دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش آنالیز

مخروط هسته ای و کاربردهای آن در بهینه سازی

استاد راهنما:

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر محبوبه رضایی

پژوهشگر:

اعظم قاسم پور

مهر ماه ۱۳۸۹

به پاس تعبیر عظیم و انسانی اش از کلمه "ایثار و از خودگذشتگی"؛

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودش، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان است؛

و به پاس محبت های بی دریغش که هرگز فروکش نمی کند،

این مجموعه را به مادر مهربانم تقدیم می کنم.

حمد و سپاس پروردگاری را که در عین رحمت و کرامت بندگانش را به نعمت بودن، زیستن، آزمودن و آموختن آراست.

حمد و سپاس پروردگاری را که بندگانش را طعم شیرین محبت بی دریغ پدر و مادر چشاند.

خالصانه ترین سپاس‌ها برای خانواده عزیزم به خصوص پدر و مادر مهربانم، که از کودکی، شور دانستن و لذت جستجو را در من بیدار کردند، استقامت در تلاش را به من آموختند و در تمام این سال‌ها با فراهم کردن آرامش فکری و آسایش روحی، بسیاری دشواری‌ها را بر من آسان نمودند. با تمام وجود در برابرشان تعظیم می کنم که آنچه هستم را مدیون ایشانم.

بر خود می بالم که فرصتی دست داد تا افتخار علم آموزی نزد استاد فرهیخته جناب آقای دکتر مجید فخار را در کارنامه علمی خود بنگارم که حضور در محضر پر ارزشش مایه ی مباهات هر دانشجویی است. که هر جا می روم و از هر که می شنوم جز خوبی، صداقت، مهربانی، شهامت و بزرگ منشی ایشان نیست. این مجموعه حاصل بذر تلاشی است که با هدایت، حمایت و راهنمایی های دلسوزانه ایشان به ثمر نشسته است.

از خانم دکتر محبوبه رضایی، استاد مشاور بزرگوارم، که قدم به قدم در تمامی مراحل این پژوهش مرا همراهی کردند و الگویی بی نظیر از یک پژوهشگر و یک استاد فداکار در ذهن من حک نمودند، بی نهایت سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر مهدی چینایی و جناب آقای دکتر علی رضا امینی هرندی که صبورانه و با دقتی شگرف پایان نامه ام را به قضاوت و داوری نشستند، کمال تشکر را دارم و افتخار می کنم که آموخته هایم را با محک دانش این دو بزرگوار سنجیدم.

همچنین از گروه محترم ریاضی دانشگاه اصفهان، که در طول انجام این مطالعه، همواره محیط آموزشی مناسبی را برایم فراهم نمودند، کمال سپاس را دارم.

در پایان از کلیه دوستانی که مرا یاری نمودند و امکان بردن نامشان نیست، نهایت سپاس را دارم و برایشان از خداوند، سلامتی و موفقیت، خواهانم.

چکیده

امروزه پیدا کردن نقاط کارا (مینیمال یا ماکسیمال) از یک مجموعه، در بسیاری از مسائل، مطلوب ماست. بهینه‌سازی مؤثر (پارتو) یکی از مفیدترین روش‌ها در پیدا کردن این نقاط برای نگاشت‌های برداری مقدار است. یکی از ابزارهای مهم ریاضیاتی که به طور ویژه، همراه با دستاوردهایش، در مطالعه‌ی این نوع از بهینه‌سازی به کار گرفته می‌شود، مفهوم مخروط هسته‌ای است که نخستین بار در سال ۱۹۸۳ توسط آیزاک معرفی گردید. ما در این پایان‌نامه، با استفاده از این مخروط، ابتدا با بررسی مسأله بهینه‌سازی پارتو و در ادامه با استفاده از قضایای کارایی پارتو به یک قضیه نقطه ماکسیمال و به دنبال آن به شکلی از اصل تغییراتی اکلند برای نگاشت‌های برداری مقدار دست می‌یابیم. اصل تغییراتی که در سال ۱۹۷۲ توسّط اکلند کشف شد، مهم‌ترین نتیجه به دست آمده در آنالیز غیرخطّی است و کاربردهای مهمی در بهینه‌سازی، تئوری کنترل بهینه، تئوری بازی‌ها و در مطالعه سیستم‌های دینامیکی دارد. همچنین با استفاده از قضیه نقطه ماکسیمال، نامساوی $\varepsilon-$تغییراتی را به دست می‌آوریم.

