$ ۲۷
شکل ۳-۴- نمودار تغییرات چگالی انرژی جوابهای ۲۷
شکل ۳-۵- شکل جواب استاتیک برای ناحیه ای از شکل ۲۸
شکل ۳-۶- شکل پتانسیلی که ۳ نقطهٔ خلاء دارد و ۲۹
شکل ۳-۷- شکلهای یک کینک وآنتی کینک وحاصل جمع آنها ۳۱
شکل ۳-۸- شکل مورد انتظار بری برخورد دو جواب منفرد ۳۲
شکل ۳-۹- نمودار پتانسیلی که دوره ای است، اما میدان $\varphi = 0$ نقطهٔ خلاء آن نیست ۳۴
شکل ۳-۱۰- شکلهای یک کینک وآنتی کینک و حاصل جمع آنها ۳۴
شکل ۳-۱۱- شکل فرضی از یک کامپکتون که به طور یکسره صفر شده است ۳۹
شکل ۳-۱۲- شکل میدانی مربوط به یک کامپکتون ۳۹
شکل ۳-۱۳- شکل دوره ای یک پتانسیل ناپیوسته در مشتق ۴۰
شکل ۳-۱۴- زنجیره های کینک وآنتی کینک در کنار هم ۴۱

شکل ۵-۱- شکل مربوط به تابع پتانسیل φ^4 برحسب φ ۵۰
شکل ۵-۲- شکلهای مربوط به اثر نیروی دافعهٔ دو کینک با فاصله ای کم ۵۲
شکل ۵-۳- نمودارهای مربوط به برخورد دو جواب مشابه با تکانهٔ نسبی کم ۵۳
شکل ۵-۴- نمودارهای مربوط به برخورد دو جواب مشابه با تکانهٔ نسبی زیاد ۵۳
شکل ۵-۵- شکلهای مربوط به اثر نیروی جاذبهٔیک کینک ویک آنتی کینک ۵۵

شکل ۵-۶- شکل مربوط به یک برخورد کم انرژی از دو جواب منفرد غیر یکسان ۵۶
شکل ۵-۷- شکل مربوط به یک برخورد پر انرژی از دو جواب منفرد غیر یکسان ۵۷
شکل ۵-۸- شکل مربوط به یک برخورد کم انرژی کینک و آنتی کینک ۶۰
شکل ۵-۹- شکل مربوط به برخورد دو موج تابشی ۶۱
شکل ۵-۱۰- شکل مر بوط به برخورد یک موج تابشی با یک جواب منفرد ساکن ۶۲
شکل ۵-۱۱- شکل مربوط به یک برخورد پر انرژیِ کینک و آنتی کینک ۶۳

فصل اول

مقدمه

در بسیاری از شاخه های فیزیک با معادلاتی غیر خطی مواجه می شویم، و این در دست ما نیست، زیرا نمی توانیم انتظار داشته باشیم که طبیعت همیشه به صورت آشنای خطی رفتار کند. در فیزیک به طور نسبتا کاملی با معادلات خطی و خواص آنها آشنا هستیم. اما در مورد معادلات غیر خطی وضع بسیار متفاوت است و عموماً تا الان نتوانسته ایم روشی کامل و جامع در مورد خواص و جوابهای این معادلات پیدا کنیم. به عنوان مثال معادلهٔ حاکم بر امواج آب، غیر خطی می باشد اما به دلیل پیچیده بودن این معادله تا حالا بررسی نشده اند.

در زمینهٔ معادلات غیرخطی و جوابهای آنها مفاهیمی چون جوابهای منفرد و سالیتون، از اهمیت فیزیکی خاصی برخوردارند و در بسیاری از شاخه های فیزیکی همچون ذرات بنیادی و مادهٔ چگال کاربرد دارند.

اولین بار آقای اسکات راسل[1] با مشاهدهٔ موجی که در اثر ایست ناگهانی یک قایق در یک کانال آب بوجود آمده بود، متوجه شد که این موج تا مسافت طولانی بدون اختلال حرکت می کند. او این مشاهده را به انجمن علمی بریتانیا گزارش داد و این اولین تجربهٔ فیزیکی از امواجی بود که بدون اختلال با سرعت ثابت حرکت می کردند. امروزه در بسیاری از مقالات و کتابها چنین موجی را یک موج سالیتونی[2] می نامند. سالیتون ها جوابهای جایگزیده و خاصی از معادلات غیر خطی هستند که بدون تغییر شکل با سرعت ثابت حرکت می کنند.

