دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیزعددی

عنوان

فرمول‌های نوع تفاضلات متناهی فشرده داده‌های پراکنده پدید آمده از توابع پایه شعاعی

استاد راهنما

دکتر مسعود امان

استاد مشاور

دکتر مهدی پناهی

نگارنده

آزاده سورگی

دی ۱۳۹۳

چکیده

یک راه برای افزایش دقت طرح‌های تفاضلی متناهی، استفاده از فرمول‌های مشتق‌گیری عددی با دقت بالاست که این منجر به افزایش تعداد گره‌های موجود در الگو می‌شود. افزایش تعداد گره‌ها باعث بروز مشکلات متعددی می‌گردد. برای حل این مشکلات می‌توان از تقریب‌های تفاضلات متناهی فشرده استفاده کرد. در این پایان‌نامه تعمیمی از فرمول‌های تفاضلات متناهی فشرده برای داده‌های پراکنده و توابع پایه‌ی شعاعی ارائه شده است که هدف کم نگه‌داشتن تعداد گره‌های موجود در الگو را بدون کاهش دقت برآورده می‌سازد. علاوه‌براین، روش‌های هم‌مکانی توابع پایه شعاعی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی معرفی می‌شوند. کارایی فرمول‌های جدید تفاضلات متناهی فشرده مبتنی بر توابع پایه شعاعی را با اعمال آنها به چند مسأله نمونه مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: توابع پایه شعاعی، معادلات دیفرانسیل جزئی، روش تفاضلات متناهی، تفاضلات متناهی فشرده، بدون شبکه
تعداد صفحات پایان نامه: ۱۰۷

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و به دست‌های پر مهر آنان که درخت جوانی ام را شکوفا نمودند،

تقدیم به همسر مهربانم

که با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود،

و تقدیم به گل نازم ایلیا

که کودکی گمشده ام را در چهره معصومش پیدا کردم.

اینک به پاس آن همه ایثار، ثمره تلاشم را به قلب‌های مهربانشان تقدیم می کنم.

سپاس و ثنای بیکران معبودی را سزاست که امید همه جویندگان است و مقصد همه پویندگان.

به مصداق کلام شریف "من لم یشکر مخلوق، لایشکر الخالق" بسی شایسته است از زحمات استاد راهنمای فرهیخته و ارجمندم جناب آقای دکتر امان که با سعه صدر و درایت فراوان مرا مرهون هدایت و راهنمایی های ارزشمند خویش نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر پناهی که مشاوره ی این پایان نامه را بر عهده داشته اند کمال تشکر را دارم. از داوران محترم جناب آقای دکتر وزیری و سرکار خانم دکتر نصرآبادی که بر من منت نهاده و داوری این پایان نامه را پذیرفته اند، سپاسگزارم. همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی جناب آقای دکتر اقدامی قدردانی می نمایم.

در انتها از خانواده محترمم، همسر عزیزم و خواهران مهربانم که همیشه و در همه حال یاریگرم بوده اند، صمیمانه تشکر می کنم.

آزاده سورگی

دی ۱۳۹۳

فهرست مطالب

پیش گفتار

معادلات دیفرانسیل جزئی از مدل‌بندی ریاضی پدیده‌های فیزیکی و طبیعی حاصل می‌شوند. لیکن، امکان ارائه یک جواب تحلیلی برای این معادلات همواره مقدور نمی‌باشد. بنابراین پژوهشگران علوم و مهندسی برای حل این مسائل به روش‌های گسسته‌سازی عددی مانند تفاضلات متناهی[۱] (FDM)، روش عناصر متناهی[۲] (FEM) و روش‌های بدون شبکه و غیره روی آورده‌اند. اما در بسیاری از موارد، این روش‌ها برای کسب مرتبه بالایی از دقت، به یک شبکه‌بندی چگال‌تری احتیاج دارند. علاوه براین شبکه‌بندی نواحی غیرهندسی یا شبکه‌بندی نواحی با بعد بالاتر از دو، کار ساده‌ای نیست.

