دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته: ریاضی محض- گرایش آنالیز

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

ابردوری بودن عملگر های حاصل از حساب تابعی

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

مجید آریش

خرداد ۸۹

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته: ریاضی محض- گرایش آنالیز

دانشکده علوم

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

ابردوری بودن عملگر های حاصل از حساب تابعی

استاد راهنما:

دکتر بهمن یوسفی

استاد مشاور:

دکتر فریبا ارشاد

نگارش:

مجید آریش

خرداد ۸۹

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان: **ابردوری بودن عملگر های حاصل از حساب تابعی**

که توسط **مجید آریش** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: **۱۹ / ۰۳ / ۱۳۸۹** نمره: **۱۸ / ۰۰** درجه ارزشیابی : **عالی**

اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد دکتر بهمن یوسفی	**استاد راهنما**	**استاد**	
۲- خانم دکتر فریبا ارشاد	**استاد مشاور**	**استادیار**	
۳- آقای دکتر احمد خاکساری	**استاد داور**	**استادیار**	
٤- خانم دکتر محبوبه حسین یزدی	**نماینده تحصیلات تکمیلی**	**استادیار**	

تقدیم به:

پدر فداکار و مادر دلسوزم

که همواره حامی و پشتیبان من در زندگی بوده اند

و

همسر مهربانم

که بدون هیچ چشم داشتی، یار من و غمخوار

رنج هایم است.

سپاسگزاری:

اکنون که با توجه و عنایت باری تعالی این پایان نامه به اتمام رسید بر خود فرض می دانم نهایت تشکر خود را از استاد راهنمای حکیمم جناب استاد دکتر بهمن یوسفی بیان نمایم، کسی که از زمان آشنایی با ایشان، چیزهای زیادی از او آموختم و نیز از استاد مشاور گرامی ام، خانم دکتر ارشاد که هیچ گاه مهربانی هایش از ذهن و قلبم دور نخواهد شد.

هم چنین صادقانه ترین قدردانی خود را از پدر و مادر ارجمندم که بدون هیچ منّتی راهنمای مادی و معنوی ام در زندگی بوده اند و از همسر دلسوزم که پاکی و صداقتش مهم ترین انگیزه ام برای ادامه دادن بود می نمایم.

چکیده

این پایان نامه در سه فصل تهیه شده است. در فصل اول به بیان پاره ای از تعاریف و مقدمات خواهیم پرداخت که در فصل های آتی مورد استفاده هستند. در فصل دوم، برخی شرایط لازم برای ابردوری بودن تابع $f(T)$ مورد بررسی قرار می گیرد. به عنوان نمونه ثابت می شود که اگر $T: X \to X$ یک عملگر خطی، کران دار و پوشا بوده و f تابعی تحلیلی و غیر ثابت در یک همسایگی از $\sigma(T)$ باشد که $|f(0)|=1$، $0 \notin \sigma(f(T))$ و $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Ker\, T^n$ در X چگال باشد آنگاه $f(T)$ ابردوری است. همچنین خواهیم دید که اگر $T: X \to X$ یک عملگر خطی، کران دار و پوشا باشد که $dim\, Ker(T)=1$ و $\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Ker(T^n)}=X$، آنگاه برای هر تابع تحلیلی و غیر ثابت مانند f در همسایگی از $\sigma(T)$، عملگر $f(T)$ فرا دوری است. هرزوگ و اشمؤگر شرایطی را ارائه دادند که $f(T)$ حد عملگرهای فرادوری یا ابردوری روی X باشد. تی. میلر و وی. میلر با استفاده از نظریه طیف موضعی توانستند شرایط معادل محک ابردوری را بیان و اثبات کنند. ما در فصل سوم قصد داریم بدون استفاده از نظریه طیف موضعی و به کمک خواص مجموعه حلال کاتو برای یک عملگر، شرایط لازم برای ابردوری بودن $f(T)$ را بیان کرده و اثبات نماییم.

فهرست مطالب

ضمائم:

فصل اول

مقدمه

در این فصل تعاریف و برخی قضایائی را که در فصل های بعد به آنها نیاز داریم بیان می کنیم.

