بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

گسترش‌هایی از مسئله بهینه سازی فرما—توریچلی

استاد راهنما:

دکتر علیرضا امینی هرندی

استاد مشاور:

دکتر حسین منصوری

پژوهشگر:

محبوبه مرادیان فارسانی

مهر ماه ۱۳۹۱

سپاس گزاری ...

خداوند بزرگ را به خاطر الطاف، نعمت‌های بی‌شمار و توفیق ادامه‌ی تحصیل شکرگزارم و بر خود واجب می‌دانم از زحمات و الطاف بندگانش در راه تحقق کوچکترین ثمره دوران تحصیلم قدردانی نمایم.

صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را به استاد گرامی آقای **دکتر علیرضا امینی هرندی** تقدیم نموده، که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در هموار کردن موانع کار یاری کرده است و آنچه که در این پژوهش بدست آوردم بی‌مدد ایشان میسر نبود.

از آقای **دکتر حسین منصوری** که زحمت مشاوره‌ی این پایان نامه را بر عهده گرفتند و من را از نظرات ارزشمندشان بهرمند ساختند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از داوران گرامی خانم **دکتر مریم زنگی آبادی** و آقای **دکتر حمید شایان پور** که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خواهران و برادران عزیزم به پاس عاطفه‌ی سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

با آرزوی موفقیت برای تمام عزیزان
محبوبه مرادیان فارسانی

مهر ماه ۹۱

تقدیم به

پدر بزرگوار و مادر مهربانم

و

استاد گرانقدر دکتر علیرضا امینی هرندی

چکیده

مسئله‌ی فرما—توریچلی[1] یک مسئله‌ی بهینه‌سازی متناظر با یک زیر مجموعه‌ی متناهی $\{x_j\}_{j=1}^{q}$ از $\mathbb{R}^n$ است. هدف یافتن نقطه‌ی $x \in \mathbb{R}^n$ است که تابع $F(x) = \sum_{j=1}^{q} \|x - x_j\|$ را مینیمم نماید. مسئله‌ی فرما—توریچلی وزنی، یا مسئله‌ی استینر—وبر[2] نیز یک مسئله‌ی بهینه‌سازی متناظر با یک زیر مجموعه‌ی متناهی $\{x_j\}_{j=1}^{q}$ از $\mathbb{R}^n$ و یک خانواده‌ی $\{c_j\}_{j=1}^{q}$ از وزن‌های مثبت است. در این مسئله هدف مینیمم کردن تابع $F(x) = \sum_{j=1}^{q} c_j \|x - x_j\|$ روی $\mathbb{R}^n$ است.

در این پایان نامه بسط‌های مختلفی از مسئله‌ی فرما—توریچلی را بررسی می‌کنیم. قضیه‌ی نقطه‌ی مینیمم را بیان می‌کنیم و دو برهان مستقل از هم برای این قضیه ارائه می‌دهیم. سپس مسئله‌ی فرما—توریچلی وزنی را به حالت حجم‌ها گسترش می‌دهیم. به ویژه این مسئله را به حالتی بسط می‌دهیم که نقاط x_j $(1 \leq j \leq q)$ بوسیله‌ی مجموعه‌های به طور آفین[3] مستقل از نقاط $\{x_{j1}, \ldots, x_{jn}\}(1 \leq j \leq q, n \geq 1)$، و فاصله‌ی $\|x - x_j\|$ بوسیله‌ی حجم n—بعدی از n—سیمپلکس $xx_{j1} \ldots x_{jn}$، جایگزین شود.
ما هم چنین این مسئله را در فضاهای نرم‌دار حقیقی $d-$ بعدی (فضاهای مینکوفسکی)، بخصوص برای $d = 2$، بررسی می‌کنیم.
سرانجام یک گسترش از نتیجه‌ی استینر—وبر را با جایگزینی نقاط داده شده بوسیله‌ی یک تعداد متناهی از مجموعه‌های بسته در فضاهای باناخ ارائه می‌دهیم.

کلمات کلیدی

مسئله‌ی فرما—توریچلی، فضاهای مینکوفسکی، مسئله‌ی فرما—توریچلی تعمیم یافته، آنالیز تغییراتی و بهینه‌سازی، تابع مینیمال زمانی، مشتق‌گیری تعمیم یافته.