در سال‌های اخیر روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی[۳](RBF) برای درونیابی و تقریب داده های پراکنده [۴] مورد توجه فراوان قرار گرفته اند. استفاده از این توابع در درونیابی و تقریب داده‌های پراکنده دارای مزایای زیادی از جمله سرعت همگرایی طیفی، قابلیت برنامه نویسی و به کارگیری آسان، منحصر به فرد بودن درونیاب (در بیشتر موارد) و ...می باشد. توابع پایه شعاعی دارای متغیر یک بعدی مستقل از بعد مسأله هستند که به آسانی می‌توانند برای مسأله‌های با بعد بالا استفاده شوند. روش‌های تقریب و درونیابی بر پایه توابع پایه شعاعی به دو دسته‌ی سراسری[۵] و محلی[۶] تقسیم می‌شوند. در روش‌های سراسری از تمام نقاط هم‌مکانی موجود در دامنه استفاده می‌شود، این روش‌ها عموماً، حل دستگاههای فشرده، بدوضع و بزرگی را نتیجه می‌دهند. همچنین این روش‌ها به‌شدت نسبت به تغییر پارامتر شکل حساس هستند. لذا این روش‌ها برای حل مسائل با مقیاس بزرگ مناسب نیست. یکی از روش‌های موجود برای غلبه بر این مشکل تجزیه دامنه است. به عبارت دیگر برای حل یک مسئله در ابعاد وسیع دامنه محلی تولید می‌کنیم. که این منجر به تولید یک دستگاه خطی کوچک می‌شود، در نتیجه برای هر نقطه درونیابی دستگاه خطی کوچکتری را حل می‌کنیم که از پری ماتریس و عدد شرطی کاسته می‌شود.

روش بدون شبکه جدید که تعمیمی از روش تفاضلات متناهی برای داده‌های پراکنده است توسط شو[۴۸] [۷] ، تولستیخ [۵۲] [۸] و سیسیل [۹] [۱۰] ارائه شد. روش استفاده از درونیاب RBF برای بدست

---

[۱] Finite Difference Method
[۲] Finite Element Method
[۳] Radial Basic Functions
[۴] Scattered data approximation
[۵] global
[۶] local
[۷] Shu
[۸] Tolstykh

آوردن وزن‌های فرمول‌های تفاضلات متناهی را روش RBF − FD می‌نامیم. یکی از موضوعاتی‌که درباره‌ی استفاده از فرمول‌های تفاضلات متناهی برای داده‌های پراکنده مطرح است این است که برای افزایش دقت باید از تعداد گره‌های زیادی در الگو استفاده کرد. الگوهای بزرگتر ضمن آنکه باعث افزایش حجم محاسبات می‌شوند در نقاط مرزی و نزدیک مرز، مشکلاتی ایجاد می‌کنند. برای حل این مشکل روش تفاضلات متناهی فشرده [۱۰] (CFD) را معرفی می‌کنیم. این روش نخستین بار توسط کولاتز[۱۴] ، کوپال[۳۴] و لل[۳۶] مطرح شده‌اند. در [۳۶] یک گروه از تفاضلات متناهی فشرده ارائه شده است. ایده اصلی درباره این روش این است که بدون تغییر الگو، فرمول FD یک ترکیب خطی از مشتقات تابع u را در گره‌های اطراف گره مورد نظر شامل شود. درحالت یک بعدی وزن‌های فرمول‌های CFD را می‌توان به راحتی با استفاده از تقریب‌های پاده به‌دست آورد. برای داده‌های پراکنده و برای توابع پایه شعاعی، تقریب پاده‌ای موجود نیست. به‌جای آن یک روش مبتنی بر درونیابی هرمیت را معرفی می‌کنیم. روش مبتنی بر درونیابی هرمیت توابع پایه شعاعی برای به‌دست آوردن وزن‌های فرمول CFD را روش RBF − HFD می‌نامیم. نتایج عددی در حل PDEs نشان می‌دهد که روش RBF − HFD دقیق‌تر از روش RBF − FD با همان تعداد گره در الگو است.

این پایان نامه شامل ۳ فصل است. در فصل اول به معرفی توابع پایه شعاعی، توابع معین مثبت و درونیابی داده‌های پراکنده می‌پردازیم. در فصل دوم روش تفاضلات متناهی فشرده را معرفی می‌کنیم و چگونگی به‌دست آوردن فرمول‌های CFD را برای نقاط درونی و مرزی شرح می‌دهیم و تقریب پاده را برای به‌دست آوردن ضرایب فرمول‌های CFD ارائه می‌کنیم. در فصل سوم استفاده از توابع پایه شعاعی در حل PDEs را شرح می‌دهیم. روش‌های هم مکانی را به طور کامل توضیح می‌دهیم و چگونگی به‌دست آوردن فرمول‌های تفاضلات متناهی فشرده مبتنی بر توابع پایه‌ی شعاعی را برای داده‌های پراکنده بیان می‌کنیم.

