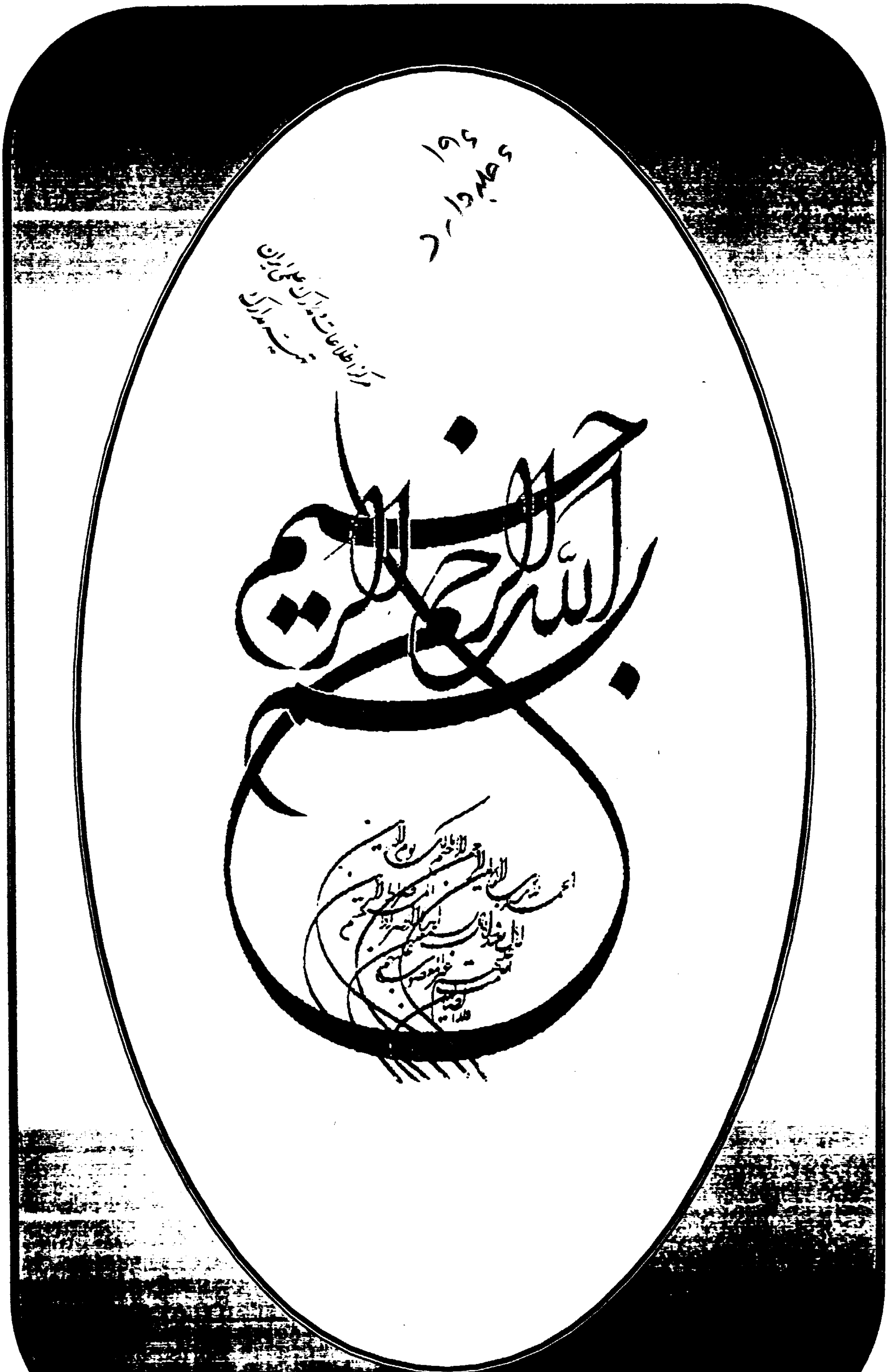

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تهران
دانشکده علوم
گروه ریاضی و علوم کامپیوتر

شرط تحلیلی و نامساویهای دیفرانسیل برای مجموعه‌های محدب خطی و محدب خطی ضعیف در C^n

