



عنوان :

تقارن و شکست خود به خودی تقارن در نظریه میدان‌های کوانتومی و نقش آن در

پدیده‌شناسی فیزیک ذرات

استاد راهنما :

دکتر کامران کاویانی

استاد مشاور :

دکتر دولتشاهی

دانشجو :

مهردادخت ساسانیپور یزدی

تاریخ دفاع :

۲۰ شهریور ۱۳۹۰

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱.....	مقدمه
۲.....	فصل اول : بررسی تقارن در نظریه میدان‌های کلاسیک
۴.....	۱-۱- بررسی شکست خود به خودی تقارن نظریه در رژیم کلاسیک
۹.....	۱-۱-۱- بررسی مدل سیگما خطی
۱۱.....	۱-۲- قضیه گلدستون
۱۴.....	فصل دوم : آشنایی با انتگرال مسیر
۱۴.....	۲-۱- معرفی انتگرال مسیر
۱۷.....	۲-۲- کاربرد انتگرال مسیر در نظریه میدان اسکالر
۲۱.....	۲-۳- معرفی تابعی مولد
۲۵.....	فصل سوم : بازبهنجارش
۲۶.....	۳-۱- درجه واگرایی ظاهری
۲۹.....	۳-۲- بازبهنجار کردن نظریه میدان
۳۴.....	۳-۳- قضیه <i>BPHZ</i>
۳۷.....	فصل چهارم : بررسی تقارن در نظریه میدان‌های کوانتومی
۳۸.....	۴-۱- تعیین حالات پایدار سیستم در مکانیک آماری
۴۱.....	۴-۲- معرفی کنش مؤثر

۴۳.....	۴-۳- اطلاعاتی درباره $E[J]$
۴۳.....	۴-۴- اطلاعاتی درباره φ_{cl}
۴۶.....	۴-۵- تعیین حالات پایدار
۴۸.....	۴-۶- محاسبه کنش مؤثر
۵۸.....	جمع بندی
۵۹.....	پیوست الف
۶۱.....	مراجع

مقدمه :

یکی از چشم اندازها در نظریه میدان‌های کوانتومی، شکست خود به خودی تقارن است که اثرات آن کاملاً در طبیعت مشهود می‌باشد. از دیدگاه تاریخی، در حدود سال ۱۹۶۰، نمبو و گلدستون، با بهره‌گیری از یافته‌های اندرسون که در فیزیک حالت جامد این پدیده را مشاهده کردند، به مطالعه شکست خود به خودی تقارن در فیزیک ذرات پرداختند. سپس هیگز در سال ۱۹۶۴ به اثر متفاوت شکست خود به خودی تقارن در نظریه‌های پیمانه‌ای

$(SU(2) \times U(1))$ پی برد. سپس واینبرگ و عبدالسلام، هم‌زمان با توجه به پژوهش‌های گلاشو و استفاده از رهیافت هیگز، ادعا کردند اتحادی که میان اندرکنش‌های ضعیف هسته‌ای و الکترومغناطیس وجود دارد، در اثر شکست خود به خودی تقارن، علی‌رغم وجود ارتباط میان آن‌ها، از بین می‌رود و بدین ترتیب در سال ۱۹۷۱ بازبهنجار بودن نظریه الکتروضعیف را اثبات نمودند. [۲]

اساساً شکست خود به خودی تقارن به علت غیر تقارنی بودن حالت پایه شکل می‌گیرد. البته جالب است بدانیم وقوع شکست خود به خودی به علت غیر تقارنی بودن بعضی از حالات پایه تبه‌گن در سیستم‌هایی با تقارن پیوسته منجر به پدیدار شدن ذرات بدون جرم می‌شود (بوزون-های گلدستون).

سیر کلی این رساله به شرح زیر می‌باشد :

در ابتدا شکست خود به خودی تقارن را از دیدگاه کلاسیک بررسی کرده و سپس به مطالعه آن در رژیم کوانتومی می‌پردازیم که در این رابطه مستلزم معرفی کمیتی بنام کنش مؤثر است. البته قبل از بررسی این پدیده به معرفی فرمالیسم‌های لازم برای مطالعه آن پدیده در رژیم کوانتومی می‌پردازیم.

فصل اول

بررسی تقارن در نظریه میدان‌های کلاسیک

یکی از مهم‌ترین پدیده‌های فیزیکی مشاهده شده در طبیعت، شکست خود به خودی تقارن است. هدف این رساله آشنایی با مفهوم و مکانیسم شکست خود به خودی تقارن در نظریه‌های فیزیکی است.

یکی از علل اصلی پدیدار شدن شکست خود به خودی، وجود حالات پایه نامتقارن در سیستم علی‌رغم تقارن در هامیلتونی سیستم می‌باشد.

به‌عنوان مثال، یک سیستم فرومغناطیسی شامل بینهایت آرایه کریستالی از دو قطبی‌های مغناطیسی با اسپین $1/2$ ، را در نظر می‌گیریم. برای توصیف این سیستم فرومغناطیسی که در حضور یک میدان خارجی ضعیف قرار دارد، از مدل هایزنبرگ استفاده می‌کنیم. هامیلتونی سیستم مذکور، توسط متغیر اسپینی که شامل دو مقدار است، توصیف می‌گردد. این سیستم را شبکه بندی می‌کنیم به‌صورتی که هر نقطه شبکه یک مقدار اسپین را نشان می‌دهد و همان‌طور که می‌دانیم، مقدار اسپین در هر نقطه فضا بیان کننده مجموع اسپین مولکول‌های موجود در آن نقطه است. در اینجا، به‌علت وجود میدان خارجی در سیستم، اسپین هر نقطه بر همسایه‌های اطراف خود، تاثیر می‌گذارد و تمایل به هم‌جهت کردن اسپین آن‌ها دارد. همین موضوع موجب پدیدار شدن اندرکنش میان آن‌ها می‌شود. از اینرو شکل هامیلتونی اندرکنش نقاط فضا، به‌صورت زیر می‌باشد.