تعریف (۱ . ۱): فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. مجموعه ی عملگر های خطی و کران دار از X به Y را با $\mathcal{B}(X,Y)$ نشان می دهیم.

تذکر: در تمامی فصل ها، X یک فضای باناخ نامتناهی البعد ، مختلط و تفکیک پذیر و $\mathcal{L}(X)$ مجموعه ی تمام عملگر های خطی و کران دار روی X می باشد.

اگر X یک فضای باناخ[1] ، $x \in X$ و $T \in \mathcal{L}(X)$ باشد در اینصورت مدار بردار x به این صورت تعریف می شود:

$$Orb(T,x)=\left\{ T^n x : n \in \mathbb{N} \bigcup \{\circ\} \right\}.$$

تعریف (۱ . ۲): عملگر T را دوری[2] گویند هرگاه یک بردار x موجود باشد به طوری که مدار آن تحت T دارای تولید خطی چگال باشد.

تعریف (۱ . ۳): عملگر T روی X ابردوری[3] است هرگاه مداری چگال در X موجود باشد. مجموعه تمام عملگر های ابردوری در $\mathcal{L}(X)$ را با نماد $HC(X)$ نمایش می دهیم.

تعریف (۱ . ٤): اگر مجموعه

$$\mathbb{C} \cdot Orb(T,x)=\{ \lambda y : y \in Orb(T,x), \lambda \in \mathbb{C} \}$$

در X چگال باشد، آنگاه T فرادوری[4] نامیده می شود.

اگر S انتقال پسرو روی $\ell^{2}(\mathbb{N})$ باشد، آنگاه λS برای هر عدد مختلط λ با شرط $|\lambda| > \circ$ ابردوری است. بویژه اینکه S فرادوری می باشد. (رجوع شود به [۳۹]).

تعریف (۱. ۵) محک ابردوری: فرض کنید X یک فضای باناخ تفکیک پذیر بوده و $T \in \mathcal{L}(X)$. فرض کنید زیر مجموعه های چگال Y و Z در X و یک نگاشت $S : Y \to Y$ (احتمالا غیر خطی و بی کران) موجود باشد به طوری که

1- Banach space
2- cyclic
3- hypercyclic
4- supercyclic

$$١)\ TSy=y \qquad \forall y\in Y$$

$$٢)\ T^n x\to ٠ \qquad \forall x\in Z$$

$$٣)\ S^n y\to ٠ \qquad \forall y\in Y$$

در اینصورت T ابردوری است.

محک فوق بـه طور مستقل تـوسط آر. گدنـر[5] و جـی. شاپیرو[6] ([٤]) و نیـز تـوسط سـی. کیتای[7] ([١٣]) ارائه شده است. نسخه های دیگری از این محک در نتیجه ١. ٥ از [١٦] و [١٥ و ٢٠ و ٣٠] موجود است.

محک ابردوری یک شرط لازم نیست. برای مثال ثابت می شود جمع مستقیم عملگرهای ابردوری لزوما ابردوری نیست. (رجوع شود به [٢٣ و ٤٢]).

تعریـف (١ . ٦) محـک فـرادوری: فـرض کنیـد X یـک فـضای بانـاخ تفکیـک پـذیر بـوده و $T\in\mathcal{L}(X)$. فرض کنید زیر مجموعه های چگال Y و Z در X و یـک نگاشـت $S:Y\to Y$ (احتمالا غیر خطی و بی کران) موجود باشد به طوری که:

$$١)\ TSy=y \qquad \forall y\in Y$$

$$٢)\ lim_{n\to\infty}\left\|T^n z\right\|\left\|S^n y\right\|=٠ \qquad \forall z\in Z \text{ و } \forall y\in Y$$

در اینصورت T فرادوری است. (رجوع شود به [١٨ ، لم ٢ . ٥]).