نگارش : عیسی محمدی

استاد راهنما: ارسلان شادمان
استاد مشاور: مسعود صباغان

پایان نامه برای دریافت درجهٔ کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

اسفند ۱۳۷۹

جمهوری اسلامی ایران

دانشگاه تهران

دانشکده علوم

بسمه تعالی

اداره کل تحصیلات تکمیلی دانشگاه

احتراماً به اطلاع میرساند که جلسه دفاع از پایان نامه دوره **کارشناسی ارشد ریاضی محض آقای عیسی محمدی** تحت عنوان:

شرط تحلیلی و نامساویهای دیفرانسیل برای مجموعه‌های محدب خطی و محدب خطی ضعیف در C^n

در تاریخ ۸۰/۱/۲۷ در **گروه ریاضی و علوم کامپیوتر دانشکده علوم دانشگاه تهران** برگزار گردید.

هیأت داوران بر اساس کیفیت پایان نامه، مقالات انتشار یافته، استماع دفاعیه و نحوه پاسخ به سؤالات، **پایاننامه** ایشان را برای دریافت **درجه کارشناسی ارشد** در رشته ریاضی محض معادل با ۶ واحد با نمره ۱۹/ نوزده تمام با درجه عالی مورد ارزشیابی قرار داد.

هیأت داوران

سمت	نام و نام خانوادگی	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱. استاد راهنما	**دکتر ارسلان شادمان**	استاد	تهران	
۲. استاد مشاور	**دکتر مسعود صباغان**	دانشیار	تهران	
۳. استاد داور	**دکتر علی آبکار**	استادیار	بین‌المللی امام خمینی	

معاون گروه در امور تحصیلات تکمیلی	مدیر گروه	سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده
رحیم زارع نهندی	عمید رسولیان	رسول اخروی

تقدیم به:

پدر و مادرم

و

تمامی آنهایی که همواره مشوق بنده بوده‌اند.

تقدیر و تشکر

لازم می‌دانم از استاد راهنما، جناب آقای دکتر ارسلان شادمان که همواره از راهنماییهای ارزنده و ایده‌های مفید ایشان، در تهیه پایاننامه بهره‌مند شده‌ام کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم، نیز از استاد مشاور جناب آقای دکتر مسعود صباغان و استاد داور جناب آقای دکتر علی آبکار که پایاننامه را به دقت مطالعه کردند و نکات ارزنده‌ای را پیشنهاد فرمودند سپاسگزاری می‌کنم.

در پایان از اعضای موسسه انتشاراتی داروگ که زحمت تایپ پایاننامه را در اسرع وقت متقبل شدند، تشکر می‌کنم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

چکیده : این رساله در سه فصل تحت عناوین مجموعه‌های محدب و شبه محدب ، مجموعه‌ها m- محدب خطی و محدب خطی ، محدب خطی ضعیف و ارتباط آن با محدب خطی و شبه محدب تنظیم شده است

مقدمه

یک مجموعه Ω در فضای برداری حقیقی محدب است اگر و تنها اگر اشتراک نیم فضاها باشد، پس متمم Ω اجتماع نیم فضاها خواهد بود. از سوی دیگر هر نیم فضایی اجتماعی از ابر زیرفضاهای آفین است. پس، بطور خلاصه، اگر مجموعه Ω محدب باشد آنگاه متمم آن اجتماعی از ابر زیرفضاهای آفین است. یادآوری می‌شویم ابر زیرفضای آفین از انتقال یک ابر زیرفضای خطی به دست می‌آید و ابر زیرفضای خطی، زیرفضایی است با نقص بعد یک. اگر یک مجموعهٔ محدب کراندار در فضای $\mathbb{R}^n$ دارای مرز از ردهٔ C^2 باشد، شرایط شناخته شده‌ای اجازه می‌دهند تابع تعریف برای این مجموعه نوشته شود و این تابع تعریف معمولاً در یک شرط دیفرانسیلی درجه دوم صدق می‌کند که به شکل نامساوی است.