$$H = \sum_{i,j} J_{ij} S^i S^j \quad (1-1)$$

البته از جمله اندرکنش میان میدان مغناطیسی و اسپین نقاط شبکه صرف نظر کردیم، زیرا در غیر این صورت نمی‌توانیم از ناوردایی هامیلتونی تحت دوران صحبت کنیم. در عبارت فوق S^i مشخص کننده اسپین نقطه i و J_{ij} بیان کننده دامنه‌ی اندرکنش یا همان میزان جفت‌شده‌گی

است (برای فرومغناطیس $J_{ij} > 0$) که به خاطر ثابت بودنش، تحت هر نوع انتقال سیستم، ناورداست. غیر صفر بودن این کمیت، میزان تاثیرگذاری اسپین‌ها را روی یکدیگر نشان می‌دهد [۱,۳].

با این تفاسیر، به علت این که می‌توان هامیلتونی را به صورت یک کمیت اسکالر نوشت، علی‌رغم عدم ناوردایی حالت پایه تحت دوران سیستم، ناوردا می‌ماند. زیرا برای سیستم فرومغناطیس مذکور با ابعاد نامحدود، تعداد بیشمار حالت پایه وجود دارد به طوری که اسپین همه دو قطبی‌های موجود در سیستم هم‌جهت می‌باشند و به اصطلاح حالات پایه تبهگن خواهیم داشت.

در حقیقت برای بررسی حالت پایه، فرض می‌کنیم اگر می‌توانستیم در فاصله‌های اتمی سیستم مذکور، زندگی کنیم، امکان شناسایی حالت پایه بسیار مشکل بود. زیرا تشخیص راستاهای همه دو قطبی‌های موجود در این سیستم فرومغناطیس با ابعاد نامحدود توسط ابزارهای محدودی که داریم، میسر نمی‌باشد. بنابراین به منظور درک ناوردایی یا عدم ناوردایی حالت پایه تحت دوران، از فرمالیسم نظریه میدان استفاده می‌کنیم.

در این فرمالیسم، از یک میدان که دارای بینهایت درجه آزادی است برای توصیف سیستم استفاده می‌کنیم و روند تغییرات سیستم را توسط میدان بررسی می‌نماییم. در مساله فوق، برای توصیف سیستم فرومغناطیس، این میدان، یک میدان اسپینی است و تقارن دورانی سیستم را به صورت یک تبدیل در فضای داخلی در نظر می‌گیریم. همچنین، خلاء نظریه، نقش حالت پایه سیستم فرومغناطیسی مورد نظر را بازی می‌کند. حال با فرض ناوردایی هامیلتونی نظریه تحت تبدیل میدان، ناوردایی در خلاء نظریه ظاهر نمی‌شود. به عبارت دیگر، حالت خلاء، به یک حالت پایه دیگر نظریه که خلاء نیست، تبدیل شده است. همین موضوع باعث پدیدار

شدن شکست خود به خودی تقارن یا پنهان شدن تقارن در نظریه می‌شود [۳] که بعداً توضیحات بیشتری در مورد آن داده خواهد شد.

همچنین می‌توان، این پدیده را در یک آهنربا که تحت حرارت زیاد مذاب شده و خاصیت آهنربایی خود را ازدست داده است نیز، مشاهده کرد. دردمای بالا اسپین‌های اتم‌ها به شکلی بی‌نظم قرار گرفته‌اند و مرتباً در حال نوسان هستند. اما با کاهش تدریجی دما، دوقطبی‌ها بر همسایه‌های اطراف خود تاثیر گذاشته که این امر موجب یکی شدن جهت اسپین‌هایشان می‌شود. از اینرو آهنربا به جزیره‌هایی تقسیم می‌شود که هر جزیره جهت مغناطش خاصی دارد. در نهایت با کمینه شدن انرژی سیستم، می‌بینیم از بیشمار حالت پایه که هر کدام، یک جهت مغناطش را برای آهنربا نشان می‌دهد، سیستم تنها جهت خاصی را انتخاب می‌کند. درحقیقت سیستم تنها یکی از آن حالات پایه را ترجیح می‌دهد. بنابراین، ناوردا نبودن حالت پایه تحت دوران، منجر به شکست خود به خودی تقارن در سیستم می‌شود [۴].

هدف این فصل، بررسی شکست خود به خودی تقارن در نظریه میدان‌های کلاسیک است. به همین منظور، به مطالعه ساختار خلاء نظریه می‌پردازیم. همچنین در ادامه با قضیه گلدستون که یکی از آثار شکست خود به خودی در نظریه می‌باشد، آشنا خواهیم شد.

۱-۱- بررسی شکست خود به خودی تقارن نظریه در رژیم کلاسیک

در ابتدا به منظور مطالعه شکست خود به خودی، ساده‌ترین مثال از نظریه میدان‌های اسکالر را که در مورد یک میدان اسکالر است در نظر می‌گیریم. منظورمان از نظریه میدان کلاسیک، در نظر گرفتن تابع میدانی که در معادله حرکت کلاسیک نظریه صدق می‌کند.

