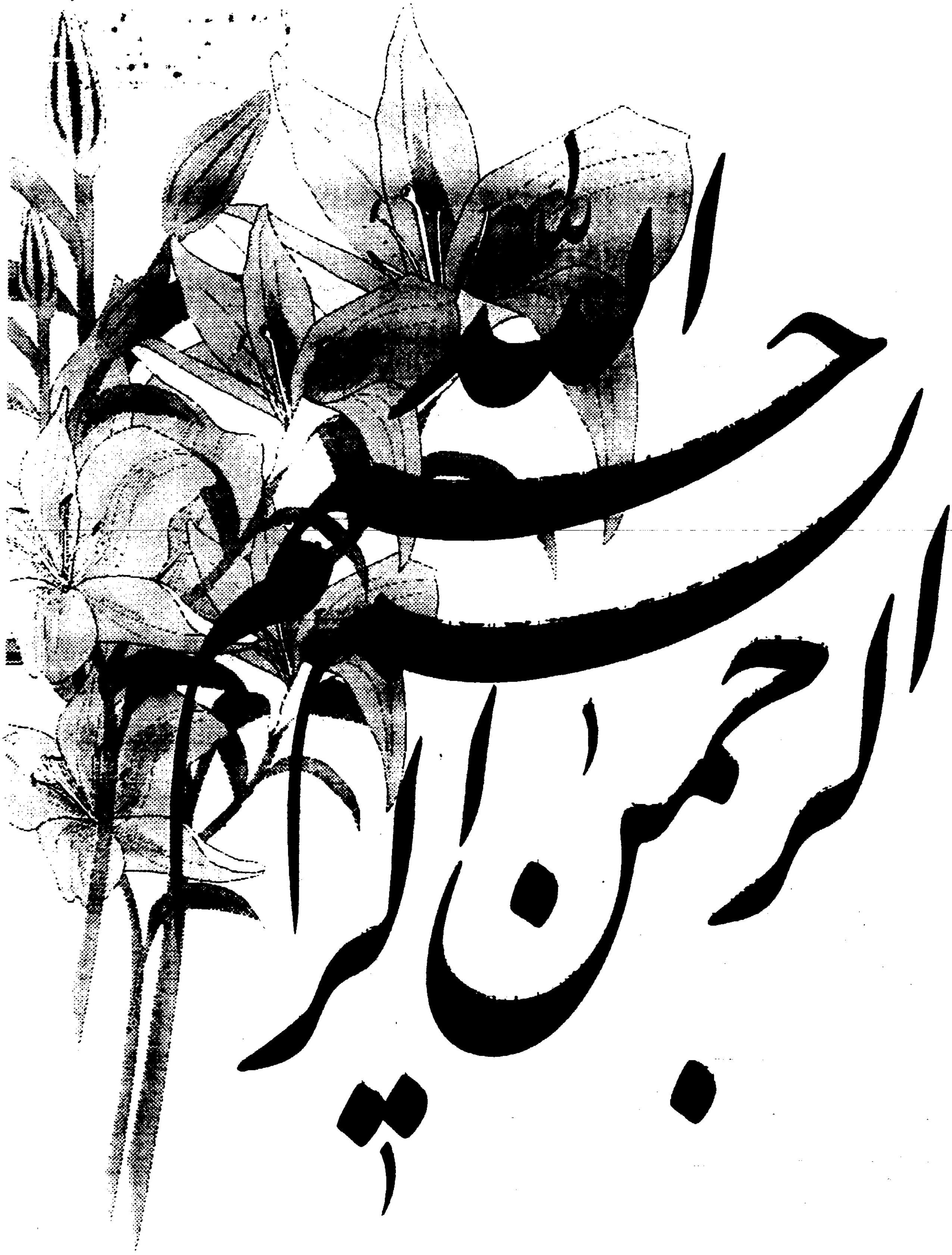

۲۵۸۶۴

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

موضوع :

بر آورد درستنمائی ماکزیمم پارامترهای فرآیند میانگین متحرک $MA(q)$

استاد راهنما:
آقای دکتر حسینعلی نیرومند

استاد مشاور:
آقای دکتر غلامحسین شاهکار

استاد داور:
آقای دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا

نگارش :

ابوالفضل سعیدی فر

دی ماه ۱۳۷۷

((تعلیم و تعلم عبادت است)) (امام خمینی)

تقدیم به پیشگاه مبارک و مقدس الثامن‌الحجج (علیه السلام)

و

روح پر فتوح حضرت امام خمینی (ق.س)

تقدیر و تشکر :

سپاس و ستایش خدای منان را که توفیق کسب علم و دانش به من عنایت بخشیدند.