کلید واژه‌ها: مخروط هسته ای، کارایی مؤثر (پارتو)، اصل تغییراتی اکلند، مخروط تمام هسته ای، بهینه‌سازی.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

پیشگفتار

در این پایان‌نامه به معرفی یکی از ابزارهای مهم ریاضی به‌نام مخروط هسته‌ای می‌پردازیم که نخستین بار در سال ۱۹۸۳ توسط جرج آیزاک معرفی گردید. ما ابتدا به شناسایی ویژگی‌های این مخروط پرداخته و در ادامه نشان خواهیم داد که چگونه این مخروط به طرز خاصی با دستاوردها و کاربردهایش در انواع مسائل بهینه‌سازی به کار گرفته می‌شود.

در فصل اول پس از معرفی فضایی که در آن کار می‌کنیم، به تعریف انواع مخروط از جمله مخروط هسته‌ای و تمام هسته‌ای و ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. در ادامه به معرفی یکی از مهم‌ترین مسائل بهینه سازی به نام کارایی مؤثر (پارتو) که مربوط به بهینه سازی نگاشت‌های برداری مقداراست، می‌پردازیم و با استفاده از مفهوم مخروط هسته‌ای سه قضیه مهم در این زمینه را بیان می‌کنیم که درفصل‌های بعدی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند.

درفصل دوم با استفاده از مفهوم مخروط هسته‌ای، بهینه سازی پارتو را به صورت کامل‌تر می‌شناسیم و سپس به بررسی ارتباط بین بهینه سازی قوی و کارایی پارتو و نیز ارتباط بین بهینه سازی قوی و بهینه سازی تقریبی برداری می‌پردازیم.

در فصل سوم به دنبال بهینه کردن یک تابع برداری مقدار هستیم که برای این منظور، ابتدا یک مخروط هسته‌ای به‌نام $K(\varepsilon)$ می‌سازیم و در ادامه با استفاده از این مخروط و قضایای کارایی پارتو، یک قضیه نقطه ماکسیمال به اثبات می‌رسانیم. در آخر به کمک این قضیه به صورتی از اصل اکلند، برای نگاشت‌های برداری مقدار دست می‌یابیم.

در فصل چهارم، به عنوان کاربردی از قضیه نقطه ماکسیمال، نامساوی $\varepsilon-$تغییراتی را با دو روش به دست آورده‌ایم؛ نخست روشی که در آن از مشتق فرشه و مشتق گتو استفاده می‌شود و روش دوم یک روش اسکالری با استفاده از تابعک‌های غیرخطی است. در نهایت در فصل پنجم کلیه این مفاهیم را به یک فضای حاصل‌ضربی از دو فضای موضعاً محدب تعمیم می‌دهیم.

فصل اول

مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱ . یک توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\varnothing$ و X به τ متعلق‌اند.

۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه τ، متعلق به τ است.

۳) اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی τ، متعلق به τ است.

مجموعه X را که برای آن توپولوژی ای مانند τ مشخص شده است، فضای توپولوژیک می‌نامیم.

تعریف ۲.۱ . فرض کنیم X یک مجموعه باشد، منظور از پایه‌ی یک توپولوژی در X، گردایه‌ای است از زیرمجموعه‌های X (موسوم به اعضای پایه) به‌طوری‌که:

۱) به ازای هر $x \in X$، دست کم یک عضو پایه مانند B شامل x موجود است.

۲) اگر x متعلق به اشتراک دو عضو پایه مانند B_1 و B_2 باشد آنگاه عضوی از پایه مانند B_3 وجود دارد به‌طوری‌که $x \in B_3$ و $B_3 \subset B_1 \bigcap B_2$.

تعریف ۳.۱ . اگر $\mathscr{B}$ پایه توپولوژی ای در X باشد آنگاه τ، توپولوژی تولید شده به وسیله $\mathscr{B}$، چنین تعریف می‌شود: زیرمجموعه U از X را در X باز گوییم (یعنی عضوی از τ است) اگر به ازای هر $x \in U$، عضوی از پایه مانند $B \in \mathscr{B}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x \in B$ و $B \subset U$.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید X فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و τ یک توپولوژی روی X باشد. اگر جمع برداری و ضرب اسکالر پیوسته باشند، آنگاه (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیکی نامیم و با نماد T.V.S نمایش می‌دهیم.

به عنوان مثال فضاهای نرم‌داری مثل $\mathbb{R}^n$، $\mathbb{C}^n$ و $C(X)$ (فضای توابع پیوسته روی X) همگی با توپولوژی حاصل از نرمشان یک T.V.S به ما می‌دهند.

تعریف ۵.۱ . مجموعه $S \subseteq X$ را متعادل گویند هر گاه $DS = S$ که در آن

$$D = \left\{ t \in \mathbb{F} \;:\; |t| \le 1 \right\}$$

(DS:اجتماع tهایی که $t \in D$)

تعریف ۶.۱ . اگر X، یک T.V.S و $A, B \subseteq X$، گوییم A توسط B جذب می‌شود هرگاه $\varepsilon > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر t با $|t| \le \varepsilon$ داشته باشیم $tA \subseteq B$.