البته همانگونه که می‌دانیم معادله حرکت یا همان معادله اوایلر-لاگرانژ، در نظریه میدان از مینیمم کردن کنش که مشخصه نظریه است، به دست می‌آید. درحقیقت، انحراف بسیار کوچک میدان از مسیر کلاسیک، موجب تغییر کنش نظریه نمی‌شود.

$$S = \int^t dt \int d^3x \mathcal{L}(\varphi(x), \partial_\vartheta \varphi(x)) \quad (1-2)$$

$$\varphi \rightarrow \dot{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \quad ; \quad S[\dot{\varphi}, \partial_\vartheta \dot{\varphi}] = S[\varphi, \partial_\vartheta \varphi] + \delta S \quad (1-3)$$

$$\delta S = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = \partial_\vartheta \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\vartheta \varphi)} \right) \quad (1-4)$$

حال به منظور آن که شاهد شکست خود به خودی تقارن در نظریه میدان کلاسیک باشیم، ساختار خلاء نظریه‌ای را مورد بررسی قرار می‌دهیم که لاگرانژی آن شبیه نظریه اندرکنشی φ^4 بوده، با این تفاوت که در اینجا جمله جرمی نظریه φ^4 با علامت مثبت ظاهر شده است. البته همان‌طور که می‌دانیم این جمله، دیگر نقش جمله جرمی میدان را ندارد بلکه آن را به‌عنوان یک جمله اندرکنش جدید در نظریه می‌شناسیم.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} (\partial_\mu \varphi(x))^2 + \frac{1}{4} \mu^2 \varphi(x)^2 - \frac{\lambda}{4} \varphi(x)^4 \quad (1-5)$$

با مشاهده لاگرانژی فوق، درمی‌یابیم که لاگرانژی، تحت چنین تبدیل گسسته‌ای روی میدان $\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$ ، ناوردا می‌ماند و از اینرو می‌گوییم نظریه، تحت این تبدیل میدان، متقارن است. حال به بررسی تقارن برای خلاء نظریه، می‌پردازیم. اساساً خلاء نظریه دارای دو خصوصیت می‌باشد:

$$1- \text{ تحت انتقال فضایی و زمانی و دوران ناورداست}^1, \quad e^{i\hat{p}\cdot\hat{x}} |\Omega\rangle = |\Omega\rangle$$

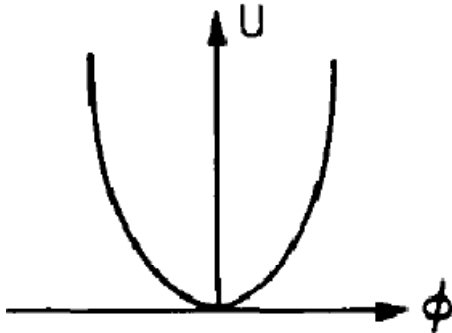
$$2- \text{ دارای مینیمم مقدار انرژی است.}$$

پس با توجه به خصوصیات مذکور، توزیع میدانی را به‌عنوان خلاء نظریه در نظر می‌گیریم که میدان‌های متناظر آن توزیع ثابتی در فضا دارد. به عبارت دیگر، مقدار میدان در تمام نقاط فضا یکسان و فضا نیز همگن است.

البته، اگر لاگرانژی φ^4 را در نظر گرفته و هامیلتونی را برای توزیع‌های ثابت میدان، می‌نوشتیم، تنها قسمت پتانسیل نظریه (درحقیقت جمله‌ای از لاگرانژی که عاری از مشتق میدان است) باقی می‌ماند و با محاسبه مینیمم انرژی (پتانسیل نظریه)، تنها یک توزیع میدان ثابت مینیمم

¹ Translationally invariant

برای نظریه پیدا می‌شد. بنابراین، دیگر اثری از شکست خود به خودی تقارن در نظریه نمی‌دیدیم (شکل ۱-۱).



شکل ۱-۱ پتانسیل نظریه ϕ^4 برای توزیع‌های ثابت میدان

در این مرحله به دنبال یافتن توزیع میدانی برای نظریه جدید هستیم که کمترین انرژی را دارند و تحت هر نوع انتقال و دوران ناوردا می‌باشند. به همین منظور، هامیلتونی را برای توابع ثابت میدان محاسبه می‌کنیم. البته می‌دانیم درون هامیلتونی، مومنتم مزدوج تابع میدان به صورت $\pi(x) = \dot{\phi}(x)$ وجود دارد. اما به علت در نظر گرفتن توابع ثابت میدان، این جمله اثری در عبارت هامیلتونی ندارد.

$$H(x) = \int d^r x \left[\frac{1}{2} \pi(x)^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi(x))^2 - V(\phi(x)) \right] \quad (1-6)$$

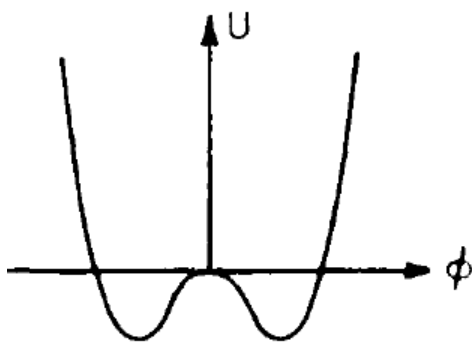
$$H = \int d^r x \left(-\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right) \quad (1-7)$$

برای تابع ثابت میدان

جمله اول و دوم هامیلتونی که به نوعی بیانگر جمله جنبشی میدان هستند، به علت ثابت بودن تابع میدان، صفر شده و دو جمله بعدی، که اندرکنش میان میدان‌ها را نشان می‌دهند، به عنوان پتانسیل میدان‌ها در نظر می‌گیریم. از اینرو، برای توزیع‌های ثابت، زمانی انرژی کمترین مقدارش را داراست که پتانسیل آن توزیع‌ها مینیمم شود. همچنین می‌توانیم شکل هندسی $V(\phi)$ مربوط به توزیع‌های ثابت را رسم نماییم (شکل ۱-۲).

$$\frac{\partial H}{\partial \phi} = \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = 0 \quad ; \quad V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (1-8)$$

$$\text{اکسترمم های پتانسیل} \quad \phi_1 = 0 \quad ; \quad \phi_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \equiv \pm v$$



شکل ۱-۲ منحنی پتانسیل برای توزیع ثابت نظریه‌ای که دارای تقارن گسسته است

از دید کوانتومی، می‌توان v را به‌عنوان مقدار چشم‌داشتی عملگر میدان برای حالت خلاء، نیز در نظر بگیریم.

$$\langle \Omega | \hat{\varphi}_s(\vec{x}) | \Omega \rangle = \langle \Omega | \varphi | \Omega \rangle = \varphi \langle \Omega | \Omega \rangle = \varphi = v \quad (۹-۱)$$

اما تنها نقاط شناخته شده این گراف برای این رژیم $\varphi = 0, \pm v$ می‌باشند زیرا در معادله حرکت کلاسیک نظریه صدق می‌کنند. بنابراین از دیدگاه کلاسیک، بقیه φ های ثابت درون گراف بی‌معنی‌اند.