ضمن تشکر و سپاسگزاری از استاد راهنما، جناب آقای دکتر حسنعلی نیرومند ، استاد مشاور ، جناب آقای دکتر غلامحسین شاهکار ، از جناب آقای دکتر ابوالقاسم بزرگ نیا نیز که داوری این رساله را بعهده گرفتند تقدیر فراوان می‌نمایم . چرا که علاقمندی خود را به ادامه تحصیل در دوره کارشناسی ارشد مرهون راهنمائیها و مشوق فراوان این استاد عزیز و گرانقدر می‌دانم . از خداوند متعال طول عمر و صحت این استاد ارجمند را خواهانم.

همچنین جادارد که از اساتید محترم : جناب آقای دکتر حسن صادقی - جناب آقای دکتر سیدمهدی‌طباطبائی - جناب آقای دکتر ناصررضاارقامی - جناب آقای دکتر حسنعلی آذرنوش - جناب آقای دکتر علی مشکانی - جناب آقای دکتر فتوحی و اساتید محترم دیگری که از محضر درس آنان استفاده نموده‌ام سپاسگزاری نمایم.

برخود لازم می‌دانم که از مسئولین محترم کتابخانه جناب آقای رسول اتحاد و آقای داودنژاد که کمک فراوانی را در تهیه مقالات و کتب لازم به اینجانب نمودند تشکر نمایم.

برآورد درستنمایی ماکزیمم پارامترهای

فرآیند میانگین متحرک MA(q)

صفحه

فهرست

فصل اول

مقدمه

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل اول

مـقـدمـه

به نظر می‌رسد که فرایند میانگین متحرک[1] برای اولین بار توسط والد (۱۹۳۸) مورد بررسی قرار گرفت ،فرآیندهای MA در بسیاری از زمینه‌ها ،بخصوص در اقتصادسنجی بکار می‌روند،لذا بـرآورد پارامترها،به روش درستنمایی ماکزیمم (MLE) کمک فراوان به بهینه بودن مدل می‌نماید.بنابراین افراد زیادی منجمله ویتل [2] (۱۹۵۳-۱۹۵۰) ،والکر[3] (۱۹۶۱) هنن[4] (۱۹۶۹) برای بدست آوردن برآورد (MLE) تحقیقاتی را انجام داده‌اند ،که دربیشتر اوقات به دلیل مشکلاتی که برسرراه بدست آوردن آن وجود دارد ،به یک برآورد کارا دست نیافتند.

دو مشکل اساسی برسر راه برآورد MLE پارامترهای فرآیند MA وجود دارد.

۱- معکوس ماتریس کوواریانس ۲- فرم درجه دومی که در معادلات درستنمایی ظاهرمی‌شود که بصورت یک ترکیب خطی از پارامترها نیستند ، علاوه براین بدلیل اینکه مشتقات عناصر معکوس ماتریس ساده نمی‌باشند ،بنابراین ترکیبهات خطی که در معادلات درستنمایی برحسب مشاهدات وپارامترها ظاهر می‌شوند پیچیده ،خواهند بود.که در اینصورت حل این معادلات به سادگی امکان پذیر نیست ،وتاکنون کسی موفق به حل آنها نشده است.