[1] Fermat-Torricelli
[2] Steiner-Weber
[3] affine

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

$\mathbb{R}$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی
$\mathbb{R}^n$	فضای برداری n تایی‌های مرتب حقیقی (مدل توپولوژیک برای E^n)
$\mathbb{E}^n$	فضای برداری اقلیدسی n بعدی
X	فضای برداری نرم‌دار
X^*	دوگان نرمی X
X^{**}	دوگان دوم X
$\|x\|$	نرم بردار x
B	گوی یکه‌ی فضای برداری
B^*	گوی یکه‌ی فضای دوگان
∂	زیر دیفرانسیل
$\overrightarrow{ab}$	شعاع با مبدأ a گذرنده از b
$\sphericalangle xyz$	زاویه در یک صفحه‌ی مینکوفسکی
$[xy]_d$	قطعه‌ی از x به y
$\overleftrightarrow{ab}$	بردار با ابتدای a و انتهای b
$int(A)$	درون مجموعه‌ی A
$rel(A)$	درون نسبی مجموعه‌ی A
$cl(A)$	بستار مجموعه‌ی A
$bd(A)$	مرز مجموعه‌ی A
$conv(A)$	پوسته‌ی محدب A
$cone(\Omega)$	مخروط ایجاد شده توسط Ω
$aff(A)$	پوسته آفین A
$ft(A)$	مجموعه‌ی نقاط فرما—توریچلی مجموعه‌ی A
$Vol_{m-1}(x_1,\dots,x_m)$	حجم $(m-1)$ بعدی از $(m-1)$— سیمپلکس $x_1,\dots,x_m$
α_j	$(m-1)$—فلت تولید شده در $\mathbb{R}^n$ توسط $\{x_{j1},\dots,x_{jm}\}$
$y_j(x)$	تصویر عمود x بروی α_j

تابع مینیمال زمانی در x با مجموعه‌ی هدف Ω و دینامیک‌های ثابت $\dot{x} \in F$	$T_\Omega^F(x)$
تابع فاصله‌ی استاندارد نقطه‌ی x از مجموعه‌ی Ω	$d(x;\Omega)$
مخروط نرمال Ω در $\bar{x}$	$N(\bar{x};\Omega)$
$\varepsilon-$ زیر دیفرانسیل	$\hat{\partial}_\varepsilon$
پیمانه‌ی مینکوفسکی متناظر با F	ρ_F
تصویر تعمیم یافته از $\bar{x} \notin \Omega$ روی Ω	$\Pi_\Omega^F(\bar{x})$
مجموعه‌ی سطح تکیه‌گاه	C^*
طول قطعه‌ی XY	$\overline{XY}$ و $\lvert XY \rvert$
بردار واحد شروع شده از M و به سمت A_i	$U(MA_i)$
خط X	$\overrightarrow{X}$
طول تصویر بردار v روی خط $\overrightarrow{X}$ با احتساب علامت	$[v]_X$

پیشگفتار

در اوایل قرن هفدهم پیر دی فرما[۴] مسئله‌ی زیر را مطرح کرد:
سه نقطه روی صفحه مفروض هستند نقطه‌ای را بیابید که مجموع فواصل اقلیدسی این نقطه از سه نقطه‌ی مفروض مینیمم باشد. این مسئله اولین بار توسط توریچلی حل شده است و به نام مسئله‌ی فرما—توریچلی معروف است البته این مسئله در علوم مکان یابی به نام مسئله‌ی استینر—وبر نیز شناخته می‌شود. راه حل توریچلی به این صورت است که اگر هیچ یک از زوایای داخلی مثلث تشکیل شده توسط سه نقطه‌ی مفروض بیش‌تر یا مساوی ۱۲۰° نباشند در این صورت نقطه‌ی مینیمم نقطه‌ای داخل مثلث است به طوری که این نقطه از هر ضلع مثلث به زاویه‌ی ۱۲۰° دیده می‌شود در غیر این صورت رأس منفرجه‌ی مثلث نقطه‌ی مینیمم خواهد بود این نقطه اغلب نقطه‌ی فرما—توریچلی نامیده می‌شود. برای حالت‌های مشابه در بعدهای بالاتر به مراجع [۱۶,۲۴] و برای بررسی‌های تاریخی به مرجع [۷] مراجعه کنید.