A را جاذب نامیم هر گاه مجموعه‌های تک عضوی توسط A جذب شوند.

تعریف ۷.۱ . هرگاه X، یک T.V.S باشد، زیرمجموعه A از X را محدب نامیم اگر برای هر $x, y \in A$ و هر اسکالر λ که $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم $\lambda x + (1-\lambda) y \in A$.

تعریف ۸.۱ . هر گاه X یک فضای برداری توپولوژیکی باشد، منظور از یک تابعک خطی یک نگاشت خطی از X به میدان اسکالر است. فضای تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X را دوگان X می‌نامیم و با X^* نمایش می‌دهیم یعنی $X^* = L(X, F)$.

تعریف ۹.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری باشد، آن‌گاه $p : X \to \mathbb{R}$ را یک تابعک زیر خطی نامیم هرگاه

$$p(x+y) \le p(x) + p(y)$$
$$p(tx) = tp(x) \qquad \forall t \ge 0$$

تعریف ۱۰.۱ . هرگاه X فضای برداری روی $\mathbb{C}$ یا $\mathbb{R}$، $p : X \to [0, +\infty)$ را نیم نرم گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

$$p(x+y) \le p(x)+p(y)$$
$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$$

برای هر اسکالر λ و هر $x, y \in X$.

اگر p یک نیم نرم و $p(x)=0$ ایجاب کند که $x=0$ باشد، آنگاه p را یک نرم می‌نامیم.

قضیه ۱۱.۱ (هان–باناخ) . فرض کنید X یک فضای برداری روی $\mathbb{R}$، $p: X \to \mathbb{R}$ یک تابع زیر خطی و M یک زیر فضای X باشد. اگر $f : M \to \mathbb{R}$ یک تابعک خطی و برای هر $x \in M$، $f(x) \le p(x)$ ،آن‌گاه تابعک خطی $F: X \to \mathbb{R}$ موجود است که:

$$\forall x \in X \quad F(x) \le p(x) \ , \ F_{|M} = f$$

اثبات . رجوع کنید به [۲۱].

دو قضیه زیر به عنوان نتایج قضیه هان باناخ ارائه می‌گردد:

نتیجه ۱۲.۱ . هر گاه M یک زیرمجموعه فضای نرمدار X باشد به طوری‌که برای هر $\psi \in X^*$، و هر $x \in M$، $<\psi, x> = 0$ ایجاب کند $\psi = 0$، آن‌گاه M در X چگال است.

اثبات . رجوع کنید به [۲۱].

نتیجه ۱۳.۱ . هر گاه X یک فضای نرمدار خطی، $x_0 \in X$ و $x_0 \neq 0$ باشد، آنگاه $\psi \in X^*$ وجود دارد به طوری‌که $\|\psi\| = 1$ و $<\psi, x_0> = \|x_0\|$.

اثبات . رجوع کنید به [۲۱].

قضیه ۱۴.۱ . فرض کنید A, B زیرمجموعه‌های غیرتهی، محدب و از هم مجزای فضای T.V.S، X باشند. اگر A باز باشد آنگاه $\psi \in X^*$ و $c \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری‌که

$$\mathrm{Re}\langle \psi, x \rangle < c \le \mathrm{Re}\langle \psi, y \rangle \qquad \forall x \in A \quad , \quad \forall y \in B$$

اثبات . رجوع کنید به [۲۱].

۲.۱ . فضای موضعاً محدب و مخروط‌های هسته‌ای

نظر به اینکه نتایج به دست آمده از این پژوهش، در یک فضای موضعاً محدب ارائه گردیده است، لذا در این بخش ابتدا به تعریفی از این فضا می‌پردازیم:

تعریف ۱۵.۱. فضای موضعاًمحدب، به زوجی مانند $(E, Spec(E))$ اطلاق می‌شود که در آن، E یک فضای برداری حقیقی و $Spec(E)$ خانواده‌ای از نیم نرم ها روی E است به طوری‌که از سه شرط زیر برخوردار باشد:

الف) برای هر $p \in Spec(E)$ و هر $\lambda \in \mathbb{R}^+$، $\lambda p \in Spec(E)$ باشد.

ب) هر گاه $p \in Spec(E)$ و q نیم نرمی‌دلخواه روی E باشد به طوری‌که $q \leq p$،آن‌گاه داشته باشیم $q \in Spec(E)$.

ج) برای هر $p_1, p_2 \in Spec(E)$ ، $\sup(p_1, p_2) \in Spec(E)$،که در آن برای هر $x \in E$، $\sup(p_1, p_2)(x) = \sup(p_1(x), p_2(x))$.