همانطور که در نظریه آمار برای بدست آوردن اطلاعات در مورد پارامترها به دنبال یک آماره بسنده می‌گردیم ، و می‌دانیم که اطلاعات در آماره بسنده بیشتر از اطلاعات در تک تک مشاهدات می‌باشد ، گودلفین[5] از سال (۱۹۷۷) ، به بعد اساس کار خود را برای یافتن برآوردهای (MLE) برروی دنباله ضرایب خود همبستگی‌های نمونه جلب نموده زیرا اطلاعاتی که در ضرایب خود همبستگی‌های نمونه

1-Moving Average 2-Whittle 3-Walker 4-Hannan

وجود دارد بیشتر از اطلاعاتی است که مستقیما از مشاهدات حاصل می‌شود. بنابراین وی سعی کرده است تاپارامترها را بتواند بصورت یک ترکیب خطی از دنباله ضرایب خود همبستگی‌های نمونه در آورده و سپس ترکیب خطی را طوری تغییر و تحویل دهد ، تا برآوردها ، همگرا ، کارا و دقیقتر شوند که وی اولین مطلب خود در این مورد در سال (۱۹۷۷) ارائه دادو سپس در سالهای (۱۹۷۸، ۱۹۸۰ ، ۱۹۸۲) سعی نمود تا این ترکیبات خطی را اصلاح کند بنابراین هدف ما در اینجا آن است که تا حد ممکن این ترکیبات خطی را بهتر نموده تا برآوردهای بدست آمده ، بهینه شوند.

فصل اول

در این قسمت مجموعه تعاریفی راکه در طول مبحث مورد بررسی ،استفاده خواهیم کرد،بیان می‌کنیم

تعاریف :

۱-۱ : یک سری زمانی مجموعه‌ای از مشاهدات است که برحسب زمان مرتب شده باشد.

۱-۲ : به مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{ X(t) \ , \ t\in T \}$ ، که در آن T مجموعه نقاط زمانی را نشان می‌دهد یک فرایند گویند ، اگر T پیوسته باشد آنگاه فرآیند را با X(t) و اگر T گسسته باشد آنرا با X_t نمایش می‌دهند.

پس یک فرایند تصادفی ، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی است که برحسب زمان مرتب شده است.

۱-۳ : تابع اتوکوواریانس فرایند $\{X_t\}$ را با γ_k نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma_k = E(X_t - \mu_x)(X_{t+k} - \mu_x) \quad , \quad k=1,2,3,...$$

که در آن $\mu_x=E(X_t)$ و k تاخیر زمانی را نشان می‌دهد.

همچنین بطور مشابه می‌توان ضریب اتوکواریانس نمونه را تعریف کرد.

$$C_k=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x}) \qquad (۱-۳-۱)$$

که در آن $\bar{x}$ میانگین فرآیند $\{X_t\}$ است و C_o بعنوان واریانس فرآیند در نظر گرفته می‌شود.

$$C_o=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2 \qquad (۱-۳-۲)$$

۱-۴ : تابع خود همبستگی فرآیند $\{X_t\}$ را با ρ_k نمایش داد، و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_o} = \frac{E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu)}{E(X_t - \mu)^2} \qquad (۱-۴-۱)$$

بطور مشابه ضریب همبستگی نمونه را بصورت زیر می‌توان تعریف کرد.

$$r_k = \frac{C_k}{C_o} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^{n}(x_t - \bar{x})^2} \qquad k = 1,2,\dots \qquad (۱-۴-۲)$$

۱-۵ : سریهای زمانی ایستا

یک سری زمانی را اکیدا ایستا گویند هرگاه به ازای هر K و t_1 , t_2 , ... , t_n ، توزیع مشترک متغیرهای تصادفی X_{t_1} , X_{t_2} , . . . , X_{t_n} مانند توزیع مشترک متغیرهای تصادفی X_{t_1+k} , X_{t_2+k} , . . . , X_{t_n+k} باشد ، به عبارت دیگر اگر نقاط زمانی را به اندازه k واحد انتقال دهیم ، توزیع مشترک ثابت باقی بماند، به عنوان مثال اگر n=1 آنگاه توزیع X_{t_1} و X_{t_1+k} یکسان باشد درنتیجه $E(X_{t_1})=E(X_{t_1+k})$ $V(X_{t_1})=V(X_{t_1+k})$.همچنین یک سری زمانی را ایستا ضعیف گویند هرگاه میانگین سری ثابت و به زمان بستگی نداشته باشد و تابع اتوکوواریانس آن نیز به زمان بستگی نداشته باشد و فقط تابعی از تاخیر زمانی k باشد .