در قرن نوزدهم ژاکوب استینر[۵] این مسئله را عمیق‌تر بررسی کرد و مسئله را در حالت تعداد نقاط متناهی در صفحه، در نظر گرفت. تعمیم‌های دیگری از این مسئله در سال‌های بعد مطرح و بررسی شد. این مسئله و عناوین وابسته به آن توجه بسیاری از ریاضی‌دانان و دانشمندان علوم کاربردی را به خود جلب کرده است. برای تاریخچه‌ی این مسئله، بسط‌های گوناگون آن، اصلاحات و کاربردهای آن در علوم مکان یابی، آمار و شبکه‌های بهین و ...به مراجع [۵, ۷, ۲۷, ۴۲] مراجعه نمایید. برای روش‌های از نوع نقطه درونی کارا و مسائل مشابه در فضاهای بعد متناهی به مرجع [۲] مراجعه کنید. به ویژه برای الگوریتم ویزفلد[۶]، اصلاحات آن برای مسئله‌ی مینیمم سازی جمع‌های وزنی نرم‌های اقلیدسی (معروف به مسئله‌ی وبر)[۷] به مراجع [۹, ۲۳, ۴۴] مراجعه شود.

در این پایان نامه بسط‌هایی از مسئله‌ی فرما—توریچلی را بررسی می‌کنیم برای این منظور مباحث خود را در پنج فصل به صورت زیر تنظیم کرده‌ایم.
در فصل اول مطالب مقدماتی و مورد نیاز برای سایر فصل‌ها را بیان کرده‌ایم .

[۴] Pierre de Fermat
[۵] Jacob Steiner
[۶] $Weiszfeld's$ algorithm
[۷] $Weber's$ problem

در فصل دوم بسط مسئله‌ی فرما—توریچلی در حالت n نقطه‌ی مفروض در $\mathbb{R}^n$ که روی یک خط راست واقع نشده‌اند، در نظر گرفته شده است و برای قضیه‌ی نقطه‌ی مینیمم دو برهان مستقل ارائه می‌شود.

در فصل سوم این مسئله در فضاها و صفحات نرم‌دار بررسی شده است.

در فصل چهارم بسطی از مسئله‌ی فرما—توریچلی وزن‌دار بررسی شده است.

در فصل پنجم ابزاری از آنالیز تغییراتی و مشتق‌گیری تعمیم یافته را برای بسطی از مسئله‌ی فرما—توریچلی به کار می‌بریم.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل مفاهیم مقدماتی و مورد نیاز در سایر فصل‌ها را بیان می‌کنیم.

۱.۱ چند تعریف و قضیه‌ی مورد نیاز

تعریف ۱.۱.۱ در هندسه‌ی مقدماتی چندگوشه، یک شی هندسی با پهلوهای مسطح است. که به صورت کلی در هر بعدی وجود دارد. برای مثال رأس، یک چندگوشه در صفربعد و یال، چندگوشه در یک بعد و چندضلعی، چندگوشه در دو بعد و چند وجهی، چندگوشه در سه بعد است و . . .به صورت کلی یک چندگوشه در n بعد را یک $n-$چندگوشه می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. گرانیگاه یا مرکز ثقل یک دستگاه از ذرات در فیزیک، یک نقطه‌ی مشخص است که در بسیاری از مسائل سیستم طوری رفتار می‌کند که گویی همه‌ی جرم سیستم در آن نقطه متمرکز است. گرانیگاه فقط تابعی از جای و جرم ذراتی است که سامانه را تشکیل می‌دهند. در صورتی که ذرات سیستم تا حدودی آزادانه در کنار هم باشند، مانند مجموعه‌ی ساچمه‌هایی که از تفنگ ساچمه‌ای شلیک شده، گرانیگاه نقطه‌ای در فضا و بین گلوله‌هاست که ممکن است روی هیچ کدام از آن گلوله‌ها واقع نباشد. گرانیگاه یک جسم همیشه روی مرکز هندسی آن نیست و نقطه‌ی دیگری می‌تواند گرانیگاه جسم باشد. گرانیگاه (R) یک سیستم از ذرات میانگین وزن‌دار از مکان‌های آن ذرات (r_i) است.

$$R = \sum m_i r_i / \sum m_i.$$

قضیه ۳.۱.۱. [۴۴] فرض کنید n نقطه‌ی $A_1, A_2, \ldots, A_n$ در فضا و n عدد مثبت $m_1, m_2, \ldots, m_n$ مفروض باشند. روی نقاط $A_1, A_2, \ldots, A_n$ به ترتیب جرم‌های $m_1, m_2, \ldots, m_n$ را قرار می‌دهیم. اگر G مرکز ثقل این سیستم باشد. آن‌گاه داریم

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{GA_i}^2 < \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{XA_i}^2,$$

که X هر نقطه‌ی متمایز از نقطه‌ی G است.