تاکنون متوجه شدیم که می‌توانیم دو توزیع $v, -v$ را به‌عنوان توزیع‌های ثابت میدان با کمترین انرژی، یا توصیف کننده خلاء نظریه در نظر بگیریم. اما می‌بینیم طبیعت یکی از این توزیع‌های میدان را بر می‌گزیند. به‌عبارتی، اگر تمام ذرات را از درون فضایی که دارای این لاگرانژی اندرکنش است، خارج نماییم، توزیع میدان در فضا، با توزیع خاصی (به‌فرض v) شکل می‌گیرد. بنابراین آن توزیع میدان را به‌عنوان خلاء نظریه در نظر می‌گیریم. لازم به‌ذکر است، حتی با تکرار مجدد این عمل به دفعات دلخواه، خلاء نظریه با همان توزیع v مشخص می‌گردد. شاید در نگاه اول، این مساله ما را دچار سردرگمی کند، زیرا از طریق محاسبات، شاهد دو توزیع ثابت میدان با کمترین انرژی برای نظریه بودیم. درحالی‌که طبیعت به‌علت داشتن اطلاعات اضافی، میان این دو توزیع میدان، تمایز قائل شده و یکی را به‌عنوان خلاء نظریه می‌شناسد.

اکنون می‌خواهیم به مطالعه افت و خیزهای میدان حول خلاء نظریه بپردازیم. اساساً می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا اندرکنش‌های درون لاگرانژی نظریه برای میدان $\sigma(x)$ که افت و خیزهای میدان را حول خلاء نشان می‌دهد، تغییر می‌کند؟ به همین منظور، میدان را به صورت $\varphi(x) = v + \sigma(x)$ در رابطه (۵-۱) قرار می‌دهیم که v توزیع میدان با کمترین انرژی برای خلاء نظریه است. حال با توجه به این که خلاء در معادله حرکت کلاسیک صدق می‌کند، می‌توانیم چنین استدلال کنیم که شکل میدان مذکور که روی مسیری در اطراف مسیر کلاسیک است، نیز در معادله حرکت نظریه صدق می‌کند.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \sigma(x))^2 - \frac{1}{4}(\sqrt{2}\mu)^2 \sigma(x)^2 - \sqrt{\lambda\mu^2} \sigma(x)^3 - \frac{\lambda}{4} \sigma(x)^4 \quad (10-1)$$

همان‌طور که می‌بینیم لاگرانژی برای $\sigma(x)$ تغییر می‌کند (با توجه به این که مقدار ثابت درون لاگرانژی در معادله حرکت نظریه ظاهر نمی‌شود، از آن صرف نظر کردیم). این تغییر را در جرم‌دار شدن میدان $\sigma(x)$ ، $(m_{\sigma(x)} = \sqrt{2}\mu)$ و اندرکنش‌های جدیدی که در لاگرانژی ظاهر شده است، می‌توانیم مشاهده کنیم.

همچنین اثری از تقارن قبلی را در لاگرانژی نظریه که با میدان $\sigma(x)$ توصیف می‌شود، نمی‌بینیم. درحقیقت فضای اندرکنش از دید افت و خیزهای میدان نزدیک خلاء تغییر کرده است. اما جالب توجه است که برخلاف انتظارمان که هر جمله اندرکنش بایستی ضریب جفت‌شده‌گی مستقلی داشته باشد، در لاگرانژی میدان $\sigma(x)$ ، ضرایب جفت‌شده‌گی اندرکنش‌ها و ضریب جمله جرمی، به هم وابسته‌اند. جالب‌تر این که درمی‌یابیم این ضرایب به همان دو پارامتر λ, μ لاگرانژی اولیه بستگی دارند. از اینرو می‌توانیم به این نتیجه برسیم که تعداد پارامترهای مستقل، تغییر نکرده است. حالا چنین ادعا می‌کنیم که علت این امر، هنوز وجود تقارن در نظریه را نشان می‌دهد. گویی تنها تقارن از دید ما پنهان شده است.

بنابراین با مطالعه ساختار خلاء در این نظریه، شاهد شکست خود به خودی تقارن بودیم. همان‌طور که در مثال فرومغناطیس هم دیدیم، در اینجا نیز لاگرانژی تحت تبدیل

$\varphi(x) \rightarrow -\varphi(x)$ ناوردا است ولی خلاء تحت آن تبدیل، ناوردا نمی ماند.

۱-۱-۱ بررسی مدل سیگما خطی^۲

در این قسمت، به مطالعه نظریه مدل سیگما خطی، نظریه‌ای که دارای تقارن پیوسته است، می پردازیم. در این مثال، نیز به بررسی ساختار خلاء نظریه می پردازیم.