در کنار جوابهای شناخته شدهٔ سالیتونی، مفهوم دیگری تحت عنوان جوابهای منفرد[3] وجود دارد. جوابهای منفرد عمومیت بیشتری نسبت به جوابهای سالیتونی دارند و تنها خاص معادلات موج غیر خطی نمی باشند. جوابهای منفرد، جوابهای خاصی از معادلات موج می باشند که با سرعت ثابتی حرکت می کنند و شکل آنها با

[1] -J. Scoot Russel
[2] -Soliton
[3] -Solitary

گذشت زمان تغییر نمی کند. بنابراین یک جواب منفرد جایگزیده از معادلات غیر خطی را یک جواب سالیتونی می نامیم. خیلی از افراد مفهوم سالیتون و جوابهای منفرد را معادل می گیرند و این خود ناشی از عدم وجود تعریفی کامل و جامع در رابطه با خواص اینگونه جوابها می باشد. اِشکال اساسی در تعریف بیان شده برای سالیتونها، عدم وجود رابطهٔ دقیق مفهوم سالیتون با پدیدهٔ برخورد می باشد. لذا در این رساله سعی شده که با ارائهٔ مفاهیمی همچون دسته های سالیتونی و خاصیت سالیتونی بعضی از اشکالات را در تعریف اولیهٔ سالیتونها مرتفع سازیم.

امروزه پیدا کردن جوابهای سالیتونی به قلمرو نظریه مدرن میدانهای نیز کشیده شده، و پیدا کردن چنین جوابهایی از اهمیت خاصی برخوردار هستند. معروف ترین معادلهٔ موجود در این زمینه که جوابهای سالیتونی قابل توجهی دارد، معادله ساین گوردن[1] می باشد. جوابهای کامپکتون[2] نیز که مورد مطالعه ما هستند نوع خاصی از سالیتونها می باشند که دارای پهنای محدود و بدون دنباله اند. بررسی ما در این زمینه به فضای ۱+۱ بعدی با یک چگالی لاگرانژی خاص محدود می شود. نشان خواهیم داد که برای این چگالی لاگرانژی خاص جواب کامپکتون نخواهیم داشت. اما بررسی ما تنها به بررسی کامپکتونها محدود نمی شود و سعی می کنیم طرحی جامع و کامل از شرایط لازم برای پیدا کردن جوابهای منفرد و سالیتونی پیدا کنیم.

در این زمینه مفهوم جوابهای منفرد و سالیتونی را تا اندازه ای تغییر می دهیم. طبع فیزیکی ما برای بیان جوابهای منفرد به عنوان معادلی برای ذرات مادی و توجه به پدیدهٔ برخورد، زمینه ساز ایجاد مفهومی تحت عنوان قابلیت برخورد می شود. مفهوم قابلیت برخورد شرایط لازمی را وضع می کند که بررسی ما را برای پیدا کردن جوابهای منفرد و دسته های سالیتونی به نوع خاصی از سیستمها محدود می کند. در این رابطه با بررسی سیستمهای مختلف به شباهتهای بیشتری بین جوابهای منفرد و مفهوم ذرات مادی می رسیم.

رعایت قوانین نسبیتی مثل قانون جرم و انرژی اینشتین و انقباض لورنتس به همراه رعایت اصول بقای اندازه حرکت و انرژی در برخوردها، برای جوابهای منفرد اینگونه از سیستمها، همگی مشوق ما جهت ایجاد نوعی نگاه فیزیکی به این جوابها می باشد. در بررسی های دقیقتر با ایجاد مفهومی به نام بار توپولوژیک[3] برای جوابهای منفرد، تفکیکی بین دو نوع از جوابها صورت می گیرد. خواص این تفکیک دقیقاً معادل با خواص تفکیک ذرات مادی بر اساس بار الکتریکی آنها می باشد. ازجمله

[1] -Sine-Gordon
[2] -Compacton
[3] -Topological charge

خــواص بــار توپولوژیــک پایســتگی آن در برخوردهــا مــی باشــد. بنــابراین مفهــوم بــار توپولوژیک شباهت خیلی خوبی با بار الکتریکی دارد.