تعریف ۴.۱.۱ هر زیرفضای M از فضای برداری X محدب است. از این‌رو هر انتقال از یک زیر فضا (یعنی یک مجموعه به شکل $M + \{x\}$) محدب است. چنین مجموعه‌ای یک فلت [۱] نامیده می‌شود. بعد یک فلت بعد زیر فضایی است که این فلت انتقال آن است. هر ابرصفحه در X یک فلت از بعد $d-1$ (X از بعد d است) است. و یک خط یک فلت از بعد یک است.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید X یک فضای برداری باشد. بردار $x \in X$ یک ترکیب خطی از بردارهای $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ است اگر $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_k x_k$ با $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. اگر چنین λ_iهایی با $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots, \lambda_k = 1$ وجود داشته باشد آن‌گاه x یک ترکیب آفین از $x_1, x_2, \ldots, x_n$ است.

تعریف ۶.۱.۱ یک زیر مجموعه‌ی M از X یک مجموعه‌ی آفین نامیده می‌شود اگر $(1-\lambda)x + \lambda y \in M$ برای هر $x, y \in M$ و $\lambda \in \mathbb{R}$. به عبارتی یک مجموعه آفین است اگر شامل تمام ترکیب‌های آفین خود باشد.

تعریف ۷.۱.۱ برای $A \subset X$ مجموعه‌ی تمام ترکیبات آفین از عناصر A را پوسته‌ی آفین A می‌نامیم وبا $aff(A)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر پوسته‌ی آفین A کوچکترین زیرفضای خطی (آفین) شامل A است. یعنی

$$aff(A) := \bigcap \{V \subset X : A \subset V, V \ is \ affine\}.$$

یا

$$aff(A) := \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in N, (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \subset R, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, (x_i)_{1 \le i \le n} \subset A\}.$$

[۱] flat

در تعریف فوق اگر $i = ۱, \ldots, k, ۰ \leq \lambda_i < ۱$، آن‌گاه ترکیب آفین به ترکیب محدب تبدیل می‌شود. و یک مجموعه را محدب گوییم اگر شامل تمام ترکیبات محدب عناصر خود باشد. بنابراین پوسته‌ی محدب یک مجموعه عبارت است از مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب عناصرش، یا به عبارتی اشتراک تمام مجموعه‌های محدب شامل یک مجموعه، پوسته‌ی محدب آن مجموعه است. یعنی کوچکترین مجموعه‌ی محدب شامل یک مجموعه پوسته‌ی محدب آن مجموعه است.

تعریف ۸.۱.۱ نقاط $x_۱, x_۲, \ldots, x_n \in X$ را به طور آفین مستقل گوییم اگر هیچ یک از این نقاط ترکیب آفین نقاط دیگر نباشد. یعنی اگر $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i x_i = ۰$ با $\lambda_i \in \mathbb{R}$ و $\sum_{i=۱}^{k} \lambda_i = ۰$ نتیجه دهد که $\lambda_۱ = \lambda_۲ = \ldots = \lambda_k = ۰$. که این معادل با استقلال خطی بردارهای $x_۲ - x_۱, \ldots, x_k - x_۱$ است.

تعریف ۹.۱.۱ هر نقطه‌ای به صورت

$$x = \theta_۱ x_۱ + \theta_۲ x_۲ \quad \theta_۱ \geq ۰, \theta_۲ \geq ۰.$$

یک ترکیب نامنفی (مخروطی) از $x_۱$ و $x_۲$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱ مجموعه‌ای که شامل تمام ترکیب‌های نامنفی (مخروطی) نقاط خود باشد یک مخروط محدب است.