تعریف (١ . ٧): فـرض کنید $T\in\mathcal{L}(X)$. هسته[8] T بـوسیله $N(T)$ نمایش داده مـی شود. بنابر این

$$N(T)=Ker(T)=\{x\in X: T(x)=٠\}.$$

و نیز هسته تعمیم یافته[9] بـوسیله $K(T)$ نـمایش داده مـی شود که بـصورت زیـر تعریف می گردد:

5- R.Gethner
6- j. Shapiro
7- C. Kitai
8- kernel
9- generalized kernel

$$K(T)=\bigcup_{k=1}^{\infty} N\left(T^{k}\right).$$

تعریف (۱ . ۸): $\rho_K(T)$ را بـه صـورت زیـر تـعریف کرده و آن را مجموعه حلال کاتو[10] ی T می نامیم.

$$\rho_K(T)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \text{بسته است}\ ran(\lambda-T),Ker(\lambda-T)\subset\bigcap_{n\in\mathbb{N}} ran(\lambda-T)^{n}\right\}$$

مجموعـه $\rho_K(T)$ بـاز اسـت و نیـز $\rho_K(T)=\rho_K\left(T^{*}\right)$. همچنـین مجموعـه هـای $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Ker(\lambda-T)^{n}}$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty} ran(\lambda-T)^{n}$ روی هـر مؤلفـه $\rho_K(T)$ ثابـت هـستند. (رجوع شود به [۱۸]).

تعریف (۱ . ۹): فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. مجموعه تمام تابعک های خطی و کران دار روی X را با نماد X^{*} نشان داده و آن را دوگان[11] فضای X گویند.

تعریف (۱ . ۱۰): فرض کنید X و Y دو فضای باناخ باشند. فرض کنید برای عملگر $A:X\to Y$ عملگر یکتایی چون $B\in\mathcal{B}\left(Y^{*},X^{*}\right)$ موجود باشد به طوری که برای هر $y^{*}\in Y^{*}$ و $x\in X$، $\left\langle Ax,y^{*}\right\rangle=\left\langle x,By^{*}\right\rangle$. در اینصورت B را با A^{*} نشان داده و آن را الحاق[12] A گویند.

قضیه (۱ . ۱۱): اگر H یک فضای هیلبرت[13] و $B\in\mathcal{L}(H)$ و A باشد، آنگاه $(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$.

اثبات: رجوع شود به [۱۲ ، قضیه ۲ . ٦ ، صفحه ۳۲] .

تعریف (۱ . ۱۲): فرض کنید X یک فضای باناخ باشد. اگر $M\subseteq X$ باشد، آنگاه

$$M^{\perp}=\left\{g\in X^{*}:\ g(M)=0\right\}.$$

قضیه (۱ . ۱۳): اگر $M\leq X$ باشد، آنگاه $\left(M^{\perp}\right)^{\perp}=M$.

اثبات: رجوع شود به [۱۲ ، نتیجه ۲ . ۹] .

10- Kato resolvent set
11- dual
12- adjoint
13- Hilbert space

قضیه (۱ . ١٤): اگر $A \subseteq X$ باشد، آنگاه $\left(A^{\perp}\right)^{\perp}$ زیر فضای خطی بسته تولید شده توسط A در X می باشد.

اثبات: رجوع شود به [۱۲ . نتیجه ۲ . ۱۰] .

قضیه (۱ . ۱۵): اگر $\mathcal{Y}$ یک منیفلد خطی در X باشد، آنگاه $\mathcal{Y}$ در X چگال است اگر و فقط اگر $\mathcal{Y}^{\perp}=(\circ)$.

اثبات: رجوع شود به [۱۲ ، نتیجه ۲ . ۱۱ ، صفحه ۱۱].

قضیه (۱ . ١٦): اگر H یک فضای هیلبرت و $A \in \mathcal{L}(H)$ باشد، آنگاه

$$Ker(A)=ran\left(A^{*}\right)^{\perp}.$$

همچنین $\left(Ker A\right)^{\perp}=cl\left(ran A^{*}\right)$.

اثبات: رجوع شود به [۱۲ ، قضیه ۲ . ۱۹ ، صفحات ۳۵ و ٣٦].

تعریف (۱ . ۱۷): $T \in \mathcal{L}(X)$ مفروض است. طیف[14] T را با نماد $\sigma(T)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma(T)=\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{وارون پذیر نیست } \lambda - T\}.$$

و نیز

$$\rho(T)=\mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

تعریف (۱ . ۱۸): فرض کنید $T \in \mathcal{L}(X)$ باشد. مجموعه

$$\rho_{su}(T)=\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda - T)X = X\}$$

را در نظر بگیرید. در اینصورت $\sigma_{su}(T)=\mathbb{C} \setminus \rho_{su}(T)$ را طیف پوشایی[15] T می نامند.