تفکیـک جوابهـای منفـرد براسـاس بـار توپولوژیـک و مطالعـهٔ برخـورد جوابهـا، بـر اسـاس این نوع از تفکیـک، بـرای سیسـتم هـایی معـروف بـه سیسـتم هـای سینوسـی بسـیار جالـب مـی باشـد. در اینگونـه از سیسـتمها، برخـورد دو جـواب غیـر مشـابه، امـواجی را تولیـد مـی کند که با سرعتی برابر با سرعت نـور دارنـد. مـا ایـن امـواج را امـواج تابشـی مـی نـامیم. ایـن امواج از همدیگر عبور می کننـد و در برخـورد بـا سـایر جوابهـای منفـرد شـبیه برخـورد نـور با اجسام مادی رفتـار مـی کننـد، یعنـی اینکـه مقـداری از آن مـنعکس مـی شـود و مقـداری عبور می کند.

بررسی سیستم هـای گونـاگون همگـی نشـان دهنـدهٔ نـوعی نیـروی جاذبـه بـین جوابهـای غیر هم نام و نیرویی دافعه بین جوابهای هـم نـام متناسـب بـا فاصـلهٔ آنهـا از هـم مـی باشـد. لذا وجود این نیروها و اثـر آنهـا کـه متناسـب بـا نـوع بارهـای جوابهـا مـی باشـد، همگـی در توصیف جوابهای منفرد به عنوان معادلی برای ذرات مادی مساعدت می کنند.

در فصـل اول ایـن مقالـه، بـه بیـان کلـی مفـاهیمی همچـون جوابهـای سـالیتونی و منفـرد خواهیم پرداخت و سپس بـا بررسـی بعضـی از اشـکالات در تعریـف ایـن مفـاهیم، سـعی مـی کنـیم تعریفـی کامـل و جـامع را متناسـب بـا ایـن اشـکالات بیـان کنـیم. در فصـل دوم، بـه بررسـی جوابهـای سـالیتونی و منفـرد در زمینـهٔ میـدانهای کلاسـیکی مـی پـردازیم. نتـایج کلی فصل دوم شرایطی را معرفـی مـی کنـد کـه بررسـی مـا را در ایـن زمینـه تنهـا بـه نـوع خاصـی از سیسـتمها محـدود مـی کنـد. معروفتـرین سیسـتم شـناخته شـده ای کـه ارضـاء کنندهٔ تمـامی ایـن شـرایط اسـت، سیسـتم سـاین گـوردون مـی باشـد. لـذا بررسـی سیسـتم ساین گوردون را به عنـوان یـک سیسـتم خـاص، بـه تنهـایی در فصـل سـوم انجـام داده ایـم. در فصل چهارم به بررسـی سـایر سیسـتم هـایی کـه شـبیه سیسـتم سـاین گـوردون باشـند، می پردازیم. در این فصل به نتـایج جالـب و در خـور توجـه ای مـی رسـیم کـه زمینـهٔ خـوب و امیدوار کننده ای را جهت مطالعات بعدی آماده می سازد.

فصل ۲

امواج منفرد و سالیتونی

۲-۱ بررسی مقدماتی امواج

بسیاری از پدیده های فیزیکی توسط معادلاتِ دیفرانسیلی بیان می شوند که به آنها اصطلاحاً معادلهٔ موج گفته می شود. لفظ معادلهٔ موج، عام است و هر محیطی متناسب با شرایط خاص خود می تواند یک معادلهٔ موج خاص خود داشته باشد. اما منظور از معادلهٔ موج، معادلهٔ دیفرانسیل جزئی بر حسب مکان و زمان برای یک کمیت خاص می باشد. این کمیت مثلاً می تواند دامنه موج ایجاد شده در یک ریسمان یا دامنه امواج روی سطح آب یا اندازه میدان الکتریکی و ... باشد. البته معادلهٔ دیفرانسیل می تواند شامل یک یا دو یا سه بعد مکانی باشد و این بستگی به شرایط خاص محیطی مورد بررسی ما دارد. به عنوان مثال، در بررسی امواج عرضی یک ریسمان؛ تنها یک بعد مکانی در معادلهٔ دیفرانسیل موج تأثیر دارد؛ در حالی که در بررسی امواج دایره ای ایجاد شده بر روی سطح آب، دو بعد مکانی دخیل هستند. ساده ترین معادلهٔ موج شناخته شده که هر دانشجوی فیزیک با آن آشنایی دارد معادله موج درون یک ریسمان می باشد