تعریف ۱۱.۱.۱ برای $A \subset X$، $cone(A)$ مجموعه‌ی تمام ضرایب نامنفی عناصر A است به عبارتی اشتراک تمام مخروط‌های شامل A، همان $cone(A)$ است. یعنی

$$cone(A) := \{\lambda x : \lambda \geq ۰, x \in A\} = \mathbb{R}^{+}.A.$$

یا

$$cone(A) := \bigcap \{C \subset X : A \subset C\}.$$

که در تعریف فوق C یک مخروط است.

فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد و $x \in X$، گردایه‌ی همه‌ی همسایگی‌های x را با N_x نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ اگر X یک فضای توپولوژیک باشد و $S \subset X$ در این صورت مرز S به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$dS = \{x \in X : N \cap A \neq \emptyset, N \cap A^c \neq \emptyset \ \forall \ N \in N_x\}$$

تعریف ۱۳.۱.۱ اجتماع همه‌ی مجموعه‌های باز مشمول در A را درون A می‌گوییم. و با نماد $IntA$ نشان می‌دهیم. به عبارتی بزرگترین مجموعه‌ی باز مشمول در A را درون A گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱ اشتراک تمام مجموعه‌های بسته شامل A را بستار A گوییم. و با $Cl(A)$ نشان می‌دهیم.

یک مجموعه‌ی محدب درون نسبی ناتهی دارد. به عبارت دیگر یک مجموعه‌ی محدب نسبت به کوچکترین مجموعه‌ی آفین شامل آن، درون ناتهی دارد. درون نسبی یک مجموعه‌ی محدب به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ مجموعه‌ی محدب C مفروض است. نقطه‌ی $x \in C$ در درون نسبی C قرار دارد اگر برای هر $\bar{x}, \tilde{x} \in C$، $۱ > \lambda > ۰$ وجود داشته باشد به طوری که $x = \lambda\bar{x} + (۱ - \lambda)\tilde{x}$.
درون نسبی مجموعه‌ی C را با C° نشان می‌دهیم .

تعریف ۱۶.۱.۱ فرض کنید $A \subseteq M$. نقطه‌ی $P \in M$ را یک نقطه‌ی انباشتگی A می‌نامیم در صورتی که هر گوی باز به مرکز P شامل نقطه‌ای از A غیر از P باشد.

قضیه ۱۷.۱.۱. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک باشد. $A \subseteq M$ و $P \in M$. آن‌گاه احکام زیر معادلند.

الف) P یک نقطه‌ی انباشتگی A است.

ب) هر همسایگی P شامل تعدادی نامتناهی نقطه از A است.

ج) دنباله‌ای مانند x_n از نقاط A وجود دارد که همواره $x_n \neq P$ ولی $\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = P$

قضیه ۱۸.۱.۱. [۳۶] **(بولتسانو—وایراشتراس)**: هر زیر مجموعه‌ی نامتناهی و کران‌دار از $\mathbb{R}^k$ دارای حداقل یک نقطه‌ی انباشتگی است.

قضیه ۱.۱.۱۹.[۳۶] فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار پیوسته روی یک فضای متریک فشرده X باشد و

$$M = \sup_{p \in X} f(p) \quad , \quad m = \inf_{p \in X} f(p)$$

آن‌گاه نقاط $p, q \in X$ وجود دارند به طوری که $f(p) = M, f(q) = m$.

قضیه ۱.۱.۲۰.[۳۶] فرض کنید $\{S_n\}$ یکنوا باشد آن‌گاه $\{S_n\}$ همگراست اگر و تنها اگر کران‌دار باشد.

قضیه ۱.۱.۲۱.[۳۹] اگر $f : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی باشد به طوری که

$$\lim_{\|X\| \longrightarrow \infty} f(X) = \infty.$$

آن‌گاه تابع f مینیمم مطلق خود را روی $\mathbb{R}^k$ اختیار می‌کند.

تعریف ۱.۱.۲۲ اگر X یک فضای باناخ (به ۱.۲ مراجعه کنید) باشد آن‌گاه $A \subset X$ را فشرده‌ی دنباله‌ای گوییم اگر هر دنباله از A یک زیردنباله‌ی همگرا داشته باشد که حدش در A است.

قضیه ۱.۱.۲۳.(ابرلین — شمولین)[۲] :[۱۷] یک زیر مجموعه از یک فضای باناخ ضعیف فشرده است اگر و تنها اگر ضعیف فشرده‌ی دنباله‌ای باشد.