[۹] Cecil

[۱۰] Compact Finite Difference

فصل ۱
مقدمه‌ای بر توابع پایه شعاعی

. در سال‌های اخیر روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی[۱](RBF) برای درونیابی و تقریب داده های پراکنده [۲] مورد توجه فراوان قرار گرفته اند. استفاده از این توابع در درونیابی و تقریب داده‌های پراکنده دارای مزایای زیادی از جمله سرعت همگرایی طیفی، قابلیت برنامه نویسی و به کارگیری آسان، منحصر به فرد بودن درونیاب (در بیشتر موارد) و ...می باشد. در روش‌های تقریب چندمتغیره استاندارد (اسپلاین و عناصر متناهی) به یک شبکه بندی برای تعریف توابع یا عناصر نیاز داریم که در فضاهای با بعد بیشتر از دو کار دشواری است اما توابع پایه شعاعی دارای متغیر یک بعدی مستقل از بعد مسأله هستند که به آسانی می‌توانند برای مسأله‌های با بعد بالا استفاده شوند. در این بخش مفاهیم اساسی چون توابع پایه شعاعی، درونیابی داده‌های پراکنده و توابع معین مثبت را معرفی می کنیم. توابع معین مثبت و توابع کاملاً یکنوا را به طور کامل شرح می‌دهیم و ایده اضافه کردن چندجمله‌ای به درونیاب حاصل از توابع پایه شعاعی را بیان می‌کنیم که این منجر به معرفی توابع معین مثبت مشروط می‌شود. در ادامه به بررسی توابع پایه شعاعی با تکیه‌گاه فشرده می‌پردازیم.

۱.۱ معرفی توابع پایه شعاعی

در ابتدا برای فهم بهتر روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی تعاریف زیر را بیان می کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. تابع $\Phi : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ را شعاعی گوییم، هرگاه تابع یک متغیره‌ای مانند $\varphi : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\Phi(x) = \varphi(r)$$

که در آن $r = \|x\|$ و $\|.\|$ نرمی روی $\mathbb{R}^d$ است. (به عنوان نمونه نرم اقلیدسی)

تابع $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ با بردار ورودی $x = [x_1, x_2, \dots, x_d]$ و $x_c = [(x_c)_1, (x_c)_2, \dots, (x_c)_d]$ تابع شعاعی است، اگر بتوان آن را به صورت $\Phi(x, x_c) = \varphi(r)$ بیان کرد، که در آن $r = \|x - x_c\|$ یعنی فاصله اقلیدسی بین x و x_c است. تابع شعاعی حول نقطه x_c که مرکز تابع نامیده می‌شود، به طور شعاعی متقارن است. برای استفاده از $\varphi(r)$ به عنوان یک تابع پایه در روش های RBF ، x_c یک نقطه ثابت و x متغیر ورودی است. در حقیقت تابع پایه شعاعی $\varphi(r)$ ، تابعی یک متغیره و پیوسته است که برای $r \geqslant 0$ تعریف شده و توسط نرم اقلیدسی روی $\mathbb{R}^d$ شعاعی می‌شود.
توابع پایه شعاعی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از:

[۱] Radial Basic Functions
[۲] Scattered data approximation

۱. چند ربعی [۳] (MQ) $\varphi(r) = (r^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \quad \varepsilon > 0$

۲. معکوس چندربعی [۴] (IMQ) $\varphi(r) = (r^2 + \varepsilon^2)^{-\frac{1}{2}} \quad \varepsilon > 0$

۳. گاوسی [۵] (GA) $\varphi(r) = e^{-\varepsilon r^2} \quad \varepsilon > 0$

۴. اسپلاین خطی [۶] (LS) $\varphi(r) = r$

۵. اسپلاین صفحه نازک [۷] (TPS) $\varphi(r) = r^2 \ln(r)$

۶. اسپلاین مکعبی [۸](CS) $\varphi(r) = r^3$

۷. اسپلاین مرتبه پنج [۹] (QS) $\varphi(r) = r^5$

به ε پارامتر شکل [۱۰] توابع پایه شعاعی می گویند که در ادامه به طور کامل معرفی خواهند شد. دسته دیگری از RBFs ، معروف به توابع پایه شعاعی با محمل فشرده [۱۱] (CSRBFs) هستند که توسط وندلند[۱۲] ، وو [۱۳] و بوهمن [۱۴] معرفی شدند[۵۶، ۶۰، ۸] . ایده اصلی CSRBFs ، استفاده از یک چندجمله‌ای برحسب r به عنوان یک تابع با محمل[۱۵] $[0, 1]$ است. این توابع در $\mathbb{R}^d$ به ازای تمام d های کمتر یا مساوی مقدار ثابت d_0 معین مثبت هستند [۵۶] . تعریف جامع CSRBFs ، به شکل زیر است.

۸. محمل فشرده

$$\phi_{l,k}(r) = (1 - r)_+^l . p(r) \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \text{یک چندجمله ای } p$$

با شرایط زیر

$$(1 - r)_+^l = \begin{cases} (1 - r)^l & 0 \leqslant r < 1 \\ 0 & r \geqslant 1 \end{cases}$$

که $l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1$ عدد بعد [۱۶] ، $2k$ میزان همواری (یک تابع دارای میزان همواری m است هرگاه پیوسته باشد و تمام مشتقات آن تا مرتبه m موجود و پیوسته باشد.) و $p(r)$ یک چندجمله‌ای

[۳] Multiquadric
[۴] Invers Multiquadric
[۵] Gaussian
[۶] Linear spline
[۷] Thin-Plate spline
[۸] Cubic spline
[۹] Quintic Spline
[۱۰] shape parameter
[۱۱] Compactly supported Radial Basis Functions
[۱۲] Wendland
[۱۳] Wu
[۱۴] Buhman
[۱۵] محمل یک تابع، مجموعه نقاطی از دامنه است که مقدار تابع به ازای آن ناصفر می‌شود.
[۱۶] dimension number

مشخص است. در ادامه تعدادی از توابع وندلند CSRBFs که در مقالات بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد برای $d = ۳$ معرفی می‌شود. برای مطالعه بیشتر به [۵۵، ص۱۱۹] مراجعه شود.