همان طور که در زیر مشاهده می کنیم لاگرانژی نظریه، شامل N میدان مستقل اسکالر بدون جرم است که با هم اندرکنش می کنند :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^i(x)) (\partial^\mu \varphi^i(x)) + \frac{1}{2} \mu^2 (\varphi^i(x))^2 - \frac{\lambda}{4} [(\varphi^i(x))^2]^2 \right] \quad (1-11)$$

به علت وجود N میدان مستقل درون لاگرانژی، هر تابع توزیع میدان در فضا، به N تابع میدان مستقل $\varphi^i(x)$ تا $\varphi^N(x)$ بستگی دارد. پس تابع میدان، N مولفه ایست و از آنجایی که هنوز در محدوده کلاسیک هستیم، این توابع در معادله حرکت کلاسیک نظریه صدق می کنند.

حال درباره تقارن موجود در نظریه صحبت می کنیم. همان طور که می بینیم اگر میدان های درون فضا، را تحت تبدیل R که یک ماتریس $N \times N$ و عضوی از گروه ماتریس های متعامد $(O(N))$ می باشد، تغییر دهیم، $\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = R\varphi(x)$ لاگرانژی ناوردا می ماند، زیرا تمام جملات درون لاگرانژی، به صورت $(\varphi^i(x))^2$ می باشند که طول بردار میدان N مولفه ای را مشخص می کند. می توان تبدیل R را به صورت دوران که عضوی از گروه متعامد^۴ است، در نظر بگیریم.

مانند قبل، در اینجا نیز به منظور دستیابی به توزیع میدان های پایه نظریه، به محاسبه مینیمم پتانسیل درون لاگرانژی می پردازیم. به همین منظور، پتانسیل را باید به ازای هر یک از N

$$\left(\frac{\partial V(\varphi^i)}{\partial \varphi^i} = 0 \right)$$

میدان مستقل، کمینه کنیم

^۲ Linear Sigma model
^۳ orthogonal

^۴ خصوصیت اعضای این گروه به این صورت است : $R^T = R^{-1}$

$$V(\varphi^i) = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{1}{\varphi} \mu^2 (\varphi^i)^2 + \frac{\lambda}{\varphi} \left[(\varphi^i)^4 + \sum_{j \neq i}^N [(\varphi^j)^4 + 2(\varphi^i)^2 (\varphi^j)^2] \right] \right] \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial V(\varphi^i)}{\partial \varphi^i} = \varphi^i [-\mu^2 + \lambda [(\varphi^i)^2 + \sum_{j \neq i}^N (\varphi^j)^2]] = 0 \quad ; \quad \sum_{j=1}^N (\varphi^j)^2 = \mu^2 / \lambda \equiv \nu^2 \quad (1-13)$$

عبارت حاصل، معادله یک کره N بُعدی است. بنابراین از رابطه (1-13) می‌توانیم بیشمار توزیع میدان با کمترین انرژی برای این نظریه به دست آوریم. اما همان‌طور که ذکر شد، طبیعت از بیشمار توزیع میدان‌های موجود، تنها یکی را به‌عنوان خلاء نظریه انتخاب می‌کند. بنابراین، به-عنوان نمونه، خلاء نظریه را $\varphi = (0, \dots, \nu)$ در نظر می‌گیریم.

مانند مثال قبل، به مطالعه افت و خیزهای میدانی نزدیک خلاء نظریه می‌پردازیم. در نتیجه میدان $\varphi(x)$ درون لاگرانژی را به‌صورت زیر جایگذاری می‌نماییم.

$$\varphi(x) = (\pi^1(x), \pi^2(x), \dots, \nu + \sigma(x)) \quad (1-14)$$

که $\pi^i(x)$ بیان‌کننده افت و خیز $1 - N$ مولفه‌های میدان و $\sigma(x)$ افت و خیز N امین مولفه میدان را از مقادیر انتظاری خلاءشان، نشان می‌دهد. در این حالت لاگرانژی نظریه برحسب $\pi^i(x)$ و $\sigma(x)$ به‌صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{\varphi} \sum_{i=1}^{N-1} (\partial_\mu \pi^i(x))^2 + \frac{1}{\varphi} (\partial^\mu \sigma(x))^2 + \frac{1}{\varphi} (2\mu^2) (\sigma(x))^2 - \sqrt{\lambda} \mu \sigma^3(x) \\ & - \frac{\lambda}{\varphi} \sigma^4(x) - \sum_{i=1}^{N-1} \sqrt{\lambda} \mu (\pi^i(x))^2 \sigma(x) - \frac{\lambda}{\varphi} \sum_{i=1}^{N-1} (\pi^i(x))^2 \sigma^2(x) \\ & - \frac{\lambda}{\varphi} \sum_{i=1}^{N-1} [(\pi^i(x))^2]^2 \end{aligned} \quad (1-15)$$

همان‌طور که دیده می‌شود لاگرانژی جدید، فاقد تقارن $O(N)$ بوده و به یک نظریه پیچیده با اندرکنش‌های جدیدی تبدیل شده است. البته با اندکی دقت، متوجه می‌شویم که در لاگرانژی توان‌های دو و چهار میدان‌های $\pi^i(x)$ ظاهر شده‌اند. از طرف دیگر، میدان $\sigma(x)$ به شکل توان فرد در بعضی جملات لاگرانژی پدیدار شده است. بنابراین تقارن اولیه نظریه به تقارن $O(N-1)$ شکسته می‌شود.

در این جا نیز شاهد شکست خود به خودی تقارن در نظریه هستیم. در حقیقت، به علت در نظر گرفتن خلاء به صورت $\varphi = (0, \dots, 0)$ ، تقارن نظریه به $O(N-1)$ شکسته شد. اما جالب اینجاست که از شکست خود به خودی تقارن در نظریه، $N-1$ ذره بدون جرم و یک ذره جرم-دار ظاهر می شود.