در فضاهای مختلط، خصوصاً در $\mathbb{C}^n$، مفهوم مشابه تحدب در فضاهای حقیقی، مفهوم شبه تحدب است و برای دامنه‌های شبه محدب در فضای $\mathbb{C}^n$ که دارای مرز از ردهٔ C^2 هستند تابع تعریف به شکل مشابه با نامساوی دیفرانسیلی درجه دوم مشخص می‌شود. برعکس، شرط مربوط به تشخیص مجموعه متمم به صورت اجتماعی از ابر زیرفضاهای آفین مختلط صحت خود را از دست می‌دهد. در سال ۱۹۳۵ ، قریب ده سال پیش از آنکه ویژگیهای سرشتنمایی کامل هندسی و تحلیلی برای مجموعه‌های شبه محدب و دامنه‌های هولومورفی کشف شد (قضایای اوکا و

نظریه للنگ)، بنکه[۱] و پشل[۲] ([۸]) یک شرط دیفرانسیلی را بعنوان شرط لازم برای این نوع تحدب که امروزه تحدب خطی ضعیف نام گرفته است پیدا کردند. دقیقتر، بنکه و پشل قضیه‌های زیر را ثابت کردند:

قضیه A. فرض کنید Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}^n$ با مرز از ردهٔ $C^۲$ و ρ یک تابع تعریف برای Ω باشد، اگر Ω محدب خطی ضعیف باشد آنگاه:

$$|H(a;s)| \leq L(a;s) \quad \forall\, a \in \partial\Omega,\ s \in T_{\mathbb{C}}(a)$$

که H و L به ترتیب هسیان مختلط و فرم لوی تابع تعریف ρ و $T_{\mathbb{C}}(a)$ فضای مماس مختلط به Ω در نقطه a می‌باشند.

قضیه B. فرض کنید Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}^n$ با مرز از ردهٔ $C^۲$ باشد و ρ یک تابع تعریف برای Ω باشد، هرگاه داشته باشیم:

$$|H(a;s)| < L(a;s) \quad \forall\, a \in \partial\Omega,\ s \in T_{\mathbb{C}}(a)\backslash\{۰\}$$

آنگاه Ω محدب خطی ضعیف است.

از سوی دیگر، آندره مارتینو[۳] در دهه‌های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ طی یک سلسله مقاله به کاربردهای جالبی از مفهوم تحدب خطی ضعیف دست یافت و در مورد دو دسته مجموعه، یعنی زیرمجموعه‌های باز و زیرمجموعه‌های فشرده در $\mathbb{C}^n$، به بررسی مجموعه‌های محدب خطی ضعیف پرداخت ([۱]، [۲])، در سالهای اخیر، کیزلمان[۴] (یا شیزلمان اگر تلفظ سوئدی نام او ترجیح داده داده شود)، به این بررسی ادامه داد ([۵]، [۶]، [۷]) و توانست شرطهای لازم بنکه و پشل را از نو درنظر بگیرد و به این سوال جواب دهد که آیا این شرطها، شرطهای کافی

[۱] H.Behnke

[۲] E.Peschl

[۳] Andre' Martineau

[۴] Christer O.Kiselman

نیز هستند یا خیر؟ کیزلمان این کار، [۷]، را در کلکیومی که به افتخار للنگ در ۱۹۹۷ در انستیتو هانری پوانکاره به مدت شش روز برگزار گردید ارائه کرد و نسخه‌ای از این مقاله را استاد راهنمایم که در کلکیوم شرکت کرده بود همراه خود آورد. البته این مقاله در مجله ماتماتیش آنالن[۱] ۱۹۹۸ چاپ گردید.

هنگامیکه درسهای آنالیز توابع مختلط چند متغیره و سپس آنالیز محدب را در سال ۱۳۷۹ می‌گذراندم، بنا به علاقه‌ای که به موضوع تحدب داشتم، این موضوع توسط استاد راهنمایم در اختیارم قرار گرفت لذا، در این راستا به جستجوی بیشتری پرداختم و علاقمند شدم که در این زمینه به مطالعه بپردازم. پایان‌نامه حاضر نتیجه این تلاش است که حدود ده مال طول کشیده است. برخی از مطالب کلاسیک را در فصل اول یادآوری کرده‌ام و در فصلهای دوم و سوم به اصل مطلب یعنی کارهای کیزلمان در مورد مجموعه‌های mـمحدب خطی، مجموعه‌های محدب خطی و مجموعه‌های محدب خطی ضعیف پرداخته‌ام.