تعریف فوق از فضای موضعاً محدب توسط تروس [1] ارائه گردیده است. در آنالیز تابعی فضای موضعاً محدب را به عنوان فضایی که دارای یک پایه از مجموعه‌های محدب حول صفر است، می‌شناسیم. در اینجا نشان می‌دهیم تعریف ۱۵.۱ با این تعریف معادل است.

فرض کنیم فضای X دارای یک پایه از مجموعه‌های محدب، حول صفر باشد. اگر C یکی از این مجموعه‌ها باشد، C جاذب و متعادل خواهد بود و لذا تابع مینکوفسکی $\mu_C(x) := \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}$ یک نیم نرم است. حال اگر اعضای پایه توپولوژی تولید شده توسط این نیم نرم‌ها را به صورت

$$U_\varepsilon(x_0) := \{x \in X \ : \mu_C(x - x_0) < \varepsilon \qquad x_0 \in X\}$$

تعریف کنیم، شرایط تعریف ۱۵.۱ برقرار خواهد بود.

برای اثبات جهت عکس، فرض کنیم تعریف ۱۵.۱ برقرار باشد و خانواده $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از نیم نرم‌ها توپولوژی فضای X را تولید کرده‌اند. در این صورت مجموعه‌های $\{x \in X \ : p_{\alpha_1}(x) < \varepsilon \ ,..., \ p_{\alpha_i}(x) < \varepsilon \qquad \alpha_i \in A\}$، یک پایه محدب، جاذب و متعادل حول صفر تشکیل می‌دهند.

مثال ۱۶.۱ . فرض کنید V یک فضای برداری و $F = \{f \ : V \to \mathbb{R} : f$ خطی است $\}$. اگر تعریف کنیم $Spec(F) = \{p_f(x) = |f(x)| \qquad \forall f \in F\}$، در این صورت $Spec(F)$ خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی فضای برداری F است و $(F, Spec(F))$ یک فضای موضعاً محدب خواهد بود.

تعریف ۱۷.۱ . زیرمجموعه $\beta \subseteq Spec(E)$ را یک پایه برای $Spec(E)$ می‌نامیم، اگر و تنها اگر برای هر $p \in Spec(E)$، نیم نرم $q \in \beta$ و عدد حقیقی $\lambda > 0$ موجود باشند به‌طوری‌که $p \leq \lambda q$.

1. Treves

توجه کنید در تعریف بالا، β خود $Spec(E)$ نیز می‌تواند باشد، لذا همواره یک پایه برای فضای موضعاً محدب وجود دارد.

تعریف ۱۸.۱ . توپولوژی τ که به وسیله خانواده $Spec(E)$ روی E تعریف شده را هاسدرف نامیم، هرگاه پایه β از $Spec(E)$ موجود باشد به‌طوری‌که:

$$\left\{x \in E \mid p(x)=0 \qquad \forall p \in \beta\right\}=\{0\}$$

که در این حالت β را یک پایه هاسدرف برای $Spec(E)$ می‌نامیم.

ما در این پایان نامه فرض را بر این نهاده‌ایم که $Spec(E)$ یک پایه هاسدرف β دارد.

قضیه ۱۹.۱ . اگر X یک فضای موضعاً محدب هاسدرف باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$ که $x \neq 0$، تابعک $\psi \in X^{*}$ موجود است به‌طوری‌که $<\psi, x> \neq 0$.

اثبات . رجوع کنید به [۲۱].

قضیه ۲۰.۱ . فرض کنید X یک فضای موضعاً محدب و M یک زیر فضای بسته از X باشد به‌طوری‌که $x \in X$ و $x \notin M$ آن‌گاه:

$$\exists \psi \in X^{*} \quad s.t \quad <\psi, M> \ =0 \ , \ <\psi, x> \ =1$$

اثبات . رجوع کنید به [۲۱].

اکنون که با فضایی که در آن کار می‌کنیم آشنا شدیم، اینک به معرفی ابزار اصلی پژوهش‌مان یعنی مخروط و انواع مختلف آن می‌پردازیم.

تعریف ۲۱.۱ . زیرمجموعه بسته K از E را یک مخروط محدب نامیم، هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱) $K+K \subseteq K$

۲) برای هر $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ داشته باشیم $\lambda K \subset K$.

تعریف ۲۲.۱ . مخروط محدب بسته K را نوکدار نامیم هرگاه داشته باشیم $K \bigcap (-K)=\{0\}$.

مثال ۲۳.۱ . فرض کنید X یک فضای برداری دلخواه و مجموعه K به صورت

$$K:=\{\ \text{مجموعه توابع پیوسته زوج روی } X\ \}$$

باشد. در این صورت K در فضای برداری مجموعه توابع پیوسته یک مخروط محدب است اما نوکدار نیست.

مثال ۲۴.۱ . اگر X یک فضای توپولوژیکی باشد. در این صورت $C(X)$ یک فضای باناخ با نرم $p_f(x) := \sup|f(x)|$ است و $K = \{f \in C(X) : f \geq 0\}$ یک مخروط محدب نوکدار خواهد بود.