14- spectrum
15- surjectivity spectrum

طیف نقطه ای تقریبی[16] را با نماد $\sigma_{ap}(T)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma_{ap}(T)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:\exists\{x_n\}_n\subseteq X\ ;\|x_n\|=1\ (\forall n\in\mathbb{N})\ \text{و}\ \|(T-\lambda)x_n\|\to 0\right\}.$$

$\sigma_P(T)$ را به صورت

$$\sigma_P(T)=\{\lambda\in\mathbb{C}:Ker(\lambda-T)\neq(0)\}$$

تعریف کرده و آن را طیف نقطه ای[17] T می نامیم.

در این تعریف، اسکالر λ را مقدار ویژه و اگر h بردار غیر صفری در $Ker(\lambda-T)$ باشد، آن را یک بردار ویژه برای λ می نامیم.

قضیه (۱ . ۱۹) قضیه نگاشت باز[18]: اگر X و Y فضا های باناخ و $\Lambda:X\to Y$ یک تبدیل خطی کران‌دار، پوشا و یک به یک باشد، آنگاه $\delta>0$ موجود است به طوری که

$$\|\Lambda x\|\geq\delta\|x\|\qquad(\forall x\in X).$$

اثبات: رجوع شود به [٤١ . قضیه ۵ . ۹].

تعریف (۱ . ۲۰): اگر $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای در یک فضای باناخ باشد، آنگاه فضای باناخ دنباله‌های جمع - پذیر را با نماد $\oplus_{n=1}^{\infty}X_n$ نشان می‌دهیم که شامل دنباله هایی به فرم $x=(x_n)_{n=1}^{\infty}$ هستند که به ازای هر $n\geq 1$، $x_n\in X_n$. همچنین $\|x\|=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$.

اگر دنباله‌ای از عملگرهای کران دار مانند $\{T_n\}_n$ موجود بوده به طوری که $\{\|T_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ کران - دار باشد آنگاه $T=\oplus_{n=1}^{\infty}T_n$ یک عملگر خطی و کران دار روی $\oplus_{n=1}^{\infty}X_n$ می‌باشد.

تعریف (۱ . ۲۱): فرض کنید f یک تابع تحلیلی در یک همسایگی از $\sigma(T)$ باشد. برای $r>0$، $B(r)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم که در آن D قرص یکه می باشد.

16- proximate point spectrum
17- point spectrum
18- open mapping theorem

تعریف (۱ . ۲۲): فرض کنید $T \in \mathcal{L}(X)$ و $M \leq X$ باشد. M را یک زیر فضای پایا[19] برای T گویند هرگاه اگر $h \in M$ باشد، آنگاه $Th \in M$. به عبارت دیگر داشته باشیم $TM \subseteq M$. در اینصورت M را یک زیر فضای T - پایا برای X گویند.

تعریف (۱ . ۲۳): اگر H و K دو فضای هیلبرت و $A: H \to K$ یک عملگر کران دار باشد آنگاه A را نیمه- فردهولم چپ[20] گویند هرگاه یک عملگر کران دار چون $B: K \to H$ و یک عملگر فشرده چون C روی H موجود باشد به طوری که $BA = I + C$. به همین ترتیب A را نیمه- فردهولم راست[21] گویند هرگاه یک عملگر کران دار چون $B: K \to H$ و یک عملگر فشرده چون C' روی K موجود باشد به طوری که $AB = I + C'$.

A را یک عملگر نیمه- فردهولم[22] گویند اگر A یا نیمه- فردهولم چپ یا نیمه- فردهولم راست باشد. و نیز A را فردهولم گویند هرگاه A هم نیمه- فردهولم چپ و هم نیمه- فردهولم راست باشد.

A نیمه- فردهولم چپ است اگر و فقط اگر A^* نیمه- فردهولم راست باشد. (رجوع شود به [۱۲، صفحه ۳٤۹]).