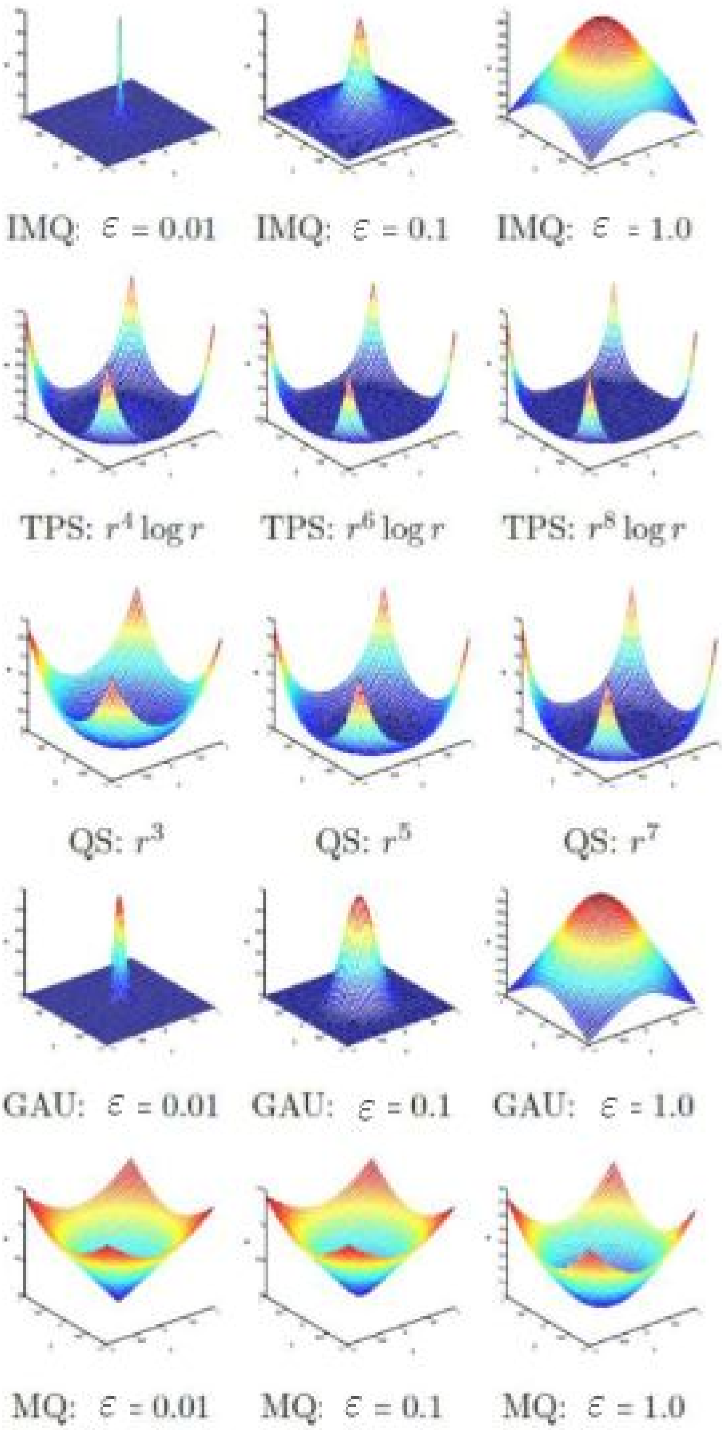
میزان همواری	RBF
$C^{۰}$	$\varphi_{۲,۰}(r) = (۱-r)_+^{۲}$
$C^{۲}$	$\varphi_{۳,۱}(r) = (۱-r)_+^{۴}(۴r+۱)$
$C^{۴}$	$\varphi_{۴,۲}(r) = (۱-r)_+^{۶}(۳۵r^{۲}+۱۸r+۳)$
$C^{۶}$	$\varphi_{۵,۳}(r) = (۱-r)_+^{۸}(۳۲r^{۳}+۲۵r^{۲}+۸r+۱)$

توابع GA, MQ, IMQ به دلیل داشتن پارامتر ثابت ε بیشتر از بقیه مورد استفاده قرار گرفته اند که در ادامه تاثیرات مطلوب این پارامتر را بررسی خواهیم کرد.
شکل (۱.۱) نمودار بعضی از توابع پایه شعاعی را نشان می‌دهد. در هر سطر یکی از توابع پایه شعاعی با سه مقدار مختلف ε رسم شده است. همانطور که می‌بینیم با افزایش ε تابع هموارتر می‌شود.