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (۱-۲)$$

که با استفاده از نماد های زیر

$$\frac{\partial u}{\partial t} \to u_t \ , \ \frac{\partial u}{\partial x} \to u_x \qquad (۲-۲)$$

به صورت زیر نوشته می شود:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad (۳-۲)$$

در این معادله دیفرانسیل، c سرعت انتشار موج و u دامنه موج است. این معادلهٔ موج، یک حل ساده و مشهور بر حسب دو متغیر $x \pm ct$ خواهد داشت.

$$u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \qquad (۴-۲)$$

در این رابطه f و g هر تابع دلخواه و خوش رفتاری می توانند باشند. با داشتن دو شرط اولیه $u(x,0)$ و $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$ و دو شرط مرزی می توان جواب کلی را به فرم (۲-۴) بدست آورد.

با توجه به رابطه (۲-۴) یکی از امواج با سرعت c به سمت راست و دیگری با سرعت c به سمت چپ حرکت می کند. اما این امواج هیچ گاه با هم برهم کنش ندارند و بعد از برخورد عیناً ظاهر می شوند به گونه ای که به نظر می رسد هیچ گاه همدیگر را احساس نکرده اند. این خاصیت از خطی بودن معادلهٔ دیفرانسیل نشأت می گیرد. به طور کلی برای هر معادلهٔ دیفرانسیل خطی، همواره حاصل جمع جوابهای آن نیز جواب می باشد. نکته دیگر در بررسی این معادلهٔ دیفرانسیل جزئی اینست که، جوابهای آن بدون تغییر شکل با سرعت ثابت حرکت می کنند. در حقیقت در این رساله همیشه دنبال جوابهایی هستیم که چنین خاصیتی را از خود نشان دهند.

نکته قابل توجه این است که بررسی معادله دیفرانسیل (۲-۳) را می توان به بررسی دو معادله دیفرانسیل جزئی زیر موکول کرد:

$$u_t + cu_x = 0 \qquad (۲-۵)$$

$$u_t - cu_x = 0 \qquad (۲-۶)$$

معادلهٔ (۲-۵) جوابی به فرم $u(x,t) = f(x-ct)$ و معادلهٔ (۲-۶) جوابی به فرم $u(x,t) = f(x+ct)$ خواهد داشت. با ترکیب این معادلات به فرم زیر عملاً خواهیم داشت:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \mp c\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} \pm c\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad (۲-۷)$$

لذا نوشتن جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیل (۲-۳) به فرم رابطه (۲-۴) قابل توجیه است.

همیشه معادلات موج محیط های فیزیکی به سادگی روابط اخیر نیستند و ممکن است محیط فیزیکی واقعی باعث اضافه شدن یک جملهٔ پراکنده ساز (dispersive) یا اتلافی(dissipative) و یا یک ترم غیر خطی (non linear) به معادلهٔ موج محیط شود. به عنوان مثالی ساده از یک معادلهٔ موج پراکنده ساز می توان معادلهٔ موجِ دیفرانسیلی زیر را در نظر بگیریم:

$$u_t + u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (۲-۸)$$

عامل پراکنده ساز جملهٔ u_{xxx} می باشد. با جایگذاری یک جواب نوسانی (harmonic) به فرم $u(x,t) = e^{i(kx-\omega t)}$ در معادلهٔ دیفرانسیل می توان به رابطه ای به نام رابطهٔ پراکندگی (dispersion relation) رسید. این رابطه وابستگی ω را بر حسب k بیان می کند:

$$c(k) = \frac{\omega(k)}{k} = 1 - k^2 \qquad (۲-۹)$$

به ازای هر k خاص (عدد موج خاص) یک سرعت خاص وجود دارد. پس امواج خاصِ نوسانی، با عدد های موج متفاوت، با سرعتهای متفاوت حرکت می کننـد. اگـر در $t = 0$ جـوابی بـه فـرم $u(x,0) = e^{-ikx}$ داشته باشیم آنگاه در لحظات بعد جـواب کلـی وابسـته بـه زمـان بـه فـرم $u(x,t) = e^{-i(kx-\omega t)}$ خواهد بود. حال به طور عـام فـرض کنیـد کـه در $t = 0$ ، $u(x,0)$ را داشته باشیم، یعنی:

$$u(x,t=0) = f(x) \tag{۱۰-۲}$$

با توجه به اینکه مجموعهٔ e^{-ikx} ها یک مجموعه کامل را تشکیل می دهند، که هر تابع خوش رفتاری را می توان بر حسب آنها بسط داد، لذا می توان $f(x)$ را بر حسب e^{-ikx} ها بسط داد. به این بسط اصطلاحاً بسط فوریه می گوییم.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{ikx} dk \tag{۱۱-۲}$$

از آنجایی که معادلهٔ دیفرانسیل ما یک معادله دیفرانسیل خطی است لذا ویـژه جوابهـای e^{-ikx} که ترکیب آنها فرم تابع $f(x)$ را تشکیل داده اند مستقل از همدیگر تحول می یابند به عبارتی

$$e^{ikx} \to e^{i(kx-\omega(k)t)}$$

با داشتن شرط اولیهٔ (۲-۱۰)، فرم $u(x,t)$ به عنوان یک جواب از معادلهٔ موج به صورت زیر خواهد بود:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-i(kx-\omega t)} dk \tag{۱۲-۲}$$

هر موج جایگزیده از تعداد زیادی ریز موج نوسانی e^{-ikx} تشکیل شده اسـت. بنـابراین اگـر در ابتدا ما یک موج جایگزیده داشته باشیم، به دلیل خطی بودن معادلهٔ موج، هر یک از ایـن ریـز موجها هویتی مستقل از هم داشته و با یک سـرعت، خـاصِ خـود ($c(k) = 1 - k^2$) حرکـت می کنند، لذا شکل اولیه $f(x)$ ثابت نخواهد ماند و با گذشت زمان موج جایگزیده ما پهـن تـر می شود و بهم می ریزد. این خاصیت مهم و اساسی امواج پراکنده ساز می باشد، که شکل موج اولیه و جایگزیده آنها پهن تر می شود. سرعت بیان شده برای هر ریـز مـوج (رابطـهٔ (۲-۹)) را سرعت فاز می نامیم (Phase velocity). می تـوانیم سـرعت دیگـری را بـه نـام سـرعت گـروه (group velocity) به فرم زیر تعریف کنیم:

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2 \tag{۱۳-۲}$$

این سرعت، سرعت بسته موج (wave packet) است و تعبیر فیزیکی آن در اغلب اوقات به سرعت انتشار انرژی نسبت داده می شود. برای بسیاری از امواج (نه همه آنها) همواره سرعت گروه کمتر از سرعت فاز است.

$$c_g \leq c$$

اگر به جای جملهٔ u_{xxx} جملهٔ $-u_{xx}$ را در معادله دیفرانسیل (۱-۸) بگذاریم، آنگاه یک معادلهٔ موج اتلافی (dissipation) خواهیم داشت