از نکات جالب دیگر می توان به این موضوع اشاره کرد: در نظریه فوق که دارای تقارن پیوسته است، به تعداد تقارن های شکسته شده، ذرات بدون جرم به وجود می آیند که تعداد تقارن های شکسته شده برای نظریه، اختلاف تعداد تقارن های مستقل گروه تقارنی $O(N)$ ، از تعداد تقارن های مستقل گروه تقارنی $O(N-1)$ می باشد.^۵

حالا می خواهیم با اثبات قضیه ای که درباره ظاهر شدن ذرات بدون جرم که ناشی از شکست خود به خودی تقارن پیوسته نظریه است، آشنا شویم.

۲-۱ قضیه گلدستون^۶

قضیه گلدستون بیان می کند که در نظریه هایی با تقارن پیوسته اگر شکست خود به خودی تقارن صورت پذیرد، به تعداد تقارن های شکسته شده در نظریه ذرات بدون جرم ظاهر می شود.^۷ نکته قابل توجه این است که قضیه بیان شده به شکل پتانسیل نظریه بستگی ندارد. فیزیک شکست خود به خودی تقارن از مدل های نظریه میدان های بوزونی آغاز شد و گلدستون کشف کرد زمانی که تقارن در خلاء نظریه به طور خود به خودی شکسته می شود، بوزون های بدون جرم ظاهر می گردند [۵].

اکنون به اثبات این قضیه در رژیم کلاسیک، می پردازیم. برای مطالعه این قضیه در رژیم کوانتومی باید درستی آن را رتبه به رتبه، بررسی کنیم.

^۵ تعداد تقارن های گروه $O(N)$ به صورت $\binom{N}{2}$ می باشد و تعداد تقارن های گروه $O(N-1)$ ، $\binom{N-1}{2}$ است.

^۶ Goldstone 's Theorem

^۷ میدان های بدون جرمی که در اثر شکست خود به خودی تقارن ظاهر می شوند، بوزون های گلدستون هم معروف هستند.

به منظور اثبات، لاگرانژی نظریه‌ای را با شکل کلی $V(\varphi) - \mathcal{L}$ (جملات مشتق دار) در نظر می‌گیریم، با فرض این که \mathcal{L} تحت تبدیل پیوسته T ، ناوردا بوده و چندین نوع میدان اسکالر $\varphi^a(x)$ (اندیس a نمایشگر نوع میدان است)، درون این نظریه وجود دارد.

در ابتدا پتانسیل نظریه را حول خلاء نظریه φ که مینیمم پتانسیل است، بسط می‌دهیم. نشان خواهیم داد که به علت متقارن نبودن خلاء در نظریه، شکست خود به خودی تقارن صورت می‌پذیرد و جملات جدیدی در آن ظاهر می‌شوند.

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \sum_a (\varphi - \varphi_0)^a \frac{\partial V}{\partial \varphi^a} \Big|_{\varphi^a = \varphi_0^a} + \quad (1-16)$$

$$\sum_a \sum_b \frac{1}{2} (\varphi - \varphi_0)^a (\varphi - \varphi_0)^b \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \Big|_{\varphi^a = \varphi_0^a, \varphi^b = \varphi_0^b} + \dots \dots \dots$$

همان‌طور که می‌بینیم در جمله سوم بسط، ضرایب $(\varphi^a - \varphi_0^a)$ و $(\varphi^b - \varphi_0^b)$ (شبه $\pi(x)$ و $\sigma(x)$) بیانگر افت و خیزهای میدان حول خلاء نظریه است. حال با استفاده از تعاریف زیر، شکل پتانسیل را به فرمی درمی‌آوریم که به راحتی بتوانیم به نتیجه دلخواه‌مان برسیم:

$$\varphi - \varphi_0 \equiv \eta \quad ; \quad \frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \Big|_{\varphi^a = \varphi_0^a, \varphi^b = \varphi_0^b} \equiv m_{ab}^2 \quad (1-17)$$

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \sum_a \sum_b \frac{1}{2} \eta^a m_{ab}^2 \eta^b + \dots \dots \dots \quad (1-18)$$

به علت این که عبارت $(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b})$ را در نقطه مینیمم، محاسبه می‌کنیم، m_{ab}^2 عددی مثبت است. همچنین می‌توانیم پتانسیل را به شکل ماتریسی نیز بنویسیم.

$$V(\varphi) = V(\varphi_0) + \frac{1}{2} \langle \eta | M | \eta \rangle + \dots \dots \dots$$

درصد هستیم نشان دهیم که جمله دوم رابطه فوق، نقش جمله جرمی را برای میدان‌های $\eta^a(x)$ بازی می‌کند. البته اگر بردار $|\eta\rangle$ را به نحوی بچرخانیم که روی یکی از پایه‌های ماتریس M تصویر شود، تعبیر فوق صحیح می‌باشد.

بنابراین با فرض این که خلاء نظریه، ویژه حالت M است، به این نتیجه رسیدیم که با بسط پتانسیل در نزدیک خلاء، یک جمله جرمی ظاهر شده است.

حالا به منظور بررسی این که، چه مولفه‌ای از میدان $\eta(x)$ ، بدون جرم (ویژه مقدار صفر ماتریس M) و کدام مولفه میدان، جرم‌دار است به بررسی ناوردایی پتانسیل تحت تبدیل T می‌پردازیم.

$$\varphi \rightarrow \varphi' = T\varphi \quad ; \quad V(\varphi) = V(T\varphi) \quad (1-19)$$

$$V(\varphi'^a) = V(\varphi^a) + \sum_a \alpha \Delta^a(\varphi) \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi} \quad ; \quad \left[\Delta^a(\varphi) \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^a} \right] = 0 \quad (1-20)$$

به منظور این که از عبارت به دست آمده، تعبیر جرم میدان را بکنیم، مشتق دوم عبارت را در

مینیمم پتانسیل محاسبه می‌کنیم. $\left(\frac{\partial^2 V(\varphi)}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \right)_{\varphi'} = 0$ حال اگر $\Delta^a(\varphi') = 0$ شود، به

این نتیجه می‌رسیم که مولفه‌ی a ام میدان تحت تبدیل ناورد است $\varphi'^a = \varphi^a$ ، در نتیجه این

مولفه میدان جرم‌دار می‌باشد (زیرا $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^a \partial \varphi^b} \right)_{\varphi^a} \neq 0$). در صورتی که اگر $\Delta^a(\varphi') \neq 0$ باشد،

آن میدان بدون جرم بوده که نشان‌دهنده شکست تقارن برای آن مولفه میدان بوده است. پس به اثبات قضیه گلدستون رسیدیم.