۱.۱.۱ پارامتر شکل تابع پایه شعاعی

ما در انتخاب پارامتر شکل توابع پایه شعاعی آزاد نیستیم، بلکه مقدار ε نقش تعیین‌کننده‌ای در دقت روش‌های مبتنی بر توابع پایه شعاعی برای درونیابی و تقریب ایفا می‌کند. در درونیابی MQ مادیچ[۱۷] نشان داد که سرعت همگرایی از مرتبه $O(\vartheta^{\frac{\varepsilon}{h}})$ است که $\vartheta < ۱$ و h متوسط فاصله بین مراکز است. کاهش ε ، دقت درونیابی را بهبود می‌دهد ولی این کاهش ε به ساختن ماتریس درونیاب بسیار بدوضع منجر می‌شود [۴۷] . این سبک و سنگین کردن بین دقت و عدد شرطی ماتریس به اصل عدم قطعیت [۱۸] معروف است. مطالعات عددی توسط چنگ [۱۹] و همکاران [۱۱] نشان داد هنگام استفاده از MQ ، برای PDEs بیضوی سرعت همگرایی روش نامتقارن کانزا [۲۰] برابر $O(\xi^{\frac{\varepsilon}{h}})$ است که ξ یک مقدار ثابت است. از مطالب گفته شده به وضوح می‌توان نتیجه گرفت که پارامتر شکل، دقت روش را به شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. متأسفانه نتایج نظری قوی برای انتخاب مقدار بهینه‌ی ε وجود ندارد. مطالعات تجربی توسط محققان برای انتخاب مناسب ε انجام شده، که در ادامه به مواردی از آنها اشاره می‌کنیم.

[۱۷] Madych
[۱۸] uncertainty principle
[۱۹] Cheng
[۲۰] Kansa



شکل ۱.۱: نمودار تعدادی از توابع پایه شعاعی درناحیه $[-۱,۱]\times[-۱,۱]$

تاکنون دو نوع روش برای تعیین پارامتر شکل توابع پایه شعاعی معرفی شده است. در نوع اول یک مقدار ثابت ε ، برای تمام مراکز به‌دست می‌آید و در نوع دوم، مقدار ε برای مراکز مختلف متغیر است. در ابتدا به معرفی پارامتر شکل ثابت می‌پردازیم.
روش‌های متعددی برای انتخاب پارامتر شکل ثابت پیشنهاد شده‌اند. هاردی[۲۱] پارامتر ε را به صورت زیر در نظر گرفت

$$\varepsilon = ۰/۸۱۵d, \tag{۱.۱}$$

که در آن $d = \frac{۱}{m}\sum_{i=۱}^{m} d_i$ ، d_i فاصله $i-$امین مرکز از نزدیکترین مرکز به آن است و m تعداد مراکز می باشد[۲۵] .
فرانک [۲۲] پارامتر ε را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\varepsilon = ۱/۲۵\frac{D}{\sqrt{m}} \tag{۲.۱}$$

که در آن D قطر کوچکترین دایره‌ای است که شامل همه مراکز می‌باشد[۱۹] .
افراد زیادی تلاش کردند تا یک مقدار بهینه ثابت برای ε ارائه دهند. برای مطالعه بیشتر به [۱۸، ۲۳، ۳۲] مراجعه شود.
در روش‌هایی با پارامتر شکل متغیر، از مقادیر مختلف ε برای مراکز مختلف استفاده می‌شود. به عبارت دیگر برای هرکدام از توابع پایه شعاعی به‌کار رفته مقدار ε متفاوت است. در این روش‌ها پارامتر شکل یک ماتریس$N \times ۱$ است که توسط فرمول‌های زیر محاسبه می‌شود.

۱- پارامتر شکل خطی متغیر

$$\varepsilon = \varepsilon_{min} + \left(\frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{N-۱}\right) j; \qquad j = ۰, ۱, \ldots, N-۱ \tag{۳.۱}$$

۲- پارامتر شکل نمایی متغیر

$$\varepsilon_j = \left[\varepsilon_{min}^{۲}\left(\frac{\varepsilon_{max}^{۲}}{\varepsilon_{min}^{۲}}\right)^{\frac{j-۱}{N-۱}}\right]^{\frac{۱}{۲}}; \qquad j = ۱, ۲, \ldots, N-۱ \tag{۴.۱}$$

---
[۲۱] Hardy
[۲۲] Franke

۳- پارامتر شکل تصادفی متغیر

$$\varepsilon = \varepsilon_{min} + (\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}) rand(1, N) \qquad (5.1)$$