۱-۶ : خواص تابع خود همبستگی

تابع خود همبستگی سری زمانی $\{X_t\}$ را که همبستگی بین مشاهدات را بیان می‌کند دارای خواص زیر است.

الف) $\rho_0 = \frac{\gamma_o}{\gamma_o} = 1$

ب) $\rho_k = \rho_{-k}$

ج) $|\rho_k| \le 1$ (۱-۶-۱)

در سریهای زمانی مانند نظریه احتمال الگوهای کلاسیکی وجود دارد که به آنها فرآیندهاس تصادفی گویند و ما در اینجا فرآیندهای کلاسیک و مورد لزوم را بیان می‌کنیم.

۱-۷ : فرایندهای تصادفی محض (NOISE PROCESSES)

فرایند $\{Z_t\}$ ، $t= o,\pm1,\pm2,\dots$ را یک فرایند تصادفی محض گویند هرگاه شامل دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع باشد بنابراین :

$E(Z_t)= \mu$ (ثابت و به زمان بستگی ندارد) $\forall t$

چون Z_t و Z_{t+k} مستقل‌اند لذا

$$\gamma_k = cov(z_t , z_{t+k}) = \begin{cases} \sigma^2_{z_t} & k=o \\ o & k\neq o \end{cases}$$

در نتیجه چون میانگین این فرایند ثابت ، متناهی و به زمان بستگی ندارد ، و تابع اتوکوواریانس آن نیز فقط به k بستگی دارد پس یک فرآیند ایستا است.

۱-۸ : فرآیند گام برداری تصادفی (RANDOM WALK PROCESSES)

هرگاه $\{Z_t\}$ یک فرایند تصادفی محض با میانگین μ و واریانس $\sigma_z{}^2$ باشد،آنگاه $\{X_t\}$ را یک فرایند گام برداری تصادفی گویند.اگر

$$X_t = X_{t-1} + Z_t \quad , \quad X_o = o \qquad (۱-۸-۱)$$

این فرآیند ناایستا است زیرا میانگین و واریانس آن به زمان بستگی دارد.

$$X_o = o , X_1 = Z_1 , X_2 = Z_1 + Z_2 , \dots , X_t = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_t = \sum_{i=1}^{t} Z_i$$

$$=> \qquad E(X_t) = \sum_{i=1}^{t} E(Z_i) = t\mu$$

$$Var(X_t) = \sum_{i=1}^{t} Var(Z_i) + \sum_{i\neq j}^{t} cov(Z_i,Z_j) = t\sigma_z^2 + o = t\sigma_z^2$$

بعنوان مثال می‌توان گفت که قیمت سهام در بازار بورس از این فرایند پیروی می‌کند.

قیمت سهام در روز t = قیمت سهام در روز t-1 + خطای تصادفی

۱-۹ : فرآیند میانگین متحرک (MOVING AVERAGE PROCESSES)

$\{X_t\}$ را یک فرایند میانگین متحرک از مرتبه q گویند و آنرا با نماد MA(q) نمایش داده که بصورت زیر تعریف می‌شود :

$$X_t = Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2} - \dots - \beta_q Z_{t-q} = \sum_{i=o}^{q} -\beta_i Z_{t-i}, \quad \beta_o = -1$$

روشن است که این فرایند بصورت یک ترکیب خطی وزن داری از فرآیند تصادفی محض حال و گذشته می باشد.

خواص این فرایند را می‌توان بطور مختصر بصورت زیر ذکر کرد.

$$E(X_t) = E(Z_t) - \beta_1 E(Z_{t-1}) - \dots - \beta_q E(Z_{t-q}) = o$$

$$\gamma_k = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu) = E X_t X_{t+k} = E\left\{ \sum_{i=o}^{q} (\beta_i Z_{t-i}) \sum_{j=o}^{q} \beta_j Z_{t+k-j} \right\}$$

$$= E\left(\sum_{i=o}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} Z_{t-i}^2 \right) + E\left(\sum_{i \neq j}^{q-k} \beta_i \beta_{j+k} Z_{t-i} Z_{t-j} \right)$$