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \qquad (۱۴-۲)$$

مانند مورد قبل با جایگذاری فرم نوسانی $e^{-i(kx-\omega t)}$ در این معادله، به رابطه زیر می رسیم

$$\omega = k - ik^2 \qquad (۱۵-۲)$$

و در پی آن

$$u(x,t) = \exp\left(-k^2 t + ik(x-t)\right) \qquad (۱۶-۲)$$

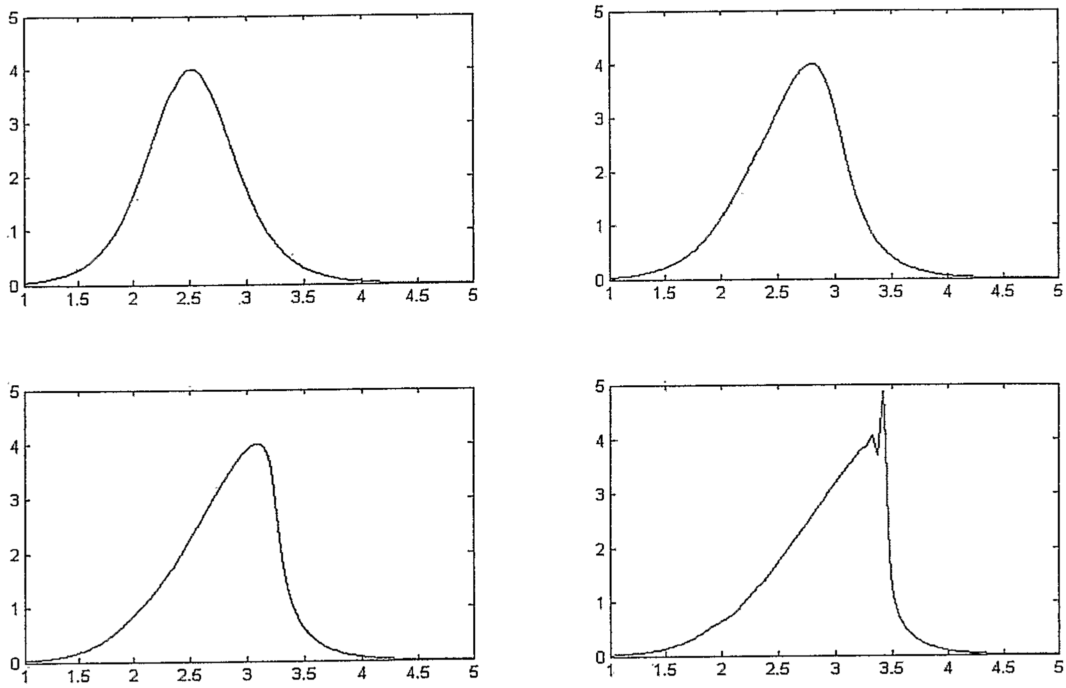
حل معادلهٔ موج (۲-۱۴) می باشد. اما این جواب، معادلهٔ موجی را نشان می دهد که برای تمامی مقادیر k با سرعت واحد حرکت می کند ولی به صورت نمایی نزول می کند. هر چه اندازه k بیشتر باشد سرعت نزول دامنه (اتلاف موج) بیشتراست. (البته باید توجه داشت که علامت جملهٔ u_{xx} نیز مهم است).

درنهایت می توانیم معادلهٔ امواجی را داشته باشیم که از ترکیب جملاتی با تعداد مشتقات فرد و زوج با علامت مناسب تشیکل یافته باشند. در اینصورت فرم حل نوسانی هم خاصیت اتلافی و هم خاصیت پراکنده ساز را با هم دارد.

بررسی معادلات غیر خطی به سادگی بررسی معادلات خطی نیست. مهمترین خصوصیت امواج خطی این است که حاصل جمع جوابها خود نیز جواب جدیدی است، اما در مورد امواج غیرخطی وضعیت کاملاً متفاوت است و نمی توان در حالت کلی چنین حکمی را پذیرفت. برای مثال معادلهٔ موجی به فرم زیر را در نظربگیرید

$$u_t + (1+u)u_x = 0 \qquad (۱۷-۲)$$

این معادله ساده ترین معادلهٔ موج غیر خطی است که می توان در نظر گرفت (عامل غیر خطی uu_x می باشد). در مقایسه با معادلهٔ خطی(۲-۵) می توان به طور صوری گفت، معادلهٔ موجی را داریم که سرعت انتشار آن $u + 1$ می باشد. به عبارتی دیگر می خواهیم بدانیم که آیا تابع