اینک جهت آشنایی خواننده با مطالب پایان‌نامه به اختصار مفاهیم و قضیه‌های اساسی را مطرح می‌کنیم:

تعریف ۱. فرض می‌کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد، مجموعه $\Omega \subseteq V$ را محدب می‌گویند هرگاه:

$$\forall\, x, y \in \Omega \;,\; \forall\, \lambda \in [0, 1], \lambda x + (1-\lambda)y \in \Omega$$

به بیان هندسی می‌توان گفت که هرگاه قطعه خط واصل بین هر دو نقطه در مجموعه در داخل مجموعه قرار گیرد آن مجموعه محدب است.

قضیه C. اگر Ω یک زیرمجموعه باز محدب از یک فضای برداری متناهی‌ـبعد حقیقی V باشد آنگاه برای هر $x_0 \in \Omega^c$ ابرصفحه آفین (حقیقی) گذرنده از x_0 مانند W وجود دارد که $W \cap \Omega = \phi$.

---

[۱] Mathematische Annalen

تعریف ۲. تابع $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ را یک تابع تعریف برای مجموعه باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ می‌نامیم هرگاه از رده C^1 باشد و

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 0\} \ , \ \ d\rho(x) \neq 0 \quad \forall\, x \in \partial\Omega$$

شرط تحلیلی برای دامنه‌های محدب کراندار با مرز از ردهٔ C^2 در $\mathbb{R}^n$ بصورت زیر است که یک نامساوی دیفرانسیلی درجهٔ دوم برحسب هسیان حقیقی است:

قضیه D. فرض کنید که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک دامنه کراندار با مرز از ردهٔ C^2 باشد، Ω محدب است اگر و تنها اگر برای یک تابع تعریف ρ داشته باشیم:

$$H_{\mathbb{R}}(a;s) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_j \partial x_k}(a) s_j s_k \geq 0 \quad \forall\, a \in \partial\Omega \ , \ s \in T_{\mathbb{R}}(a)$$

که $T_{\mathbb{R}}(a)$ فضای مماس حقیقی در نقطه a به Ω و $H_{\mathbb{R}}$ هسیان حقیقی تابع تعریف ρ است.

تعریف ۳. فرض می‌کنیم Ω یک دامنه محدب فضای برداری نرمدار V باشد تابع $f : \Omega \to \mathbb{R}$ را محدب می‌نامیم هرگاه:

$$\forall\, \lambda \in (0,1), x_1, x_2 \in \Omega, f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

قضیه زیر یک شرط معادل برای توابع محدب حقیقی مقدار روی مجموعه‌های باز محدب در $\mathbb{R}^n$ برحسب ماتریس هسیان آنها بیان می‌کند:

قضیه E. فرض کنید که تابع $f : \Omega \to \mathbb{R}$، که $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ یک مجموعه باز محدب است، دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته در Ω باشد، آنگاه f محدب است اگر و تنها اگر هسیان حقیقی آن برای هر $x \in \Omega$ نامنفی باشد، به عبارت دیگر f محدب است اگر و تنها اگر ماتریس هسیان، یعنی ماتریس $[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)]$ نیمه معین مثبت باشد.

تعریف ۴. فرض می‌کنیم Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}$ و $u \in C^2(\Omega)$، u را همساز می‌نامیم

هرگاه:

$$\Delta u(s) = \frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}(s) + \frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}(s) = ۴ \ \frac{\partial^۲ u}{\partial z \partial \overline{z}}(s) = ۰ \ , \ \forall\, s \in \Omega$$

تعریف ۵. فرض کنید Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}$ باشد که، تابع $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ را زیرهمساز می‌نامیم هرگاه $\Omega^\circ \neq \phi, u \not\equiv -\infty$ و دارای دو خاصیت زیر باشد:

۱) u نیم پیوسته بالایی روی Ω باشد یعنی برای هر $c \in \mathbb{R}$ مجموعه Ω_c که: $\Omega_c = \{z \in \Omega : u(z) < c\}$ باز باشد.