با داشتن هر مخروط محدب نوکدار $K \subset E$ می‌توانیم یک رابطه ترتیب $\leq$ روی E را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K \quad \forall x, y \in X$$

تعریف ۲۵.۱ . دوگان توپولوژیکی مخروط K که آن را با K^* نشان می‌دهیم برابر است با

$$K^* = \left\{\psi \in E^* \;\;:\;\; <\psi, x> \geq 0 \quad \forall x \in K\right\}$$

همان گونه که از تعریف یاد شده پیداست، مخروط قطبی K که آن را با K^0 نشان می‌دهیم به صورت $K^0 = -K^*$ خواهد بود.

تعریف ۲۶.۱ . هرگاه τ توپولوژی تعریف شده توسط $Spec(E)$ باشد، در این صورت مخروط نوکدار $K \subset E$ را (نسبت به توپولوژی τ) نرمال نامیم اگر و تنها اگر K در شرط زیر صدق کند:

اگر $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ دو دنباله دلخواه در K باشند به طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} y_n = 0 \quad \text{و} \quad 0 \leq x_n \leq y_n$$

آن‌گاه داشته باشیم $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$.

مثال ۲۷.۱ . فرض کنید $E = l_1$ و $K = \left\{\{x_n\}_{n\geq 1} \in E \;\;:\;\; x_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. در این صورت K مخروطی نرمال است.

قابل ذکر است که مفهوم مخروط نرمال مهم ترین مفهوم در مبحث مخروط‌های محدب است. در مورد این مخروط گزاره زیر وجود دارد:

گزاره ۲۸.۱ . اگر $(E, Spec(E))$ یک فضای موضعاً محدب و $K \subset E$ یک مخروط نرمال بسته باشد،آن‌گاه $E^* = K^* - K^*$.

اثبات. رجوع کنید به [۱].

تعریف ۲۹.۱ . هرگاه $K \subset E$ یک مخروط محدب نوکدار باشد، K را خوش‌پایه می‌نامیم اگر زیرمجموعه بسته و محدب B از E، موجود باشد به طوری‌که $0 \notin B$ و

$$K = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$$

تعریف ۳۰.۱ . هر گاه X فضای برداری دلخواه و $M \subseteq X$ نگاشت $\varphi : M \to \mathbb{R}$ را دور از صفر کراندار روی M نامیم، هر گاه $\alpha > 0$ موجود باشد به طوری‌که:

$$\forall x \in M \quad , \quad |\varphi(x)| \geq \alpha > 0$$

گزاره ۳۱.۱ . هر مخروط خوش‌پایه، نرمال است.

اثبات . فرض کنیم K خوش پایه باشد. در نتیجه:

$$K = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$$

با توجه به اینکه فضای ما موضعاً محدب است، لذا دوگانش غیر بدیهی است. از این رو $\psi \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که $\inf \psi(B) > 0$. کافیست نشان دهیم اگر برای دو دنباله دلخواه (x_n) و (y_n) در K داشته باشیم:

$$y_n \to 0 \quad , \quad 0 \leq x_n \leq y_n$$

آن‌گاه $x_n \to 0$. داریم:

$$0 \leq \psi(x_n) \leq \psi(y_n)$$

که ایجاب می‌کند دنباله $\{\psi(x_n)\}$ به سمت صفر همگرا باشد. از آنجا که $x_n = \lambda_n b_n$(برای $b_n \in B$ و $\lambda_n \geq 0$)درنتیجه $\psi(x_n) = \lambda_n \psi(b_n)$ و چون ψروی B دور از صفر کراندار است، باید داشته باشیم $\lambda_n \to 0$. و به دلیل اینکه دنباله (b_n) کراندار است (به دلیل کرانداری B) لذا داریم $x_n \to 0$.■

گزاره ۳۲.۱ . مخروط $K \subset E$ خوش پایه است اگر و تنها اگر پایه $\beta = \{p_i\}_{i \in I}$ از $Spec(E)$ و تابعک پیوسته $\psi \in K^*$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $p \in \beta$، ثابت $c_p > 0$موجود باشد که $c_p p(x) \leq \psi(x)$ برای هر $x \in K$.

اثبات . رجوع کنید به [۷] و [۸].

حال به تعریف مخروط هسته‌ای و ذکر ویژگی‌ها و مثال‌های لازم پرداخته و درادامه تعریف مخروط تمام هسته‌ای وابسته به یک مخروط نرمال ارائه می‌گردد.