۲-۱ نمودار های مربوط به تحول زمانی معادلهٔ غیر خطی(۲-۱۷) با یک تابع اولیه دلخواه

$$u(x,t) = f\{x-(1+u)t\} \qquad (۲\text{-}۱۸)$$

جواب معادلهٔ موج (۲-۱۷) می باشد یا نه؟ با جایگذاری این حدس در معادلهٔ موج، می توان نشان داد که معادلهٔ (۲-۱۸) کلی ترین حل معادلهٔ موج (۲-۱۷) است و در آن f هر تابع دلخواه خوش رفتاری می تواند باشد. نکته قابل تأمل در این حل کلی آنست که سرعت انتشار به دامنه وابسته است. لذا در صورتی که تابع موج اولیهٔ ما $u(x,t=0)=f(x)$ باشد، آنگاه با گذشت زمان نقاطی که دامنه بیشتر دارند با سرعت بیشتر حرکت می کنند و این خود باعث می شود که شکل تابع موج با گذشت زمان نسبت به شکل اولیه یعنی $f(x)$ تیزتر و تیزتر شود. شکل های ۲-۱ این مطلب را به خوبی نشان می دهند.

نتیجه مهم اینست که جمله غیر خطیِ uu_x بر خلاف جمله پراکنده ساز u_{xxx} باعث تیزتر شدن شکل اولیه می شود[۱]. لذا بررسی ماهیت جملات غیر خطی در معادلات دیفرانسیل جالب به نظر می رسد زیرا قرار داشتن یک جمله غیر خطی که باعث تیزتر شدن شکل اولیه می شود در کنار یک جمله پراکنده ساز که باعث پهن شدگی شکل اولیه می شود، ممکن است جواب خاصی را به ما بدهد که در آن اثر این دو جمله تعدیل شده باشد و لذا شکل این جواب با گذشت زمان ثابت بماند و با سرعت ثابت حرکت کند. به این جواب خاص از این معادلهٔ دیفرانسیل ترکیبی اصطلاحاً موج منفرد (Solitary wave) گفته می شود. هدف اصلی ما در این رساله در وهله اول پیدا کردن و بررسی جوابهای منفرد می باشد.

۲-۲ امواج منفرد

امواج منفرد جوابهای خاصی از معادلات موج می باشند که بدون تغییر شکل با سرعت ثابت حرکت می کنند. مثلاً جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل بررسی شدهٔ (۲-۵) و (۲-۶) جوابهای منفرد هستند. به صورت ریاضی موجی را منفرد (Solitry) می گوییم که به فرم زیر نوشته شود.

$$u(x,t) = f(x - ct) \tag{۱۹-۲}$$

c سرعت موج منفرد می باشد. اما لفظ موج منفرد بیشتر به جوابهای خاص و منفردِ معادلات غیر خطی نسبت داده می شود. اولین بار آقای راسل متوجه شد که امواج ایجاد شده در اثر حرکت یک قایق درون یک کانال تا مسافتهای طولانی بدون اینکه شکل آنها تغییر کند حرکت می کند. او آزمایشهای دیگری را در این رابطه انجام داد و متوجه شد که سرعت این امواج منفرد ایجاد شده در آب به عمق آب ساکن در محیط (h) و دامنهٔ موج منفرد (a) بستگی دارد لذا رابطهٔ زیر را برای مجذور سرعت این امواج منفرد بدست آورد[۱]:

$$c^2 = g(h + a) \tag{۲۰-۲}$$

در این رابطه g ثابت گرانش است. وابستگی سرعت موج منفرد غیر خطی به دامنهٔ a از خصوصیات عام امواج منفرد غیر خطی می باشد. یعنی موج با دامنه بزرگتر با سرعت بیشتر حرکت می کند. معادلات امواج آب معادلاتی غیر خطی هستند و علی رغم سادگی مشاهده و تجربه فیزیکی فراوان، در کتب مقدماتی از آن بحث نمی شود. باید توجه نمود که در مورد امواج منفرد قید جایگزیده (localised) بودن را نداریم. حتی یک جواب منفرد می تواند به صورت دوره ای (Periodic) باشد [۱].

۲-۳ امواج سالیتونی

قبل از تعریف امواج سالیتونی، برای آمادگی بیشتر، شکل های برخورد بین امواج منفرد یک معادله غیر خطی را بررسی می کنیم.