اگر $i \neq j$ ، Z_{t-i} و Z_{t-j} مستقل‌اند و میانگین آنها صفر است لذا حاصل جمله دوم صفر است. بنابراین :

$$\gamma_k = \sum_{i=o}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} E(Z_{t-i}^2) = \sigma_z^2 \sum_{i=o}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} = \sigma^2 \sum_{i=o}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k}$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 \sum_{i=o}^{q} \beta_i^2 & k=o \qquad \beta_o = -1 \\ \sigma^2 \sum_{i=o}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k} & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm q, o \\ o & k \geq q+1 \end{cases} \qquad (۱-۹-۲)$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=o \\ \dfrac{\sum_{i=1}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k}}{\sum_{i=o}^{q} \beta_i^2} & k=o,1,2,\ldots,q \\ o & k \geq q+1 \end{cases}$$

$\beta_o=-1$ (۱-۹-۳)

در حالت خاص که $q=1$ و $q=2$، خواص فوق را می‌توان بصورت زیر بیان کرد.

الف) اگر $q=1$، آنگاه فرآیند میانگین متحرک مرتبه اول عبارت است از :

$$X_t = Z_t - \beta Z_{t-1}$$

که در آن Z_t یک فرآیند تصادفی محض با میانگین صفر وواریانس σ^2 است و داریم :

$$E(X_t) = E(Z_t) - \beta E(Z_{t-1}) = o$$

$$\gamma_k = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu) = E(X_t X_{t+k}) = E(Z_t - \beta Z_{t-1})(Z_{t+k} - \beta Z_{t+k-1})$$

$$= E(Z_t Z_{t+k}) - \beta E(Z_t Z_{t+k-1}) - \beta E(Z_{t-1} Z_{t+k}) + \beta^2 E(Z_{t-1} Z_{t+k-1})$$

پس

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2(1+\beta^2) & k=o \\ -\sigma^2\beta & k=\pm 1 \\ o & k\geq 2 \end{cases}$$ (۱-۹-۴)

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=o \\ \dfrac{-\beta}{1+\beta^2} & k=1 \\ o & k\geq 2 \end{cases}$$ (۱-۹-۵)

ب) اگر $q=2$ آنگاه فرآیند میانگین متحرک مرتبه دوم عبارت است از :

$$X_t = Z_t - \beta_1 Z_{t-1} - \beta_2 Z_{t-2}$$

$E(X_t)=o$

پس

$$\gamma_k = E(X_t - \mu)(X_{t+k} - \mu) = E(X_t X_{t+k})$$

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma^2 (1+\beta_1^2+\beta_2^2) & k=o \\ \sigma^2 (-\beta_1+\beta_1\beta_2) & k=\pm 1 \\ -\sigma^2\beta_2 & k=\pm 2 \\ o & k\geq 3 \end{cases} \qquad (۱-۹-۶)$$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=o \\ \dfrac{-\beta_1+\beta_1\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & k=1 \\ \dfrac{-\beta_2}{1+\beta_1^2+\beta_2^2} & k=2 \\ o & k\geq 3 \end{cases} \qquad (۱-۹-۷)$$

۱ - ۱۰ : فرآیند اتورگرسیو

$\{X_t\}$ را فرایند اتورگرسیو از مرتبه p گویند و آنرا با نماد AR(q) نمایش داده که بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \alpha_2 X_{t-2} + \dots + \alpha_p X_{t-p} + Z_t \qquad (۱-۱۰-۱)$$

که در آن Z_t فرآیند تصادفی محض با میانگین صفرو واریانس σ^2 می‌باشد.

به عبارت دیگر فرآیند اتورگرسیو فرآیندی است که مشاهده در زمان t بصورت یک ترکیب خطی وزن‌داری از مشاهدات گذشته و فرآیند تصادفی محض حال نوشته می‌شود،روشن است که این فرآیند شبیه یک الگوی رگرسیون است با این تفاوت که در این فرآیند متغیرهای X_{t-1} , X_{t-2} , ... , X_{t-p} مستقل نیستند.