بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش محض

عنوان:

اندازه گنگی و اندازه متعالی $\ln 2$

استاد راهنما:

دکتر خدابخش حسامی پیله رود

استاد مشاور:

دکتر تاتیانا حسامی پیله رود

توسط:

مرضیه فتحیان بروجنی

اسفند ۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که دعای خیرشان بدرقه‌ی راهم بود، **همسر مهربانم** که مشوق راهم بود و **دختر دلبندم سارا** که دو سال از شیرین‌ترین لحظات زندگیش به سختی سپری شد.

تشکر و قدردانی

شکر و سپاس خدای را که با الطاف ربّانی‌اش توفیق داد تا این مجموعه را به پایان رسانده و از خداوند منّان توفیق و سعادت همه‌ی پویندگان و رهروان علم و دانش را خواهانم.

در ابتدا از زحمات استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر حسامی و خانم دکتر حسامی به عنوان استاد مشاور نهایت تشکر و قدردانی را دارم .

هم‌چنین از خانم دکتر افتخاری و آقای دکتر نقی‌پور که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

درپایان صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را از اساتید ارجمند و دوستان مهربانم که در دوران تحصیل از رهنمودهای ارزشمندشان بهره‌مند شده‌ام دارم.

چکیده

برای هر عدد گنگ α می‌توانیم اندازه‌ی خاصی تعریف کنیم، به‌طوری‌که به ما امکان تعیین فاصله‌ی بین α و اعداد گویا را بدهد. این اندازه نمای گنگی یا اندازه گنگی α نامیده می‌شود و با $\mu(\alpha)$ نشان داده می‌شود. متأسفانه مقدار دقیق اندازه گنگی برای تعداد کمی از اعداد مشخص می‌باشد و برای بعضی دیگر از اعداد تنها کران بالایی برای $\mu(\alpha)$ معلوم است. در این پایان‌نامه اثبات نسترنکو برای بهترین اندازه گنگی عدد $\ln ۲$ تا به امروز را ارائه خواهیم داد. در ادامه با استفاده از برآورد یک کران پایین بر فرم‌های خطی لگاریتم‌های اعداد جبری، اندازه متعالی عدد $\log \alpha \neq ۰$ به ازای هر عدد جبری ناصفر α را به‌دست می‌آوریم.

کلمات کلیدی

عدد گنگ، اندازه گنگی، عدد جبری، عدد متعالی، اندازه تقریبی، اندازه متعالی.

فهرست مطالب

فهرست نمادها

مجموعه اعداد طبیعی	$\mathbb{N}$
مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مجموعه اعداد گویا	$\mathbb{Q}$
مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$
مجموعه‌ی تمام اعداد جبری	$\mathbb{A}$
کوچکترین مضرب مشترک اعداد $۱, \cdots, n$	d_n
درجه‌ی چندجمله ای $f(x)$	$\deg f(x)$
منظور لگاریتم در مبنای e است	$\log x$
حد	$\lim$
انتگرال	$\int$
عدد نپر	e
بی‌نهایت	∞
متعلق بودن	$\in$
نامساوی	$\neq$
کوچکترمساوی	$\leq$
بزرگترمساوی	$\geq$
ماکسیمم	$\max$
سوپریمم	$\sup$
حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها از x با ضرایب از $\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}[x]$
قسمت صحیح عدد x	$[x]$

قسمت کسری x	$\{x\}$
تابع گاما	$\Gamma(x)$
تابع دی گاما	$\psi(x)$
تابع تتا	$\theta(x)$
مشتق تابع گاما	$\Gamma'(x)$
مشتق تابع f	$f'(x)$
قمت حقیقی تابع f	$\mathrm{Re}\ f(x)$
قسمت موهومی تابع f	$\mathrm{Im}\ f(x)$
ثابت اویلر	γ
ضریب دو جمله ای n بر k	$\binom{n}{k}$
مانده تابع f در نقطه‌ی $z=k$	$\mathrm{Res}_{z=k}f(z)$
مشتق مرتبه‌ی m-ام تابع f	$f^{(m)}$
حاصل ضرب متناهی از n عدد	$\prod_{i=۱}^{n}$
مجموع متناهی از n مقدار	$\sum_{i=۱}^{n}$
حاصل ضرب تمام اعداد اوّل p، نابیشتر از x.	$\prod_{p\leq x}$
حاصل ضرب تمام اعداد اوّل p.	$\prod_{p}$

پیشگفتار

مطالعه خواص حسابی لگاریتم اعداد جبری و به خصوص لگاریتم اعداد گویا بخش کلاسیک تئوری تقریب‌های دیوفانتی را به خود اختصاص می‌دهد. عدد $\ln ۲$ مدلی طبیعی برای مقایسه کردن روش‌های مختلف توسعه یافته برای به‌دست آوردن برآوردهای اندازه گنگی لگاریتم اعداد گویا می‌باشد، از این‌رو محاسبه‌ی اندازه گنگی $\ln ۲$ حائز اهمیت می‌باشد.