تا اینجا به بررسی تقارن در نظریه میدان‌های کلاسیک پرداختیم. حال اگر بخواهیم تقارن را در رژیم کوانتومی بررسی نماییم به یکسری ابزار نیازمندیم که در ابتدا به مطالعه آن‌ها می‌پردازیم.

فصل دوم

آشنایی با انتگرال مسیر

استفاده از تابعی^۸ در کوانتس نظریه‌های میدان، تاریخچه‌ای طولانی دارد که از جمله، می‌توانیم به تحقیقات شوینگر و زیمانسکی در سال ۱۹۵۰ اشاره کنیم. البته حدود سال ۱۹۳۳، دیراک از پیشگامانی بود که پیشنهاد استفاده از انتگرال مسیر^۹، را برای نمایش دامنه‌های کوانتومی به صورتی دیگر داد. بعد از آن، در سال ۱۹۴۸، انتگرال مسیر، توسط فاینمن پایه‌گذاری شد. از طرفی، شوینگر نیز روشی را بر اساس مشتق تابعی معرفی کرد.

با این حال، مطالعات روی نظریه‌های میدان با به‌کارگیری ابزاری انجام می‌شد که عملاً موجب پیچیده‌تر شدن محاسبات می‌شد. در حدود دهه ۷۰، این فرمالیسم به‌عنوان ابزاری کارآمد در نظریه میدان شناخته شد. درحقیقت، انتگرال مسیر در بسیاری از موارد جایگزین روش کانونیک، در نظریه میدان‌های کوانتومی گردید [۶].

در این فصل با فرمالیسم ریاضی انتگرال مسیر آشنا می‌شویم. همچنین با نحوه محاسبه توابع چند نقطه‌ای عملگر میدان از طریق این روش با توجه به در نظر گرفتن انواع ویژه مقادیر عملگر میدان (نه صرفاً ویژه مقادیری که در معادله حرکت کلاسیک صدق می‌کند)، آشنا خواهیم شد. در نهایت خواهیم دید که محاسبات با این فرمالیسم، به راحتی انجام می‌پذیرد.

۲-۱ معرفی انتگرال مسیر

درحقیقت، انتگرال مسیر همان انتگرال تابعی است. به عبارت دیگر، انتگرال مسیر، بیان کننده جمع روی تمام مسیره‌های ممکن است که هر مسیر با تابعی مشخص می‌شود.

^۸ functional

^۹ Path integral

به منظور آشنایی با نحوه عملکرد آن، ابتدا در چارچوب مکانیک کوانتومی، یک سیستم تک ذره‌ای را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم سیستم مذکور، در زمان $t = 0$ در نقطه x_a است. آنگاه به محاسبه دامنه‌ی احتمال این ذره که در $t = T$ در نقطه x_b باشد، می‌پردازیم. از اینرو، دامنه‌ی تحول سیستم را به صورت زیر بیان می‌کنیم :

$$U(x_a, x_b; T) = \langle x_b | e^{-\frac{iHT}{\hbar}} | x_a \rangle = \langle x_b, T | x_a, 0 \rangle \quad (2-1)$$

حال، همین دامنه را می‌توانیم به شکلی دیگر یعنی جمع روی انواع مسیرهایی بیان کنیم که ذره برای رفتن از نقطه x_a به نقطه x_b طی می‌کند. همچنین، می‌توان نشان داد که با به-کارگیری این فرمالیسم، به همان نتیجه‌ای می‌رسیم که توسط روش هامیلتونی، محاسبه می‌کردیم.

برای در نظر گرفتن چنین جمعی، باید دریابیم که تفاوت میان مسیرها در چیست؟ به بیان دیگر، باید بدانیم چه شاخصی، مسیرها را از هم متمایز می‌کند. درحقیقت تفاوت مسیرها در اختلاف راه میان آنهاست. از اینرو می‌توانیم اختلاف راه موجود را با اختلاف فاز بیان کنیم. در این مرحله، همانند آزمایش دو شکاف یانگ^{۱۱}، دامنه‌ی پراکنده‌گی را به صورت جمع روی مسیرهایی که توسط فازشان مشخص می‌گردند، بیان می‌کنیم :

$$U(x_a, x_b, T) = \sum_{\text{همه مسیرها}} e^{i\text{phase}} = \int Dx(t) e^{i\text{phase}} \quad (2-2)$$

$x(t)$ نمایشگر مسیری است که ذره از زمان صفر تا T طی می‌کند و اندازه^{۱۱} انتگرال که به-صورت D نمایش داده شده بیانگر جمع روی توابع مختلف $x(t)$ است. به انتگرال حاصل، انتگرال تابعی می‌گوییم.

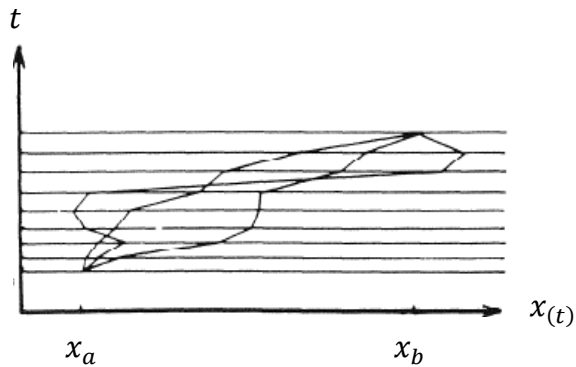
در گذشته، با انتگرال‌هایی روبرو بودیم که اندازه انتگرال، آرگومان یک تابع بود، درحالی‌که، در انتگرال تابعی، اندازه انتگرال، خود تابع متغیر دیگری است.