قضیه (۱ . ۲٤): یک عملگر کران دار چون $T: H \to H'$ فردهولم است اگر و فقط اگر $ran\left(T\right)$ بسته و هر دو $Ker\left(T\right)$ و $Ker\left(T^*\right)$ متناهی البعد باشند.

اثبات: رجوع شود به [۱۲، نتیجه ۲ . ٤، صفحه ۳۵۲].

تعریف (۱ . ۲۵): اگر A یک عملگر نیمه- فردهولم باشد، آنگاه اندیس A را با $ind\left(A\right)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$ind\,(A) = dim\,Ker\,A - dim\left(ran\,A\right)^{\perp}$$

$$= dim\,ker\,A - dim\,ker\,A^*$$

19- invariant subspace
20- left semi- Fredholm
21- right semi- Fredholm
22- semi- Fredholm operator

تعریف (۱ . ۲٦): فرض کنید $T \in \mathcal{L}(X)$ باشد.در اینصورت مجموعه های زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\rho_F(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \text{فـردهولم اسـت } \lambda I - T\}$$

$$\rho_{S-F}(T)=\{\lambda\in\mathbb{C} : \text{نیمـه- فـردهولم اسـت } \lambda I - T\}$$

$$\rho_W(T)=\{\lambda\in\rho_F(T) : ind(\lambda I - T)=0\}$$

و نیز

$$\sigma_W(T)=\mathbb{C}\setminus\rho_W(T)$$

که آن را طیف وایل[۲۳] گویند.

همچنین مجموعه تمام نقاط تنها در $\sigma(T)$ که مشمول $\rho_F(T)$ اند را با $\sigma_0(T)$ نمایش می دهند.

باید توجه داشت که $\rho_F(T)$ و $\rho_{S-F}(T)$ و $\rho_W(T)$ زیر مجموعه های باز $\mathbb{C}$ هستند.

تعریف (۱ . ۲۷): گوئیم T دارای خاصیت بسط تک مقداری است هرگاه برای هر تابع تحلیلی چون $\varphi : D \to X$ که $D \subseteq \mathbb{C}$ باز است اگر $(\lambda I - T)\,\varphi(\lambda)=0$، آنگاه $\varphi(\lambda)\equiv 0$.

تعریف (۱ . ۲۸): مجموعه تمام توابع تحلیلی در یک همسایگی از $\sigma(a)$ را با $Hol(a)$ نمایش می دهند.

قضیه (۱ . ۲۹): قضیه نگاشت طیفی[۲٤] : اگر A یک جبر باناخ و $a \in A$ و $f \in Hol(a)$ باشد، آنگاه

$$\sigma(f(a))=f(\sigma(a)).$$

اثبات: رجوع شود به [۱۲ ، قضیه ٤ . ۱۰ ، صفحه ۲۰٤].

23-Weyl
24- Spectral mapping theorem

فصل دوم

ابردوری بودن تصویر یک عملگر تحت توابع تحلیلی

در این فصل ابتدا به بررسی چند گزاره مقدماتی و مهم می پردازیم و سپس برخی شرایط را که تحت آن تابع تحلیلی $f\left(T\right)$ برای هر $T\in\mathcal{L}\left(X\right)$ ابردوری می گردد بیان می کنیم.

گزاره (۲ . ۱): اگر $A\in\mathcal{L}\left(X\right)$ معکوس پذیر بوده و هر دو مجموعه

$$D=\left\{x\in X: A^{k}x\to 0\ \left(k\to\infty\right)\right\}$$

و

$$\tilde{D}=\left\{x\in X: A^{-k}x\to 0\ \left(k\to\infty\right)\right\}$$

در X چگال باشند آنگاه $A\in HC\left(X\right)$.

اثبات: رجوع شود به [۱۶ ، نتیجه ۱ . ۵]. □

گزاره (۲ . ۲): اگر $T\in\mathcal{L}\left(X\right)$ و $\bigcap_{n=1}^{\infty}T^{n}\left(X\right)=\left\{0\right\}$ باشد، آنگاه:

الف) $T\left(Y\right)\neq Y$ برای هر زیر فضای T - پایا و بسته Y که $Y\neq\left\{0\right\}$ است.