در این پایان‌نامه ابتدا بهترین نتیجه به‌دست آمده تا به امروز برای اندازه گنگی $\ln ۲$ را مطرح می‌کنیم. سپس روش به‌دست آوردن اندازه‌ی متعالی بودن عدد $\log \alpha$ به ازای هر عدد جبری ناصفر α به‌طوری‌که $\log \alpha \neq ۰$ را بیان می‌کنیم. یک مقدار زیاد از کار، قبلاً برای یافتن اندازه متعالی $\log \alpha$ انجام شده است. برای مثال، مقالات ماهلر[۱۷،۱۸،۱۹،۲۱] و گلفوند[۱۴] و فلدمن[۱۰،۱۱،۱۲،۱۳]. یک مطالعه اصولی از این موضوع در پایان‌نامه سیجیو[۵] آمده است و دقیق‌ترین نتایج تا این زمان اساساً متعلق به اوست[۵،۶،۷،۸].

این پایان‌نامه در سه فصل تدوین شده است. در فصل اوّل مقدمه، تعاریف و قضایای مقدماتی از نظریه اعداد و توابع مختلط را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم بهترین نتیجه‌ی به‌دست آمده برای اندازه گنگی $\ln ۲$ که توسط مارکوچی‌یو با روش نسترنکو[۲۴] در سال ۲۰۱۰ به‌دست آمده را مطرح می‌کنیم.

در فصل سوم نیز اندازه متعالی $\log \alpha \neq ۰$ که در آن α عدد جبری ناصفر می‌باشد را بیان و با استفاده از آن اندازه متعالی بودن $\ln ۲$ را به‌دست می‌آوریم.

فصل ۱

مقدمات و پیش‌نیازها

در این فصل تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز فصل‌های بعدی پایان‌نامه آورده شده است.

۱.۱ مقدمه

تعریف ۱.۱.۱. برای هر عدد گنگ α می‌توانیم اندازه‌ی خاصی تعریف کنیم، به‌طوری‌که به ما امکان تعیین فاصله‌ی بین α و اعداد گویا را بدهد. این اندازه، نمای گنگی یا اندازه گنگی عدد α نامیده می‌شود و با $\mu(\alpha)$ نشان داده می‌شود و به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$\mu(\alpha) = \sup\left\{\lambda : \quad |\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^{\lambda}}\right\}$$

به‌طوری‌که نامساوی بالا دارای بی‌نهایت جواب در اعداد گویای $\frac{p}{q}$ باشد.

در سال ۱۷۹۸ لاگرانژ[۱] قضیه‌ای در مورد کسرهای مسلسل اعداد گنگ اثبات نمود، که از آن نتیجه می‌شود به ازای هر عدد گنگ α، $\mu(\alpha) \geq ۲$ است.

قضیه معروف روت[۲] که در سال ۱۹۵۵ به اثبات رسیده است نشان می‌دهد که به ازای هر عدد جبری گنگ α، نامساوی $\mu(\alpha) \leq ۲$ برقرار می‌باشد، پس بنابراین از احکام گفته شده نتیجه می‌شود که به ازای هر عدد جبری گنگ α داریم $\mu(\alpha) = ۲$.

از کسرهای مسلسل اویلر[۳] برای e نتیجه می‌شود که $\mu(e) = ۲$.

متأسفانه مقدار دقیق نمای گنگی فقط برای تعداد کمی از اعداد مشخص می‌باشد و برای بعضی از اعداد تنها کران بالای $\mu(\alpha)$ معلوم است.

برای مثال بهترین برآورد اندازه گنگی عدد π توسط سالیخوف[۴] [۲۸] در سال ۲۰۰۸ به اثبات رسیده است که به شکل زیر می‌باشد

$$\mu(\pi) \leq ۷/٦۰٦۳۰۸\ldots$$

در سال ۱۹٦۴ بیکر[۵] [۲] ثابت کرد که $\mu(\ln ۲) \leq ۱۲/۵$.

این برآورد چندین بار در کارهای دانیلوف[٦] [۹]، آلادی[۷] و رابینسون[۸] [۱]، چودنوُسکی[۹] [۳،۴] و رین[۱۰] [۲٦] بهبود یافته است.