تعریف ۳۳.۱ . هرگاه $(E(\tau), Spec(E))$ یک فضای موضعاً محدب و $K \subset E$یک مخروط محدب نوکدار باشد. در این صورت Kرا (نسبت به توپولوژی τ) هسته‌ای نامیم اگر و تنها اگر پایه $\beta = \{p_i\}_{i \in I}$ از $Spec(E)$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $p \in \beta$، تابعک $f_p \in K^*$ وجود داشته باشد که $p(x) \leq f_p(x)$ برای هر $x \in K$.

مثال ۳۴.۱ . هر مخروط خوش پایه هسته‌ای است.

اثبات . طبق تعریف معادلی که در گزاره ۳۲.۱ برای مخروط خوش‌پایه ارائه گردید، هر مخروط خوش‌پایه در شرایط تعریف یک مخروط هسته‌ای صدق می‌کند.

مثال ۳۵.۱ . اگر $E = l_1$ و $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ که $p_n\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$ خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی E باشد که توپولوژی این فضا را تولید می‌کنند. در این صورت مخروط

$$K = \left\{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_1 : x_k \geq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}\right\}$$

هسته ای است.

تعریف ۳۶.۱ . اگر $(E,\|.\|)$ یک فضای برداری نرمدار حقیقی باشد، زیرمجموعه $K \subset E$ را یک مخروط بیشاپ-فلپس نامیم هر گاه تابعک $\psi \in E^*$ و $\alpha \in (0,1)$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که:

$$K = \left\{x \in E \quad : \quad \alpha\|x\| \leq \psi(x)\right\}$$

مفهوم مخروط بیشاپ فلپس کاربردهای زیادی در آنالیز غیر خطی، بهینه سازی مؤثر(که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم) و نگاشت‌های برداری مقدار دارد.

اکنون می‌خواهیم بدانیم چه موقع زیرمجموعه‌ای از فضای برداری نرمدار حقیقی E قابل نمایش به شکل یک مخروط بیشاپ-فلپس است.

تعریف ۳۷.۱ . هرگاه C زیرمجموعه‌ای از فضای برداری نرمدار E باشد. آن‌گاه C را قابل نمایش به شکل یک مخروط بیشاپ-فلپس نامیم هر گاه تابعک $\psi \in E^*$ و نرم $\|\ \|_* : E \to \mathbb{R}$ که معادل با نرم $\|.\|$ است موجود باشند به‌طوری‌که:

$$C = \left\{x \in E \quad : \quad \|x\|_* \leq \psi(x)\right\}$$

قضیه زیر ارتباط بین مخروط‌های خوش پایه و مخروط‌های بیشاپ- فلپس را مشخص می‌کند:

قضیه ۳۸.۱ . اگر $(E,\|.\|)$ فضای برداری نرمدار حقیقی و $K \neq \{0\}$ زیرمجموعه‌ای غیرتهی از E باشد. در این صورت شرایط زیر با یکدیگر معادلند:

۱) K قابل نمایش به شکل یک مخروط بیشاپ- فلپس است.

۲) K یک مخروط بسته خوش پایه است.

اثبات . ابتدا فرض کنیم K قابل نمایش به شکل یک مخروط بیشاپ- فلپس باشد. در این صورت تابعک $l \in E^*$ و نرم $\| \ \|_* : E \to \mathbb{R}_+$ که معادل با $\|.\|$ است وجود دارند به‌طوری‌که:

$$C = \left\{ x \in E \ : \ \|x\|_* \le l(x) \right\}$$

به راحتی قابل بررسی است که C یک مخروط محدب است و با توجه به پیوستگی $\|x\|_*$ و l، مخروط C بسته خواهد بود.

اکنون مجموعه $B = \{x \in C : l(x) = 1\}$ را در نظر می‌گیریم. به وضوح B یک پایه برای K است. زیرا برای هر $l \in k^*$ و هر $x \in K \setminus \{0\}$، $l(x) > 0$. لذا هر $x \in K \setminus \{0\}$ را می‌توان به شکل یکتایی به صورت

$$x = l(x) \frac{1}{l(x)} x$$

نمایش داد که در آن $x \frac{1}{l(x)} \in B$ و لذا B پایه K خواهد بود.

ما برای هر $x \in B$ داریم $p(x) \le 1$ و با توجه به معادل بودن $\|.\|$ و $\|x\|_*$ مجموعه B کراندار است. از طرفی طبق تعریف پایه، K را می‌توانیم به صورت $K = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda B$ نمایش دهیم که نشان می‌دهد K خوش پایه است.

وچون طبق گزاره ۳. ۸. ۳ در [۱۴] هر مخروط محدب که دارای یک پایه بسته و کراندار باشد، بسته و نوکدار خواهد بود، اثبات کامل خواهد بود.