۲) برای هر زیرمجموعه فشرده K که $K \subset \Omega$ و هر تابع پیوسته h روی K که در K° همساز است، اگر داشته باشیم $u \leq h$ روی ∂K، آنگاه $u \leq h$ روی K.

برای توابع زیرهمساز از ردهٔ $C^۲$ یک شرط معادل برحسب عملگر لاپلاس Δ وجود دارد.

قضیه F. تابع $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ که Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}$ و $u \in C^۲(\Omega)$ است، روی Ω زیرهمساز است اگر و تنها اگر

$$\forall\, t \in \Omega \ , \ \Delta u(t) = ۴ \frac{\partial^۲ u}{\partial z \partial \overline{z}}(t) \geq ۰$$

تعریف ۶. فرض کنید که Ω یک مجموعه باز در $\mathbb{C}^n$ باشد، تابع $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ را چند زیرهمساز در Ω می‌نامیم هرگاه دارای دو شرط زیر باشد:

۱) u نیم پیوسته بالایی باشد.

۲) برای هر $a \in \Omega$، $\omega \in \mathbb{C}^n$ تابع $\psi : \mathbb{C} \to [-\infty, +\infty)$ با ضابطه

$$\psi(\lambda) = u(a + \lambda\omega)$$

در ناحیه $\{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda\omega \in \Omega\}$ زیرهمساز باشد.

برای توابع چند زیرهمساز از ردهٔ $C^۲$ یک شرط معادل برحسب فرم لوی وجود دارد:

قضیه G. فرض کنید که $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ یک مجموعه باز و $u : \Omega \to [-\infty, +\infty)$ و

$u \in C^{2}(\Omega)$، آنگاه u روی Ω چند زیرهمساز است اگر و تنها اگر فرم لوی آن در هر نقطه Ω روی $\mathbb{C}^n$ نیمه معین مثبت باشد یعنی:

$$L_u(a;t) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(a) t_j \bar{t}_k \geq 0 \quad \forall\, a \in \Omega, t \in \mathbb{C}^n$$

تعریف ۷. مجموعه باز $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ را شبه محدب می‌نامیم هرگاه یک تابع چند زیرهمساز پیوسته u در Ω وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $c \in \mathbb{R}$ مجموعه

$$\Omega_c = \{z \in \Omega : u(z) < c\}$$

در Ω نسبتاً فشرده باشد یعنی $\overline{\Omega}_c$ در Ω فشرده باشد.

برای دامنه‌های با مرز از ردهٔ C^2 در $\mathbb{C}^n$ می‌توان شبه محدب بودن را با یک نامساوی دیفرانسیلی برحسب فرم لوی بیان کرد:

قضیه H. فرض کنید که $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ یک مجموعه باز با مرز از ردهٔ C^2 و ρ یک تابع تعریف برای Ω باشد، آنگاه Ω شبه محدب است اگر و تنها اگر شرط لوی در هر نقطه مرزی آن برقرار باشد یعنی:

$$L_\rho(a;\omega) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial z_k}(a) \omega_j \overline{\omega}_k \geq 0 \quad \forall\, a \in \partial\Omega, \omega \in T_{\mathbb{C}}(a)$$

تعریف ۸. فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیک مختلط متناهی-بعد باشد، $X \subseteq E$ را m-محدب خطی می‌نامیم هرگاه $E \backslash X$ اجتماع زیرفضاهای آفین مختلط با نقص بعد m باشد.

در بخش اول فصل دوم که یکی از کارهای کیزلمان است، ([۶])، روی مجموعه‌های m-محدب خطی بیشتر بحث شده است.

تعریف ۹. فرض کنید E یک فضای برداری توپولوژیک مختلط متناهی-بعد باشد، $X \subset E$ را محدب خطی (۱-محدب خطی) می‌نامیم هرگاه $E \backslash X$ اجتماع ابر زیرفضاهای آفین مختلط

(ابر صفحه‌های مختلط) باشد بعبارت دیگر برای هر $x \in X^c$ یک ابرصفحه مختلط گذرنده از x وجود داشته باشد که مجموعه را قطع نکند.