ب) $N\left(\lambda I-T\right)=\left\{0\right\}$ برای هر $\lambda\neq 0$.

پ) $\sigma\left(T\right)$ همبند است.

ت) $\sigma\left(T\right)=\sigma_{W}\left(T\right)$.

ث) اگر T یک نیمه- فردهولم باشد و $N\left(T\right)=\left\{0\right\}$. و اگر $\left(\alpha_{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در $\rho_{S-F}\left(T\right)-\left\{0\right\}$ باشد که $lim_{n\to\infty}\alpha_{n}=0$ آنگاه

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_{n}I-T\right)\left(X\right)=\left\{0\right\}.$$

اثبات: اگر $T\left(Y\right)=Y$ باشد، آنگاه $T\left(T\left(Y\right)\right)=T\left(Y\right)=Y$ و از آنجا $T^{2}\left(Y\right)=Y$.

با ادامه ی این روند نتیجه می شود

$$T^{n}\left(Y\right)=Y \qquad (\text{برای هر } n\in\mathbb{N})$$

اما $Y\leq X$ و $T\in\mathcal{L}\left(X\right)$ بنا بر این

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{n}(Y) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{n}(X)$$

اما $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{n}(Y) = Y$ در نتیجه

$$Y \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} T^{n}(X).$$

که طبق فرض $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{n}(X) = \{0\}$ و لذا $Y = 0$ که این تناقض است و به این ترتیب (الف) اثبات می شود.

اثبات (ب): چون $N(\lambda I - T) = Ker(\lambda I - T)$ و طبق (الف)، $\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{n}(X) = \{0\}$ بنا بر این واضح است که برای هر $\lambda \neq 0$، $N(\lambda I - T) = \{0\}$.

اثبات (پ): فرض کنید که $\sigma(T)$ همبند نباشد. بنا براین مجموعه های بسته و ناتهی ای چون σ و τ موجود اند به طوری که $\sigma(T) = \sigma \bigcup \tau$ و $\sigma \bigcap \tau = \varnothing$.

تابع f را متعلق به $Hol(T)$ طوری انتخاب می کنیم که $f \equiv 1$ روی σ و $f \equiv 0$ روی τ باشند.

قرار می دهیم $P = f(T)$. طبق [۲۸]، $P^{2} = P$.

$P(X)$ و $N(P)$ زیر فضاهای T - پایا و بسته ای از X اند و $\sigma(T|P(X)) = \sigma$ و نیز $\sigma(T \mid N(P)) = \tau$. حال می توان دید که $0 \in \sigma \bigcap \tau$ ([۱۲]). در نتیجه $\sigma \bigcap \tau \neq \varnothing$، که با فرض قضیه در تناقض است.

برای اثبات (ت)، ابتدا نشان می دهیم که $0 \in \sigma_{W}(T)$. برای این کار فرض می کنیم $0 \in \rho_{W}(T)$ باشد. C را مؤلفه همبندی از $\rho_{F}(T)$ در نظر می گیریم که در آن $0 \in C$ است. بنا براین اگر $\lambda \in C$ باشد، آنگاه $\lambda I - T$ فردهولم است.

$T \in \mathcal{L}(X)$ است و طبق قسمت (ب)، $N(\lambda I - T) = \{0\}$ برای هر $\lambda \neq 0$ و لذا $\lambda I - T$

وارون پذیر است ([۱۲]). اما $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T$ وارون پذیر است$\}$، بنا بر این $\lambda \in \rho(T)$ و داریم $C \subseteq \rho(T)$. اما $0 \in C$ بود پس $0 \in \rho(T)$ و متعاقباً $0 \notin \sigma(T)$ که این یک تناقض است. زیرا اگر $0 \in \rho(T)$، آنگاه T وارون پذیر بوده و در نتیجه پوشا است و $T^{n} X = X$ و بنا بر این $\bigcap T^{n} X \neq 0$ که تناقض است.