در این روش‌ها ε_{min} و ε_{max} به ترتیب کمترین و بیشترین مقدار پارامتر شکل هستند که به صورت پیش فرض توسط کاربر انتخاب می‌شوند.
از لحاظ نظری، تجزیه و تحلیل توابع پارامتری پایه شعاعی با پارامتر شکل ثابت بسیار مشکل است. در زمان معرفی این توابع و اثبات قضایای آن، از مقادیر ثابت برای پارامتر شکل استفاده شده است. در صورت استفاده از پارامتر شکل متغیر، پیچیدگی قضیه بسیار زیاد می‌شود.
تحت شرایط خاصی نشان داده شده است که ماتریس درونیاب هنگام استفاده از پارامتر شکل متغیر نامنفرد می‌باشد[۶] . در صورت استفاده از پارامتر شکل متغیر، ماتریس درونیاب متقارن نخواهد بود، در حالی که ماتریس درونیاب برای پارامتر شکل ثابت متقارن است. از جمله مزایای استفاده از مقدار متغیر برای پارامتر شکل، کاهش عدد شرطی ماتریس و کاهش خطا بخصوص در اطراف مرزها است[۶] .
لازم به ذکر است که مسأله یافتن مقدار بهینه‌ی این پارامتر هنوز در حال بررسی است.

۲.۱ درونیابی داده‌های پراکنده

در بسیاری از آزمایش‌های علمی با این مسأله روبه‌رو می‌شویم که مجموعه‌ای از داده‌ها مربوط به مکان یا موقعیت خاصی را داریم و هدف یافتن ضابطه‌ای است تا با استفاده از آن اطلاعاتی را پیرامون فرایند مورد مطالعه و موقعیت‌هایی متفاوت از مجموعه اندازه‌گیری شده به‌دست آوریم. بنابراین به دنبال تابعی هستیم که یک برازش خوب از نقاط داده شده ارائه نماید. روش‌های زیادی برای تصمیم گیری راجع به مفهوم برازش خوب وجود دارد. در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که دقیقاً در نقاط مذکور مقدار تابع با مقدار داده شده برابر باشد که به آن درونیابی می‌گویند. اگر موقعیت داده‌های اندازه گیری شده روی یک شبکه یکنواخت یا منظم قرار نداشته باشد، روش پردازش را درونیابی داده‌های پراکنده می‌گوییم. مسأله زیر را در نظر می‌گیریم:
مسأله ۱-۱ داده‌های (x_j, y_j) به ازای $j = 1, 2, \dots, N$ با $x_j \in \mathbb{R}^d$ و $y_j \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. هدف تعیین تابع پیوسته $\mathcal{P}f$ است به طوری‌که

$$\mathcal{P}f(x_j) = y_j, \qquad j = 1, 2, \dots, N$$

در اینجا x_jها مکان یا موقعیت داده‌ها و y_jها مقدار اندازه‌گیری شده برای x_jها هستند. فرض بر این است که این داده‌ها از طریق نمونه گیری به‌دست آمده است.
فرض $x_j \in \mathbb{R}^d$ به ما این امکان را می‌دهد که از آن برای پوشش بسیاری از مسائل استفاده کنیم. به عنوان مثال اگر $d = ۱$، آنگاه داده‌ها می‌توانند مربوط به اندازه‌گیری در یک بازه زمانی باشند. در $d = ۲$ می‌توان داده‌ها را نقاطی در صفحه در نظر گرفت، یعنی x_j یک مختصات دو بعدی است. به عنوان مثال می‌توان یک نقشه از میزان بارندگی در نقاط مختلف یک ناحیه، بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده از مقدار بارندگی در برخی نقاط به دست آورد.
یک روش متداول و مناسب برای حل مسأله درونیابی داده‌های پراکنده این است که فرض کنیم $\mathcal{P}f$ یک ترکیب خاصی از توابع پایه ای مشخص مانند $\mathcal{B}_k$ است، یعنی

$$\mathcal{P}f(x) = \sum_{k=۱}^{N} c_k \mathcal{B}_k(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d \tag{۶.۱}$$

حل مسأله درونیابی تحت این فرض منجر به یک دستگاه از معادلات به شکل $Ac = y$ می‌شود که در آن A ماتریس درونیاب نامیده می‌شود و $A_{jk} = \mathcal{B}_k(x_j)$ ، $j,k = ۱,\dots,N$ همچنین $c = [c_۱,\dots,c_N]^T$ و $y = [y_۱,\dots,y_N]^T$.
مسأله ۱-۱ خوش-وضع است، یعنی دارای جواب منحصربه‌فرد است اگر و تنها اگر ماتریس A نامنفرد باشد. در حالت یک متغیره ($d = ۱$) مسأله درونیابی N داده‌ی مجزا با استفاده از یک چندجمله‌ای درجه $N - ۱$ خوش تعریف است. در سال ۱۹۵۶، ماری هابر [۲۳] و کرتیس [۲۴] در گزاره زیر نشان دادند که برای ابعاد بیشتر از یک، مسأله خوش-وضع نیست [۳۷] .