^{۱۱} نور، دو مسیر متفاوت را طی می‌کرد و هر نقطه مشاهده شده روی پرده نمایشگر، ناشی از اختلاف فاز میان دو موج ورودی بود.

از اینرو، طول موج نهایی را برحسب همین اختلاف راه به دست می‌آوریم.

^{۱۱} Measure

یک عبارت تابعی را به شکل $F[x(t)]$ در نظر می‌گیریم. از اینرو فاز را که در این انتگرال به-
عنوان یک تابعی است (تابع مسیر حرکت ذره را دارد) با $phase[x(t)]$ نمایش می‌دهیم.



شکل ۱-۲ نشان‌دهنده مسیرهای مختلفی است که ذره می‌تواند طی کند

همان‌طور که در شکل می‌بینیم برای دامنه‌ی پراکنده‌گی ذره، می‌توان بینهایت مسیر، در نظر گرفت، البته لازم به ذکر است، از همه مسیرهای موجود، مسیری کلاسیک است که با تغییر کوچک مسیر، فاز بدون تغییر بماند. به بیان دیگر، مسیرهای نزدیک مسیر کلاسیک، به علت اختلاف راه بسیار کم نسبت به مسیر کلاسیک، فازهای یکسانی دارند $[\left(\frac{\delta Phase[x(t)]}{\delta x(t)}\right)_{x_{cl}} = 0]$. از طرفی می‌دانیم که مسیر کلاسیک دارای حداقل کنش است. از اینرو، فاینمن به این نتیجه رسید که می‌توان فاز مسیر را به شکل کنش نیز نمایش داد:

$$U(x_a, x_b, T) = \int Dx(t) e^{iS[x(t)]/\hbar} \quad (2-3)$$

از آنجایی که دامنه‌ی پراکنده‌گی به فرم انتگرال مسیر در معادله شرودینگر صدق می‌کند، می‌توان به راحتی نشان داد فاینمن فرض درستی کرده است.

به همین منظور، اندازه انتگرال را به فرمی ساده‌تر نمایش می‌دهیم. درحقیقت، بازه زمانی صفر تا T را به N بازه زمانی بسیار کوچک ϵ تقسیم می‌کنیم. سپس به جای جمع بستن روی انواع مسیرها، روی کلیه مقادیری که x می‌تواند در هر بازه ϵ داشته باشد انتگرال می‌گیریم. بنابراین اندازه انتگرال به صورت $Dx(t) = \prod_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_k}{C(\epsilon)}$ می‌شود. در عبارت فوق، از $C(\epsilon)$ برای حذف ثابت‌هایی که در حین محاسبه، ظاهر می‌شوند، استفاده می‌کنیم. در ادامه، کنش مسیر را نیز به

شکلی گسسته در نظر می‌گیریم. با قدری محاسبه و استفاده از انتگرال گاوسی، به نتیجه مورد نظر خود می‌رسیم که دامنه‌ی پراکنده‌گی به فرم انتگرال مسیر در معادله شرودینگر صدق می‌کند [۴].

همچنین می‌توانیم در ابتدا، با باز نمودن عبارت دامنه‌ی پراکنده‌گی $\langle q_b | e^{-iHT} | q_a \rangle$ و تقسیم کردن بازه زمانی به N بازه کوچک و بسط دادن exp (بیان کردن هامیلتونی بر حسب عملگرهای مکان و مومنتوم) آن را به شکل زیر نیز نمایش دهیم :

$$U(q_a, q_b, T) = \int Dq(t) Dp(t) \exp [i \int_0^T dt [p\dot{q} - H(p, q)]] \quad (۲ - ۴)$$

عبارت فوق، شکل کلی دامنه‌ی پراکنده‌گی یک سیستم کوانتومی را نشان می‌دهد، که می‌توانیم با در نظر گرفتن هامیلتونی به صورت ساده‌ی $H = \frac{p^2}{2m} + V(q, t)$ (پتانسیل را مستقل از سرعت در نظر گرفتیم)، رابطه (۲-۴) را با محاسبه انتگرال مومنتوم به روش انتگرال گاوسی به فرم زیر به دست آوریم [۶,۷,۸].

$$\langle q_b, T | q_a, 0 \rangle = \int Dq(t) \exp [i \int_0^T dt [\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - V(q, t)]] \quad (۲ - ۵)$$

عبارت داخل توان exp همان لاگرانژی سیستم کوانتومی است. بنابراین توسط فرمالیسم انتگرال مسیر، این امکان فراهم شد، عبارتی را که به شکل عملگری می‌باشد (طرف چپ رابطه (۲-۴) که همان (۲-۱) است) به صورت جمع روی ویژه مقادیر عملگر میدان بیان کنیم.

۲-۲ کاربرد انتگرال مسیر در نظریه میدان اسکالر

تا اینجا با این فرمالیسم در مکانیک کوانتومی آشنا شدیم. در این قسمت، به مطالعه آن برای نظریه میدان‌های کوانتومی می‌پردازیم. همان‌طور که می‌دانیم در رژیم کوانتومی، این امکان وجود دارد هر نوع شکل یا ویژه تابع عملگر میدان را می‌توانیم در نظر بگیریم. بنابراین با این توابع، توزیع میدان در فضا را نشان می‌دهیم. درحقیقت می‌خواهیم با بهره‌گیری از انتگرال