درسال ۱۹۸۷ روخادزه[۱۱] [۲۷] تغییر اساسی در روش ساخت تقریب‌های گویا برای $\ln ۲$ داد و برآورد زیر را به‌دست آورد:

---

۱ Lagrange

۲ Roth

۳ Euler

۴ Salikhov

۵ Baker

٦ Donilov

۷ Alladi

۸ Robinson

۹ Chudnovskii

۱۰ Rhin

۱۱ Rukhadze

$$\mu(\ln ۲) \leq ۳/۸۹۳$$

هاتا[12] [۱۵] با همان روش و محاسبات دقیق‌تر این نتیجه را به‌دست آورد:

$$\mu(\ln ۲) \leq ۳/۸۹۱۳۹۹\cdots$$

این رکورد تا سال ۲۰۰۹ دوام آورد و سپس مارکوُچی‌یو[13] [۲۲] ثابت کرد که

$$\mu(\ln ۲) \leq ۳/۵۷۴۵۵۳۹۰\cdots$$

در سال ۲۰۱۰ نسترنکو[14] اثبات ساده‌تری از نتیجه‌ی مارکوُچی‌یو را ارائه نمود، که در این پایان‌نامه بررسی خواهد شد.

تعریف ۲.۱.۱. گیریم $\varphi(X, Y)$ یک تابع با مقادیر حقیقی تعریف شده برای $X \geq ۱$ و $Y \geq \log ۱۶$ (این فقط برای راحتی کار است) باشد. اگر ω یک عدد متعالی باشد، گوییم φ اندازه متعالی بودن عدد ω است هرگاه

$$\log |P(\omega)| \geq -\varphi(N, \log H)$$

به ازای تمام چندجمله‌ای‌های نابدیهی $P \in \mathbb{Z}[x]$ از درجه حداکثر N و ارتفاع حداکثر H برقرار باشد. علاوه بر این گوییم که عدد حقیقی $\tau \geq ۲$، شبه متعالی می‌باشد هرگاه ثابت $c(\omega, \tau) > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اندازه زیر

$$c(\omega, \tau)(\log H + N)^{\tau}$$

اندازه متعالی بودن ω باشد.

[12] Hata

[13] Marcovecchio

[14] Nesterenko

۲.۱ تعاریف و لم های مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. گوییم $z_\circ$ نقطه تکین تابع f است اگر f در نقطه $z_\circ$ تحلیلی نباشد.

تعریف ۲.۲.۱. نقطه تکین $z_\circ$، یک نقطه تکین منفرد f نامیده می‌شود هر گاه f در یک همسایگی محذوف $z_\circ$ تحلیلی باشد، به عبارت دیگر عدد مثبتی مانند r وجود داشته باشد به‌طوری که f در ناحیه

$$N(z_\circ, r) = \{z \mid \circ < |z - z_\circ| < r\}$$

تحلیلی باشد.

تعریف ۳.۲.۱. فرض می‌کنیم $z_\circ$ یک نقطه‌ی تکین منفرد تابع $f(z)$ باشد. در این صورت منظور از مانده‌ی $f(z)$ در نقطه $z_\circ$ که با

$$Res_{z=z_\circ} f(z)$$

نشان داده می‌شود، ضریب $c_{-۱}$ در بسط لوران زیر است

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_\circ)^n.$$

قضیه ۴.۲.۱. (قضیه مانده) فرض کنیم C مسیر ساده‌ی بسته‌ای در جهت مثبت باشد. اگر تابع f درون و روی C به‌جز در تعداد متناهی نقطه‌ی تکین z_k $(k = ۱, ۲, \ldots, N)$ که در داخل C هستند، تحلیلی باشد، آن‌گاه

$$\frac{۱}{۲\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{k=۱}^{N} Res_{z=z_k} f(z).$$

اثبات: برای اثبات مرجع [۳۰] صفحه‌ی ۲۴۳ را ببینید. □

قضیه ۵.۲.۱ $z_\circ$ نقطه‌ی تکین منفرد تابع f، یک قطب ساده از مرتبه‌ی m است اگر و تنها اگر $f(z)$ را بتوان به صورت زیر نوشت

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_\circ)^m} \tag{۱}$$

که در آن، $\phi(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی و ناصفر است. و به‌علاوه

$$Res_{z=z_\circ} f(z) = \phi(z_\circ) \qquad \text{اگر } m = ۱$$

و

$$Res_{z=z_\circ} f(z) = \frac{\phi^{(m-۱)}(z_\circ)}{(m-۱)!} \qquad \text{اگر } m \geq ۲$$