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ که $d \geqslant ۲$. اگر Ω دارای یک نقطه درونی باشد، هیچ فضای هار از توابع پیوسته روی Ω از بعد $N \geqslant ۲$ وجود ندارد.*

برهان. به منبع [۵۷، ص۱۱۹] مراجعه شود. □

فضای هار فضایی از توابع است که وارون‌پذیری ماتریس‌های $\mathcal{B}_k(x_j)$ که $j,k = ۱,۲,\dots,N$ در آن تضمین شده باشد. همان‌طور که در بالا گفته شد چندجمله‌ای‌های یک متغیره از درجه $N - ۱$ برای داده‌های $x_۱,\dots,x_N \in \mathbb{R}$ ، یک فضای هار N بعدی است. در حالی‌که قضیه (۱.۲.۱) نتیجه می‌دهد در حالت چندمتغیره این شرایط برقرار نیست، یعنی غیرممکن است که بتوان یک چندجمله‌ای یکتا از درجه N برای داده‌های دلخواه در $\mathbb{R}^۲$ به‌دست آورد. این قضیه بیان

[۲۳] Marihuber
[۲۴] Curtis

می‌کند که اگر بخواهیم یک مسأله درونیابی داده‌های پراکنده چندمتغیره داشته باشیم باید پایه، وابسته به موقعیت داده ها باشد.
به منظور جمع‌آوری اطلاعات بیشتر در مورد فضای تقریب به ذکر تعریف توابع و ماتریس‌های معین مثبت می‌پردازیم.

۳.۱ توابع و ماتریس‌های معین مثبت

ماتریس معین مثبت یک مفهوم استاندارد در جبرخطی است. اما تعریف دقیق آن را به منظور مقایسه با تابع معین مثبت که شاید ناشناخته‌تر باشد می‌آوریم.

تعریف ۱.۳.۱. یک ماتریس حقیقی متقارن $A = (A_{jk})_{N\times N}$ را نیمه معین مثبت گویند هرگاه به ازای هر بردار دلخواه $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^n$ فرم درجه دوم متناظر با آن نامنفی باشد، یعنی

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j c_k A_{jk} \geqslant 0 \qquad (۷.۱)$$

ماتریس A را معین مثبت گویند هرگاه روابط بالا فقط برای بردار صفر به صورت تساوی برقرار باشد.
ویژگی مهم ماتریس‌های معین مثبت این است که مقادیر ویژه‌ی آنها همگی مثبت هستند و در نتیجه این ماتریس‌ها نامنفرد می‌باشند. اما در حالت کلی عکس این مطلب برقرار نیست. بنابراین اگر توابع پایه $\mathcal{B}_k$ در رابطه ۶.۱ چنان باشند که ماتریس درونیاب معین مثبت باشد، همیشه یک مسأله خوش-وضع داریم.

تعریف ۲.۳.۱. تابع پیوسته‌ی حقیقی مقدار Φ را روی $\mathbb{R}^d$ نیمه معین مثبت گویند هرگاه زوج باشد و برای هر N نقطه‌ی متمایز $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ و هر بردار دلخواه $c = [c_1, \dots, c_N]^T \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geqslant 0 \qquad (۸.۱)$$

اگر تنها بردار $c = 0$ رابطه ۸.۱ را به تساوی تبدیل کند، تابع Φ روی $\mathbb{R}^d$ معین مثبت نامیده می‌شود.

میچلی [۲۵] توابع معین مثبت را معرفی و یک رابطه بین درونیابی داده‌های پراکنده و توابع معین مثبت برقرار کرد [۴۰] . معمولا توابع معین مثبت به صورت توابع مختلط تعریف می‌شوند که در آن از ضرایب مختلط c استفاده می‌شود. در قضیه مشهور بوچنر [۲۶] مشخص سازی دقیقی از توابع

[۲۵] Michelli
[۲۶] Bochner

معین مثبت مختلط ارائه شده که در قسمت‌های بعد بیان می‌شود. [۳۸] .
هرچند ما در عمل فقط توابع حقیقی مقدار را در نظر می‌گیریم، مطالب ذکر شده این ایده را مطرح می‌کند که از توابع معین مثبت به عنوان توابع پایه در رابطه ۶.۱ استفاده کنیم، یعنی قرار دهیم $\mathcal{B}_k(x) = \Phi(x - x_k)$. در این‌صورت داریم:

$$\mathcal{P}f(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \Phi(x - x_k), \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{۹.۱}$$