تعریف ۱.۱.۲۴ یک مجموعه‌ی دلخواه M مفروض است. مجموعه‌ی بردارهایی که بر همه‌ی عناصر M عمود هستند یک زیر فضاست که بوسیله‌ی $M^\perp$ نشان داده می‌شود. اگر S یک زیر فضا باشد، $S^\perp$ مکمل متعامد S نامیده می‌شود. هر بردار x به طور منحصربفردی می‌تواند به صورت جمع یک بردار از S و یک بردار از $S^\perp$ تجزیه شود. به علاوه، داریم $(S^\perp)^\perp = S$

[۲] Eberlein-Smulian

۲.۱ فضاهای نرم‌دار و فضاهای باناخ

تابع حقیقی $\|\cdot\|$ تعریف شده بر فضای برداری X روی میدان F ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) را یک نرم نامیم اگر در سه خاصیت زیر صدق نماید:

الف) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ ، و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

ب) به ازای هر x و $\alpha \in F$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$.

ج) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

خاصیت (ج) را نامساوی مثلثی می‌نامیم. (X, d) یک فضای متریک است که در آن $d(x,y) := \|x-y\|$. توپولوژی تولید شده توسط d، توپولوژی نرم نامیده می‌شود. فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا فقط یک فضای نرم‌دار می‌نامیم. یک فضای نرم‌دار که (با متر القا شده به وسیله نرم) تام باشد یک فضای باناخ [۳] نام دارد.

فرض کنید X یک فضای باناخ روی میدان F ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) باشد. در این صورت فضای دوگان X برابر با همه‌ی نگاشت‌های خطی پیوسته از X به F است و با X^* آن را نمایش می‌دهند چون F ($\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$) یک فضای باناخ است لذا به سادگی ثابت می‌شود که X^* با نرمی که به صورت زیر تعریف می‌شود یک فضای باناخ است.

$$\|f\| = sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} |f(x)| = sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ x \in X}} f(x).$$

تعریف ۱.۲.۱ یک طول پایی از فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|_X)$ به فضای نرم دار $(Y, \|\cdot\|_Y)$ یک نگاشت T است به طوری که برای هر x_1 و x_2 در X داریم

$$\|x_1 - x_2\|_X = \|Tx_1 - Tx_2\|_Y.$$

به ازای هر فضای برداری نرم‌دار X، تابعک‌های خطی کران‌دار به قدر کافی وجود دارند که نقاط X را جدا می‌سازند. یعنی، به ازای هر جفت از بردارهای متمایز x و y از X، یک تابعک خطی کران‌دار بر X هست که $f(x) \neq f(y)$. این نتیجه (و نتایج بسیار دیگر) بر یک نتیجه‌ی کلاسیک به نام قضیه‌ی هان — باناخ [۴] استوار است که یکی از مفاهیم بنیادی آنالیز می‌باشد. ما در زیر به این قضیه خواهیم پرداخت. نگاشت $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$، که در آن X یک فضای برداری

[۳] Banach
[۴] Hahn - Banach

است، یک نگاشت زیر خطی است اگر از دو خاصیت زیر برخوردار باشد:

الف) به ازای هر $x, y \in X$ ، $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$.

ب) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \geq 0$ ، $p(\alpha x) = \alpha p(x)$.

اصل برهان قضیه‌ی هان — باناخ در لم زیر نهفته است.

لم ۲.۲.۱ [۱] فرض کنیم p یک نگاشت زیرخطی بر فضای برداری X بوده و Y یک زیر فضای برداری X باشد و $x_0 \notin Y$. هرگاه f یک تابعک خطی بر Y باشد به طوری که به ازای هر $x \in Y$، $f(x) \leq p(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه f را می‌توان به یک تابعک خطی g بر زیر فضای برداری Z تولید شده به وسیله‌ی Y و x_0 چنان وسعت داد که به ازای هر $x \in Z$، $g(x) \leq p(x)$ برقرار باشد.

در زیر، قضیه‌ی کلاسیک هان — باناخ ذکر می‌شود. این قضیه قلب آنالیز جدید است و کاربردهای بسیار گسترده‌ای دارد.