اثبات: برای اثبات قضیه ابتدا فرض می‌کنیم $f(z)$ به صورت (۱) باشد. با توجه به این‌که $\phi(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی است، پس در یک همسایگی $|z-z_\circ| < \varepsilon$ از جمله $z_\circ$ دارای سری تیلور به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \phi(z_\circ) + \frac{\phi'(z_\circ)}{۱!}(z-z_\circ) + \frac{\phi''(z_\circ)}{۲!}(z-z_\circ)^۲ + \cdots \\ &+ \frac{\phi^{(m-۱)}(z_\circ)}{(m-۱)!}(z-z_\circ)^{m-۱} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_\circ)}{n!}(z-z_\circ)^n \end{aligned}$$

و از عبارت (۱) نتیجه می‌شود که اگر $\circ < |z-z_\circ| < \varepsilon$ آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\phi(z_\circ)}{(z-z_\circ)^m} + \frac{\phi'(z_\circ)/۱!}{(z-z_\circ)^{m-۱}} + \frac{\phi''(z_\circ)/۲!}{(z-z_\circ)^{m-۲}} + \cdots \\ &+ \frac{\phi^{(m-۱)}(z_\circ)/(m-۱)!}{(z-z_\circ)} + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_\circ)}{n!}(z-z\circ)^{n-m} \end{aligned}$$

از این نمایش سری لوران، همراه با این واقعیت که $\phi(z_\circ) \neq \circ$ معلوم می‌شود که در واقع $z_\circ$ یک قطب مرتبه m تابع f است و با توجه به ضریب $۱/(z-z_\circ)$ نتیجه می‌شود که مانده $f(z)$ در $z_\circ$ همان‌طور است که در حکم قضیه آمده است.

حال فرض کنیم که فقط بدانیم ، $z_\circ$ یک قطب مرتبه m تابع $f(z)$ باشد یا این‌که $f(z)$ دارای نمایش سری لوران زیر باشد

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^n + \frac{b_۱}{z-z_\circ} + \frac{b_۲}{(z-z_\circ)^۲} + \cdots \\ &+ \frac{b_{m-۱}}{(z-z_\circ)^{m-۱}} + \frac{b_m}{(z-z_\circ)^m}, \quad (b_m \neq \circ) \end{aligned}$$

که در قرص محذوف $R > |z - z_\circ| > \circ$ معتبر است.

تابع $\phi(z)$ که با روابط

$$\phi(z) = \begin{cases} (z-z_\circ)^m f(z), & z \neq z_\circ \\ b_m, & z = z_\circ \end{cases}$$

تعریف می‌شود به‌وضوح دارای نمایش سری توانی زیر در سراسر قرص کامل $R > |z - z_\circ|$ است

$$\phi(z) = b_m + b_{m-۱}(z-z_\circ) + \cdots + b_۲(z-z\circ)^{m-۲} + b_۱(z-z_\circ)^{m-۱} + \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n(z-z_\circ)^{m+n}$$

در نتیجه $\phi(z)$ در آن قرص و به‌ویژه در $z_\circ$ تحلیلی است. از طرفی چون $\phi(z_\circ) = b_m \neq \circ$ عبارت (۱) ثابت شده و اثبات کامل می‌شود. □

لم ۶.۲.۱. برای هر عدد حقیقی $x \geq ۲$ نامساوی زیر برقرار است

$$\prod_{p \leq x} p < ۴^x.$$

اثبات: ابتدا نامساوی را برای xهای صحیح ثابت می‌کنیم. اثبات را با استقرا روی x انجام می‌دهیم. به ازای $x = ۲, ۳, ۴$ نامساوی بدیهی است. فرض کنیم به ازای تمام اعداد صحیح کمتر از x داده شده، نامساوی درست باشد. اگر x زوج باشد، یعنی $x = ۲m$، $m \in \mathbb{N}$، $m \geq ۲$، آن‌گاه داریم

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq ۲m} p < \prod_{p \leq ۲m-۱} p = \prod_{p \leq x-۱} p < ۴^{x-۱} < ۴^x.$$

حال اگر x فرد باشد، $x = ۲m - ۱$، $m \in \mathbb{N}$، $m \geq ۲$، داریم

$$\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq m} p \prod_{m < p \leq ۲m-۱} p < ۴^m \cdot \binom{۲m-۱}{m} \leq ۴^m \cdot ۲^{۲m-۲} = ۴^x$$

نامساوی ماقبل آخر از آن‌جا نتیجه می‌شود که ضریب دوجمله‌ای $\binom{2m-1}{m}$ بر عدد $\prod_{m<p\leq 2m-1} p$ بخش‌پذیر است، چون هر عدد اوّل $m < p \leq 2m-1$ صورت $\binom{2m-1}{m}$ را عاد می‌کند ولی مخرج $\binom{2m-1}{m}$ را عاد نمی‌کند، پس بنابراین $\prod_{m<p\leq 2m-1} p < \binom{2m-1}{m}$.