در رابطه ۹.۱، $\mathcal{P}f$ یک درونیاب تحت انتقال پایا است. یعنی اگر داده‌های اولیه جابه‌جا شوند درونیاب جدید تغییر نمی‌کند. در بسیاری از کاربردها نه‌تنها پایایی تحت انتقال بلکه دوران و بازتاب نیز مورد نیاز است، که این مطلب لزوم استفاده از توابع معین مثبتی که شعاعی نیز باشند را مطرح می‌کند. توابع شعاعی خاصیت خوبی دارند که تحت تبدیلات اقلیدسی یعنی انتقال، دوران و بازتاب پایا هستند.[۱۵] . اما آنچه توابع شعاعی را بسیار سودمند می‌کند این است که مسأله درونیابی را نسبت به بعد فضا و مکان داده‌ها غیرحساس می‌کند یعنی به جای این‌که ما با یک تابع چندمتغیره سروکار داشته باشیم می‌توانیم از یک تابع تک متغیره φ استفاده کنیم.

تابع تک متغیره φ را روی $\mathbb{R}^d$ شعاعی و معین مثبت (اکیداً معین مثبت) گویند، اگروتنهااگر تابع چندمتغیره Φ متناظر با آن روی $\mathbb{R}^d$ معین مثبت (اکیداً معین مثبت) باشد.

۴.۱ مشخص‌سازی انتگرالی

در این قسمت، گزاره‌هایی را پیرامون توابع معین مثبت و نیمه معین مثبت به طور خلاصه بیان می‌کنیم. اکثر این گزاره‌ها مشخصه‌سازی انتگرالی دارند و توسط بوخنر و شونبرگ [۲۷] [۴۶] در سال ۱۹۳۰ ارائه شده‌اند. در ادامه مطالبی را در مورد توابع اکیداً معین مثبت و توابع کاملاً یکنوای اکید ذکر می‌کنیم. مشخص‌سازی انتگرالی یک جزء مهم در تئوری آنالیز توابع پایه شعاعی است.
قبل از وارد شدن به بحث، ابتدا چند تعریف مهم در زمینه آنالیز حقیقی را بیان کرده و سپس تعدادی از تبدیل‌های مختلف انتگرالی که بعداً استفاده می‌شود را معرفی می‌کنیم.
فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه توانی آن (مجموعه همه‌ی زیرمجموعه‌های X) باشد.

[۲۷] Schoenberg

تعریف ۱.۴.۱. زیرمجموعه ζ از $\mathcal{P}(X)$ را یک توپولوژی روی X گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱- $\varnothing, X \in \zeta$،

۲- اجتماع هر تعداد دلخواه از عناصر ζ در ζ باشد،

۳- اشتراک تعداد متناهی از عناصر ζ در ζ باشد.

هر یک از اعضای ζ را مجموعه باز می‌نامیم. بنابراین شرایط بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

۱- $\varnothing$ و X باز هستند،

۲- اجتماع دلخواه از مجموعه‌های باز، باز است،

۳- اشتراک متناهی از مجموعه‌های باز، باز است.

تعریف ۲.۴.۱. مجموعه X را به همراه توپولوژی ζ یک فضای توپولوژیک می‌نامیم و آن را با (X,ζ) نشان می‌دهیم. اگر ζ معلوم باشد تنها می‌گوییم X یک فضای توپولوژیک است.

تعریف ۳.۴.۱. فضای توپولوژیک X را هاسدروف نامیم هرگاه برای هر دو نقطه x_1 و x_2 از مجموعه X، مجموعه‌های باز U_1 و U_2 موجود باشند به‌طوری‌که

$$x_1 \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \varnothing.$$

تعریف ۴.۴.۱. یک مجموعه $\mathcal{A}$ از $\mathcal{P}(X)$ را یک σ-جبر روی X می‌نامیم، هرگاه

۱- $X \in \mathcal{A}$،

۲- $\mathcal{A}$ تحت اجتماع شمارا بسته باشد. یعنی اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ آنگاه نتیجه شود که $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$،

۳- اگر $A \in \mathcal{A}$، آنگاه نتیجه شود که $A^C \in \mathcal{A}$.

در اینجا A^C متمم مجموعه A می‌باشد.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه و $\mathcal{A}$ یک σ-جبر روی آن باشد. تابع $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ را یک اندازه می‌نامیم، هرگاه:

۱- $\mu(\varnothing) = 0$،

۲- اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ یک خانواده شمارا از عناصر $\mathcal{A}$ باشند، آنگاه $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

فضای $(X, \mathcal{A}, \mu)$ را یک فضای اندازه‌پذیر می‌نامیم.

تعریف ۶.۴.۱. اگر (X,ζ) یک فضای توپولوژیک باشد. σ-جبر تولید شده توسط ζ را σ-جبر بورل می‌نامیم و آن را با $\mathcal{B}_X$ نمایش می‌دهیم. اگر علاوه بر این X یک فضای هاسدروف باشد،