جوابهایی به فرم:

$$f(x - ct) = -\frac{1}{2} c \operatorname{sech}\left\{\frac{1}{2} c^{\frac{1}{2}} (x - ct - x_0)\right\} \tag{۲۱-۲}$$

جوابهای خاص منفرد معادله ای غیر خطی معروف به معادلهٔ KdV می باشند[۱]. در این معادله c (سرعت موج منفرد) یک ثابت دلخواه و مثبت است و لذا برای هر c دلخواه یک

جواب منفرد خواهیم داشت. پس در کل ما بی نهایت جواب منفرد خواهیم داشت. همانطور که مشاهده می شود سرعت موج منفرد به دامنه وابسته است، پس امواج با دامنهٔ بیشتر با سرعت بیشتری حرکت می کنند. در این رابطه x_0 نقطه دلخواهی است که مکان اولیه f را نشان می دهد.

حال حاصل جمع دو جواب با دامنه های متفاوت (سرعتهای متفاوت) و فازهای متفاوت x_{10} و x_{20} را در لحظهٔ $t=0$ ، به فر م زیر در نظر می گیریم:

$$u(x,t=0) = -\tfrac{1}{2}c_1 \operatorname{sech}^2\left\{\tfrac{1}{2}c_1^{\frac{1}{2}}(x - c_1 t - x_{10})\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}c_2 \operatorname{sech}^2\left\{\tfrac{1}{2}c_2^{\frac{1}{2}}(x - c_2 t - x_{20})\right\} \qquad (۲۲-۲)$$

$$x_{10} - x_{20} \gg 0 \qquad (۲۳-۲)$$

رابطهٔ (۲-۲۳) قیدی است که می بایست به مسئلهٔ برخورد وارد کنیم. در حقیقت با توجه به جایگزیده بودن جوابهای منفرد، شرط (۲-۲۳) به این معناست که در لحظه $t=0$ دو موج منفرد داریم که کاملاً مستقل از هم با سرعتهای $c_1 < c_2$ حرکت می کنند. در اینصورت موج بلندتر با سرعت بیشتری به سمت موج کوچکتر حرکت می کند. بالاخره این امواج به هم می رسند و با هم برخورد می کنند. همانطور که در شکل های ۲-۲ می بینید، برخورد به گونه ای صورت می گیرد که بعد از برخورد موج بلندتر از موج کوچکتر عبور کرده و دوباره امواج منفرد به صورت جداگانه و مستقل در $t \to \infty$ ظاهر می شوند. اما این برخورد، همانطور که در شکل ها دید می شود مانند برخورد امواج خطی نبوده که از اصل برهم نهی امواج پیروی کند، و بعد از برخورد تغییر فازی در امواج منفرد ایجاد شده به گونه ای که در $t \to +\infty$ جواب نهایی به فرم زیر می باشد

$$u(x,t=0) = -\tfrac{1}{2}c_1 \operatorname{sech}^2\left\{\tfrac{1}{2}c_1^{\frac{1}{2}}(x - c_1 t - x_{10} - \delta_1)\right\}$$

$$-\tfrac{1}{2}c_2 \operatorname{sech}^2\left\{\tfrac{1}{2}c_2^{\frac{1}{2}}(x - c_2 t - x_{20} - \delta_2)\right\} \qquad (۲۴-۲)$$

به فرایند برخورد جوابهای منفرد معادلات غیرخطی و ظهور مجدد آنها خاصیت سالیتونی می گوییم. با این تعریف، جوابهای منفرد معادلهٔ KdV نسبت به هم خاصیت سالیتونی دارند. ظاهر شدن فازهای δ_1 وδ_2 ناشی از طبیعت برخورد این امواج منفرد غیر خطی می باشد. بنابراین مکانهایی را که انتظار می رفت که دو موج منفرد به تنهایی با سرعت خاص خود بعد از برخورد در آنجا باشند اکنون تغییر کرده و این ناشی از نوعی برهمکنش بین جوابهای معادلات غیر خطی در مقایسه با برخورد امواج خطی می باشد. با این آمادگی ذهنی به سراغ تعریف جوابهای سالیتونی می رویم.