برای اطمینان از نامساوی اخیر توجه می‌کنیم که

$$(1+y)^{2m-1} = \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} y^k$$

با قرار دادن $y = 1$ در تساوی بالا به‌دست می‌آوریم

$$2^{2m-1} = \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m-1}{k} > \binom{2m-1}{m-1} + \binom{2m-1}{m} = 2\binom{2m-1}{m}$$

که از آن نیز نتیجه می‌شود

$$\binom{2m-1}{m} < 2^{2m-2}.$$

به این ترتیب نامساوی برای xهای صحیح به اثبات می‌رسد.

حال اگر x عددی ناصحیح باشد، آن‌گاه داریم

$$\prod_{p\leq x} p = \prod_{p\leq [x]} p < 4^{[x]} < 4^x$$

جایی‌که $[x]$ قسمت صحیح x است و لم به اثبات می‌رسد. □

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم $x > 0$ عددی حقیقی باشد. در این صورت تابع $\pi(x)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1.$$

تعریف ۸.۲.۱ اگر $x > 0$ عددی حقیقی باشد، آن‌گاه تابع چبیشف که با $\theta(x)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

تعریف ۹.۲.۱. اگر $x \geq 0$ عددی حقیقی باشد، آن‌گاه تابع $\psi(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \ln p$$

که در آن مجموع روی عدد اول p و عدد صحیح مثبت m گرفته می‌شود. با مجموع گرفتن روی m به‌دست می آوریم:

$$\psi(x) = \sum_{p \leq x} \left[\frac{\ln x}{\ln p}\right] \ln p$$

که در آن مجموع فقط روی عدد اوّل p گرفته می‌شود.

توجه: d_n کوچکترین مضرب مشترک اعداد صحیح $1, 2, \cdots, n$ تعریف می‌شود.

لم ۱۰.۲.۱. برای هر عدد مثبت n داریم:

$$\ln d_n = \psi(n).$$

اثبات: اگر هر عدد صحیح m را که $1 \leq m \leq n$ به عوامل اول تجزیه کنیم، داریم

$$m = \prod_{p \leq m} p^{\alpha_p(m)}$$

که در آن α_p عدد صحیح نامنفی می‌باشد. در تجزیه‌ی d_n به عوامل اول، تمام اعداد اول کمتر از n با بیشترین توان ظاهر می‌شوند، یعنی

$$d_n = \prod_{p \leq n} p^{\alpha_p}, \qquad \alpha_p = \max\left(\alpha_p(m)\right)_{1 \leq m \leq n} \tag{2}$$

پس داریم

$$p^{\alpha_p} \leq n$$

حال از دو طرف نامساوی بالا $\ln$ می‌گیریم. بنابراین داریم

$$\alpha_p \ln p \leq \ln n$$

یا

$$\alpha_p \leq \tfrac{\ln n}{\ln p}$$

پس می‌توان رابطه(۲) را به صورت زیر نوشت

$$d_n = \prod_{p \leq n} p^{\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]}$$

حال از دو طرف نامساوی بالا $\ln$ می‌گیریم. پس نتیجه می‌شود

$$\ln d_n = \sum_{p \leq n} \left[\frac{\ln n}{\ln p}\right] \ln p$$

که با توجه به تعریف تابع $\psi(x)$ به‌دست می‌آوریم

$$\ln d_n = \psi(n).$$

□

قضیه ۱.۲.۱۱. فرض کنیم تابع f در حوزه‌ی D تحلیلی باشد که حوزه‌ی D شامل قطعه‌ای از محور xها و نسبت به آن محور متقارن است. در این صورت برای هر نقطه‌ی z در حوزه‌ی D داریم

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z})$$

اگر و فقط اگر به ازای هر نقطه‌ی x بر آن قطعه، $f(x)$ حقیقی باشد.

اثبات: برای اثبات مرجع [۲۹] صفحه‌ی ۷۹ را ببینید. □

فصل ۲

اندازه گنگی $\ln ۲$

این فصل در سه بخش تدوین شده است. در بخش اول تعاریف و لم‌های مورد نیاز برای اثبات قضیه اصلی را ارائه می‌دهیم. در بخش دوم به اثبات دو فرمول مجانبی می‌پردازیم و در بخش سوم بهترین برآورد به‌دست آمده برای اندازه گنگی $\ln ۲$ را به‌دست می‌آوریم.