ثابت کردیم که

$$\circ \in \sigma_W(T) \qquad (۱ . ۲)$$

طبق [۱۲]،

$$\sigma_W(T) \subseteq \sigma(T) \qquad (۲ . ۲)$$

حال برای اثبات $\sigma(T) \subseteq \sigma_W(T)$، فرض می کنیم $\lambda \notin \sigma_W(T)$. طبق رابطه (۲ . ۱)، $\lambda \neq \circ$. چون $N(\lambda I - T) = \{\circ\}$، بنا بر این

$$\circ = ind(\lambda I - T) = -dim\ Ker(\lambda I - T)^*$$

اما طبق قضیه (۱ . ۱۶)،

$$Ker(\lambda I - T)^* = \left(ran(\lambda I - T)\right)^{\perp}$$

و لـذا $ran(\lambda I - T)$ در X چگال اسـت. از طرفی $\lambda I - T$ فـردهـولم بـوده، پس طبق قضـیه (۱ . ۲٤)، $ran(\lambda I - T)$ بسـته است. بنـا بر این $\lambda I - T$ وارون پذیر است و این یعنی اینکه $\lambda \notin \sigma(T)$ و لذا

$$\sigma(T) \subseteq \sigma_W(T) \qquad (۳ . ۲)$$

با توجه به روابط (۲ . ۲) و (۲ . ۳) اثبات کامل است .

اثبات (ث): T یک نیمـه – فـردهولم است. بنا بر این T^n نیـز بـرای هـر $n \in \mathbb{N}$ یـک نیمــه – فردهولم و طبق قضیه (۱ . ۲٤)، $T^n(X)$ بسته اسـت. عـلاوه بـر ایـن، $T^{-1} : T(X) \to X$ کـــران دار مـــی بـــاشد زیـــرا T از چـــپ وارون پذیـــر اســـت ([۱۲]). فــــرض کنیـــد $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(\alpha_n I - T)(X)$ باشد. بنا بـر این دنباله ای چون (x_n) در X موجود است بـه طوری که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x = (T - \alpha_n I)x_n$. در نتیجه

$$T x_n = \alpha_n x_n + x$$

بنا بر این

$$x_n = T^{-1}(T x_n) = T^{-1}(\alpha_n x_n + x)$$

و از آنجا

$$\|x_n\| = \left\|T^{-1}\left(\alpha_n x_n + x\right)\right\|$$

$$\le \left\|T^{-1}\right\|\left(\|x\| + |\alpha_n|\,\|x_n\|\right)$$

$$= \left\|T^{-1}\right\|\|x\| + \left\|T^{-1}\right\|\,|\alpha_n|\,\|x_n\|$$

در نتیجه روابط زیر را خواهیم داشت:

$$\|x_n\| - \left\|T^{-1}\right\|\,|\alpha_n|\,\|x_n\| \le \left\|T^{-1}\right\|\,\|x\|$$

$$\|x_n\|\left(۱ - \left\|T^{-1}\right\|\,|\alpha_n|\right) \le \left\|T^{-1}\right\|\,\|x\|$$

$$\|x_n\| \le \frac{\left\|T^{-1}\right\|\,\|x\|}{\left(۱ - \left\|T^{-1}\right\|\,|\alpha_n|\right)}$$

برای n به قدر کافی بزرگ. (توجه می کنیم که چون $\alpha_n \to ۰$ پس برای n به قدر کافی بزرگ، $۱ - \left\|T^{-1}\right\|\left|\alpha_n\right| \neq ۰$). بنا بر این $\left(x_n\right)_{n=۱}^{\infty}$ کران دار است.

طبق فرض، $lim_{n\to\infty}\alpha_n = ۰$ در نتیجه

$$lim_{n\to\infty} T x_n = lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n x_n + x\right) = x$$

بنـا بـر این $T x_n \to x$ وقتی $n \to \infty$. چـون $T\left(X\right)$ بسته است، پس $x \in T\left(X\right)$ و متعاقباً خواهیم داشت

$$\left(x_n\right)_{n=۱}^{\infty} \subseteq T(X)$$

زیرا $x_n = \frac{۱}{\alpha_n}\left(T x_n - x\right)$.

چون $T^n\left(X\right)$ برای هر n بسته است پس $T^۲\left(X\right)$ نیز بسته است و

$$T\left(x_n\right) \subseteq T^۲\left(X\right)$$