حال فرض کنیم C یک مخروط محدب با یک پایه بسته و کراندار B_0 باشد.از آنجا که $0 \notin B_0$ لذا طبق قضیه ۱۴.۱، $l \in E^*$ و $k > 0$ موجودند به طوری‌که:

$$0 \le k \le l(b) \ (b \in B_0)$$

مجموعه $B = \{x \in C : l(x) = 1\}$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا نشان می‌دهیم که B یک پایه بسته برای C است:

برای هر $l \in C^*$ و هر $x \in C \setminus \{0\}$، $l(x) > 0$. بنابراین x را می‌توان به شکل یکتایی به صورت $x = l(x) \frac{1}{l(x)} x$ نمایش داد که $\frac{1}{l(x)} x \in B$ و لذا B پایه خواهد بود.

از کرانداری B_0 نتیجه می‌گیریم $M > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $b \in B_0$، $\|b\| \le M$.

اکنون نشان می‌دهیم که B نیز کراندار است:

اگر x عنصر دلخواهی از B باشد. در این صورت $\rho > 0$ و $b \in B_0$ وجود دارند که $x = \rho B$، بنابراین

$$l(x) = \rho l(b)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\rho=\frac{\rho}{1}=\frac{\rho}{l(x)}=\frac{1}{l(b)}\leq k^{-1}$$

ولذا $\rho\leq k^{-1}$ در نتیجه

$$\|x\|=\rho\|b\|\leq k^{-1}M$$

که نشان می‌دهد B کرندار است.

حال $\delta>0$ را به‌قسمی‌درنظر می‌گیریم که برای هر $u\in U_\delta$ که $U_\delta:=\{x\in E\mid \|x\|\leq\delta\}$ داشته باشیم:

$$l(u)=\frac{1}{2}$$

اکنون اگر تعریف کنیم $F:=conv(-B\bigcup U_\delta\bigcup B)$ در این صورت تابعک مینکوفسکی زیر یک نیم نرم روی E خواهد بود:

$$P(x):=\inf\{t>0:x\in tF\}$$

علاوه بر این چون F غلاف محدب یک مجموعه کراندار است، لذا خودش کراندار است. در نتیجه p یک نرم روی E خواهد بود چرا که در ادامه نشان داده‌ایم با کرانداری F، p و $\|.\|$ معادل می‌گردند.

چون F کراندار است پس $m>0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $x\in F$، $\|x\|\leq m$. با توجه به محدب بودن مجموعه‌های B، $-B$ و U_δ، می‌توان هر عنصر دلخواه مانند $x\in F$ را به صورت

$$x=\lambda b+\mu u+v(-d)$$

نمایش داد که در آن $b,d\in B$ و $u\in U_\delta$ و λ,μ,v اعدادی غیر منفی اند که $\lambda+\mu+v=1$. اکنون اثبات می‌کنیم دو نرم $P(.)$ و $\|.\|$ معادلند:

اگر $x\in E$ باشد به‌طوری‌که $\|x\|\leq\delta$، در این صورت $x\in U_\delta\subset F$ و در نتیجه $P(x)\leq 1$ خواهد بود.

اکنون فرض کنید $P(x)\leq 1$. در این صورت $x\in\bar{F}$ و اگر $M:=\max\{m,\delta\}$، آنگاه $\|x\|\leq M$. دو نامساوی اخیر را می‌توان در نامساوی زیر خلاصه کرد:

$$\delta P(x)\leq\|x\|\leq MP(x)\ (x\in E)$$

که این رابطه نشان می‌دهد دو نرم $P(.)$ و $\|.\|$ معادلند.

برای تکمیل اثبات کافیست نشان دهیم $C=\{x\in E:P(x)\leq l(x)\}$.

برای این منظور مجموعه A را به صورت $A=\{x\in E: P(x)\le l(x)\}$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم $C\subset A$. اگر $x\in C$ آنگاه عناصر $b\in B$ و $\lambda\ge 0$ موجودند به‌طوری‌که $x=\lambda b$ لذا $x\in\lambda F$ و بنا بر این $P(x)\le\lambda$ که نتیجه می‌شود:

$$P(x)\le \lambda.1=\lambda l(b)=l(\lambda b)=l(x)$$

(توجه شود چون $b\in B$ لذا $l(b)=1$ می‌باشد.)

رابطه اخیر ایجاب می‌کند $x\in A$ که $C\subset A$ را نتیجه خواهد داد.