قضیه ۳.۲.۱. (هان — باناخ).[۱] فرض کنیم p یک نگاشت زیرخطی بر فضای برداری X بوده و Y یک زیر فضای برداری X باشد. هرگاه f یک تابعک خطی بر Y باشد به طوری که به ازای هر $x \in Y$، $f(x) \leq p(x)$ برقرار باشد، آن‌گاه f را می‌توان به یک تابعک خطی مانند g بر تمام X چنان وسعت داد که به ازای هر $x \in X$، $g(x) \leq p(x)$ برقرار باشد.

دو قضیه‌ی بعد کاربردهایی از قضیه‌ی هان — باناخ‌اند. اولین نتیجه به ما می‌گوید که یک تابعک خطی پیوسته‌ی تعریف شده بر یک زیر فضا را می‌توان به یک تابعک خطی پیوسته بر تمام فضا با حفظ نرم اصلی‌اش وسعت داد.

قضیه ۴.۲.۱.[۱] فرض کنیم Y یک زیر فضای برداری از فضای نرم‌دار X بوده و f یک تابعک خطی پیوسته بر Y باشد. در این صورت f را می‌توان به یک تابعک خطی پیوسته مانند g بر X چنان وسعت داد که $\|g\| = \|f\|$.

نقاط یک فضای برداری نرم‌دار را همیشه می‌توان با تابعک‌های خطی پیوسته‌ی آن جدا ساخت.

قضیه ۵.۲.۱.[۱] هرگاه x برداری در فضای نرم‌دار X باشد، آن‌گاه یک تابعک خطی پیوسته مانند f بر X هست به طوری که $\|f\| = 1$ و $f(x) = \|x\|$. به خصوص، X^* نقاط X را جدا می‌سازد.

برای مشاهده‌ی این که X^* نقاط X را جدا می‌سازد، فرض می‌کنیم $x, y \in X$ چنان باشند که $x \neq y$. بنابر مطالب فوق، $f \in X^*$ی هست به طوری که

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = \|x-y\| \neq \circ.$$

لذا $f(x) \neq f(y)$ برقرار است.

فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. دوگان نرمی X^* از X همواره یک فضای باناخ است. به خصوص، دوگان نرمی $(X^*)^*$ از X^* نیز یک فضای باناخ است. این فضای باناخ را دوگان دوم X نامیم و آن را با X^{**} نشان می‌دهیم. یعنی $X^{**} = (X^*)^*$.

هر عنصر x از X یک تابعک خطی پیوسته $\hat{x}$ بر X^* با

$$\hat{x}(f) = f(x).$$

به ازای هر $f \in X^*$، به دست می‌دهد. در واقع، $\hat{x}$ به وضوح بر X^* خطی است و رابطه‌ی

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| \leq \|f\|.\|x\| = \|x\|.\|f\|$$

نشان می‌دهد که $\hat{x} \in X^{**}$ و $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. از آن سو، بنا بر قضیه‌ی ۵.۲.۱، $f \in X^*$ی هست به طوری که $\|f\| = ۱$ و $f(x) = \|x\|$. لذا، $\|x\| = f(x) = |\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|$ و در نتیجه $\|\hat{x}\| = \|x\|$ به ازای هر $x \in X$ برقرار است .

نگاشت $x \longrightarrow \hat{x}$ (از X به توی X^{**}) نشاننده‌ی طبیعی از X به توی دوگان دومش X^{**} نام دارد. با خلاصه کردن مطالب فوق، قضیه‌ی زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۶.۲.۱ [۱]. نشاننده‌ی طبیعی $x \longrightarrow \hat{x}$ از X به توی X^{**} یک عملگر خطی طول پایی است

(و در نتیجه X را می‌توان یک زیر فضای X^{**} در نظر گرفت).

به طور کلی، $x \longrightarrow \hat{x}$ یک نگاشت برو نیست در نتیجه X (وقتی در X^{**} نشانده شود) در حالت کلی زیر فضای حقیقی X^{**} است. هر گاه X یک فضای باناخ نباشد، آن‌گاه $x \longrightarrow \hat{x}$ نمی‌تواند برو باشد صرفاً به این خاطر که X^{**} یک فضای باناخ است. هرگاه نشاننده‌ی طبیعی فضای باناخ X به توی دوگان دومش X^{**} برو باشد، آن‌گاه X یک فضای باناخ انعکاسی نامیده می‌شود. لازم به ذکر است که کلیه‌ی فضاهای برداری بعد متناهی انعکاسی هستند.