برای مجموعه‌های خاصی در $\mathbb{C}^n$، محدب خطی معادل یک شرط دیفرانسیلی است:

قضیه I. فرض کنید که $h \in C^{۲}(D)$، که D دیسک واحد در $\mathbb{C}$ است، $h > ۰$ و h در شرط دیفرانسیلی زیر صدق کند:

$$\frac{|h_z|^{۲}}{h} \geq h_{z\bar{z}} + |h_{zz}| \qquad |z| < ۱$$

آنگاه مجموعه باز $\Omega = \{(z,t) \in D \times \mathbb{C} : |t|^{۲} < h(z)\}$ محدب خطی است.

تعریف ۱۰. مجموعه باز $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ را **محدب خطی ضعیف** می‌نامیم هرگاه برای هر نقطه مرزی یک ابر صفحه مختلط وجود داشته باشد که از آن نقطه بگذرد و مجموعه را قطع نکند.

کیزلمان در تکمیل کارهای بنکه و پشل ثابت کرد که برای دامنه‌های با مرز از ردهٔ $C^{۲}$، محدب خطی ضعیف بودن معادل یک شرط دیفرانسیلی است [۷]:

قضیه J. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{C}^n$ یک دامنه با مرز از رده $C^{۲}$ و ρ یک تابع تعریف برای Ω باشد، آنگاه Ω محدب خطی ضعیف است اگر و تنها اگر شرط دیفرانسیلی زیر برای Ω برقرار باشد:

$$|H(a;s)| \leq L(a;s) \qquad \forall\, a \in \partial\Omega, s \in T_{\mathbb{C}}(a)$$

می‌توان رابطه زیر را بین مفاهیم تحدب در $\mathbb{C}^n$ بصورت زیر بنویسیم:

شبه محدب $\Leftarrow$ محدب خطی ضعیف $\Leftarrow$ محدب خطی $\Leftarrow$ محدب (معمولی)

یک تفاوت اساسی در ساختار توپولوژیکی مجموعه‌های محدب خطی و محدب خطی ضعیف با محدب و شبه محدب در $\mathbb{C}^n$ این است که محدب و شبه محدب یک شرط موضعی هستند اما محدب خطی و محدب خطی ضعیف برای مجموعه‌هایی که مرز آنها از ردهٔ $C^{۱}$ نیست شرط موضعی نیستند (قضیه ۱.۳.۱۰، مثال ۲.۲.۱۱ و گزاره ۲.۲.۱۲).

لازم به ذکر است که نگارنده مجبور شد برخی از اثباتها و مثالها را با علامت (*) مشخص کند که برخی از آنها ممکن است بصورت قضیه یا تمرین در بعضی مرجعها یافت شوند.

هدف اصلی این پایان‌نامه ارائه قضیه‌های I و J است.

فصل اول

مجموعه‌های محدب و شبه‌محدب

باتوجه به بحث اصلی این پایان‌نامه (محدب خطی و محدب ضعیف خطی)، در این فصل مطالبی شامل تعاریف و قضیه‌های اساسی راجع به مجموعه‌های محدب معمولی و شبه‌محدب یادآوری می‌شود. اثبات بعضی از قضایا در کتابهای آنالیز چند متغیره مختلط موجود است لذا جهت احتراز از حجم زیاد اکثراً به آنها ارجاع داده شده است.

۱.۱ مرزهای دیفرانسیل‌پذیر

این بخش به مطالبی راجع به فضاهای مماس مختلط و حقیقی، صفحه‌های مماس مختلط و حقیقی در یک نقطه مرزی از یک دامنه (مجموعه باز و همبند) در $\mathbb{C}^n$ و نیز هسیان مختلط، هسیان حقیقی و فرم لِوِی یک تابع تعریف از رده C^2 اختصاص دارد.

۱.۱.۱ تعریف. مجموعه باز $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ را درنظر می‌گیریم. $\partial\Omega$ را مرز دیفرانسیل‌پذیر از رده C^k، $1 \leq k \leq \infty$. در نقطه $a \in \partial\Omega$ می‌نامیم هرگاه یک همسایگی U از a و یک تابع حقیقی مقدار ρ که $\rho \in C^k(\Omega)$ موجود باشد که دارای دو شرط زیر باشد (ρ را **تابع تعریف**