اکنون نشان می‌دهیم $A\subset C$. کافیست ثابت کنیم برای هر $x\in E$ با این خاصیت که $p(x)=1$ و $l(x)\ge 1$، عضوی از Cاست. اگر x عنصری در E با ویژگی فوق باشد؛ لذا برای هر $t>1$، $x\in tF$. حال فرض کنیم $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی است به قسمی‌که برای هر $n\in\mathbb{N}$:

$$t_n>1 \text{ و } \lim_{n\to\infty} t_n=1$$

برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x\in t_nF$ لذا عناصر $b_n\in \mathrm{B}$، $d_n\in B$ و$u_n\in U_\delta$ و نیز اعداد غیر منفی λ_n، μ_nو ν_n موجودند به‌طوری‌که:

$$x=t_n\left(\lambda_n b_n+\mu_n u_n+\nu_n(-d_n)\right) \quad \text{و} \quad \lambda_n+\mu_n+\nu_n=1 \qquad (۱)$$

و داریم:

$$(0\le\lambda_n\le 1, 0\le\mu_n\le 1, 0\le\nu_n\le 1)$$

از آنجا که مجموعه $A:=\left\{(t_1,t_2,t_3)\ :\ t_i\in\mathbb{R}, i=1,2,3\ ,\ t_1+t_2+t_3=1\right\}$ فشرده است، بنابراین زیر دنباله‌های $(\lambda_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$، $(\mu_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$ و $(\nu_{nj})_{j\in\mathbb{N}}$وجود دارند که همگرا هستند. حدود این سه دنباله را به ترتیب با λ، μ و ν نشان می‌دهیم.

چون $l(x)\ge 1$ از رابطه (۱) نتیجه می‌شود:

$$1\le l(x)=l\left(t_{nj}\left(\lambda_{nj}b_{nj}+\mu_{nj}u_{nj}+\nu_{nj}(-d_{nj})\right)\right)\le t_{nj}\left(\lambda_{nj}+\frac{1}{2}\mu_{nj}-\nu_{nj}\right) \quad (۲)$$

که طرف راست نامساوی اخیر با توجه به‌اینکه $(l(u_{nj})\le\frac{1}{2}, l(d_{nj})=l(b_{nj})=1)$ نوشته شده است.

اگر در رابطه (۲)، j را به سمت بی نهایت میل دهیم، باتوجه به‌اینکه $t_{nj}\to 1$، نامساوی زیر حاصل می‌گردد:

$$1\le\lambda+\frac{1}{2}\mu-\nu \qquad (۳)$$

و ازآنجا که $\lambda_{nj}+\mu_{nj}+\nu_{nj}=1$ لذا هنگامی‌که j به سمت بی نهایت میل می‌کند داریم:

$$\lambda+\mu+\nu=1 \tag{۴}$$

اکنون با توجه به اینکه $\lambda+\mu+\nu=\lambda+\frac{1}{2}\mu-\nu+\frac{1}{2}\mu+2\nu$ لذا از ترکیب دو رابطه (۳) و (۴) نامساوی زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}\mu+2\nu\leq 0$$

و با توجه به غیر منفی بودن μ و ν داریم $\mu=0$ و $\nu=0$ که نتیجه می‌دهد:

$$\lambda_{nj}\to 1 \text{، } \mu_{nj}\to 0 \text{ و } \nu_{nj}\to 0$$

(زیرا جمع این سه دنباله باید به ۱ همگرا گردد.)

بنا به کرانداری U_δ و B داریم:

$$t_{nj}\left(\lambda_{nj}b_{nj}+\mu_{nj}u_{nj}+\nu_{nj}(-d_{nj})\right)\to 0 \quad (j\to\infty)$$

و از رابطه (۱) نتیجه می‌شود

$$t_{nj}\lambda_{nj}b_{nj}\to x \qquad (j\to\infty)$$

و چون $t_{nj}\lambda_{nj}\to 1$، پس $b_{nj}\to x$. اما می‌دانیم (b_{nj}) دنباله‌ای در B است که رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$x\in\bar{B}=B\subseteq C$$

لذا $x\in C$ و اثبات تمام است.■

مفهوم بعدی که ما به معرفی آن می‌پردازیم، مفهوم مخروط تمام هسته‌ای است که طبق روندی که نشان خواهیم داد، می‌تواند وابسته به هر مخروط نرمالی شناسایی گردد. این مخروط کاربرد اساسی در مطالعه کارایی مؤثر دارد.

برای تعریف و شناسایی این مخروط روند زیر را دنبال می‌کنیم:

فرض کنید $(E,Spec(E))$ یک فضای موضعاً محدب و $\beta\subseteq Spec(E)$ یک پایه هاسدرف برای آن است. (توجه شود در اینجا β می‌تواند خود $Spec(E)$ نیز باشد.) و فرض کنید $K\subset E$ یک مخروط بسته نوکدار محدب و $\varphi:\beta\to K^*\setminus\{0\}$ نگاشتی دلخواه باشد. برای پایه β و نگاشت φ داده شده، مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$K_\varphi=\left\{x\in E\,\middle|\,p(x)\leq\varphi(p)(x)\qquad\forall p\in\beta\right\}$$

با توجه به این تعریف، به وضوح برای هر φ و β، داریم $0\in K_\phi$. در ضمن مجموعه K_φ دارای خواص زیر است.