بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان نامهٔ دکتری

عنوان:

رسته‌ی S—سیستمهای توپولوژیکی و نیم‌توپولوژیکی

نگارش:
بهنام خسروی

استاد راهنما:
آقای دکتر محمدمهدی ابراهیمی

استاد مشاور:
سرکار خانم دکتر مژگان محمودی

شهریور ۱۳۸۹

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره دکتری»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره **۲۴۳۸/۲۰۰/د** مورخ **۸۹/۶/۱** جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان‌نامه **آقای بهنام خسروی** به شماره شناسنامه: **۱۶۲۴** صادره از : **تهران** متولد: **۱۳۶۰** دانشجوی دوره دکتری **ریاضی**

با عنوان:

رسته S- سیستم‌های توپولوژیکی و نیم توپولوژیکی

به راهنمایی: آقای دکتر محمدمهدی ابراهیمی

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۹/۶/۲۴** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه دکتری مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ ۱۹,۲۵ نوزده و بیست و پنج و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. **استاد راهنما:** آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	ابراهیمی
۲. **استاد مشاور:** خانم دکتر مژگان محمودی	استاد	شهید بهشتی	
۳. **استاد داور:** آقای دکتر سیدعلیرضا حسینیون	استاد	شهید بهشتی	
۴. **استاد داور:** آقای دکتر بیژن هنری	استادیار	صنعتی امیرکبیر	
۵. **استاد داور:** آقای دکتر علی معدنشکاف	استادیار	سمنان	معدنشکاف
۶. **استاد داور:** خانم دکتر مونا نبیعی	استادیار	شهید بهشتی	
۷. **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	
۸. **نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه:** آقای دکتر علیرضا سالمکار			

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم

و برادران عزیزم

تقدیر و تشکر

خداوند را سپاس می‌گویم که به من توفیق داد که با تحصیل علم، گوشه‌ای بسیار ناچیز از بزرگی و زیبایی خلقتش را درک کنم و در این راه استادان و راهنمایان بزرگواری را بر سر راه من قرار داد تا با دانش و راهنمایی ارزنده‌شان مرا یاری کنند.

قبل از هر چیز بر خود لازم می‌دانم از تمام معلمان و استادان بزرگوارم که در طی این سالها همیشه راهنمای من بودند به خصوص جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی که راهنمایی این رساله را بر عهده داشتند و زحمات بسیار زیادی را برای آموزش و راهنمایی ما کشیدند سپاسگزاری کنم. بی شک ایشان یکی از بهترین معلمان زندگی من بودند و در طی این سالها در کنار راهنمایی علمی، در زندگی نیز راهنما و معلمی دلسوز برای ما بودند.

از استاد مشاور گرانقدرم سرکار خانم دکتر محمودی به خاطر همه دلسوزیها و محبتهایشان در طی این دوره‌ی تحصیلی سپاسگزاری می‌کنم. ایشان در طی این سالها در حکم یک استاد راهنمای دوم همیشه در کنار ما بودند و همیشه راهنماییهای ارزنده‌شان را از ما دریغ نمی‌کردند.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر حسینیون که همیشه به من لطف داشتند، به خاطر تمام راهنماییهای ارزنده‌شان در طی دوران تحصیلم در دانشگاه شهید بهشتی و به خاطر این که بزرگواری نمودند و داوری این رساله را پذیرفتند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر معدنشکاف و جناب آقای دکتر بیژن هنری که با وجود مشغله زیاد بزرگوارانه قبول زحمت نمودند و داوری خارجی این رساله را پذیرفتند و من را با راهنمایی‌ها و تذکرهای ارزنده‌شان در اصلاح و بهبود این رساله یاری کردند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

از سرکار خانم دکتر نبیعی که در طی این دوران که افتخار آشنایی‌شان را داشتم همیشه دوستانه راهنمای

همه‌ی ما بودند به خاطر همه‌ی محبتهایشان و به خاطر این که بزرگوارانه داوری داخلی این رساله را پذیرفتند سپاسگزاری می‌کنم.

بی شک در زندگی هر کس افرادی وجود دارند که به دلیل بزرگواریشان همیشه در ذهن باقی می‌مانند و گذر زمان هرگز یاد آنان و بزرگواری‌هایشان را کمرنگ نمی‌کند. از استادان بزرگوارم سرکار خانم دکتر گویا، سرکار خانم دکتر میلانی، جناب آقای دکتر بهمن هنری و جناب آقای دکتر ذکایی به خاطر تمام محبتها و بزرگواری‌هایی که در این ۷ سال نسبت به من داشتند صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

از نخستین و بهترین معلم ریاضی و زندگیم، پدر مهربانم، جناب آقای دکتر امیر خسروی که همیشه راهنما و مشوق من در زندگی و تحصیل بودند و در جریان پژوهش و تنظیم این رساله من را همیشه با راهنمایی‌های ارزنده‌شان یاری می‌کردند از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

از خورشید مهر و محبت، مادر دلسوزم، سرکار خانم خسروی که در زندگی هدفی به جز موفقیت ما نداشتند و بی‌شک موفقیت امروز ما نتیجه‌ی تمام دلسوزیها و تشویقهای بی پایان ایشان است از صمیم قلب تشکر و قدردانی می‌کنم.

از برادر بزرگوارم جناب آقای دکتر بهروز خسروی که از دوران کودکی همیشه با محبتها و راهنمایی‌های ارزنده‌شان پشتیبان ما بودند و قبل از خودمان به فکر ما بودند و بی‌شک بسیاری از موفقیتها و جبران اشتباه‌های ما نتیجه‌ی دلسوزیها و محبتهای بی‌دریغ ایشان بوده است از صمیم قلب سپاسگزاری می‌کنم.

از برادر مهربانم جناب آقای بهمن خسروی که خاطره‌ای خوش بدون حضور ایشان در ذهن ندارم و همیشه تکیه‌گاهی استوار و پشتیبانی فداکار برای من بودند به پاس تمام کمکها، محبتها و حمایتهای بی‌دریغشان که شروعی و اندازه‌ای برای آن در ذهن ندارم صمیمانه تشکر می‌کنم.

هزاران هزار بار خداوند بلند مرتبه‌ی مهربان را شکر می‌گویم که موهبت داشتن چنین خانواده‌ای را به من داد چرا که بدون محبتها، راهنمایی‌ها و پشتیبانی‌های بی‌دریغشان هرگز نمی‌توانستم به موفقیتی برسم و اگر امروز موفق به پایان این دوره شدم تنها و تنها به لطف دلسوزی این عزیزان بوده است.

از تمام استادان و معلمان بزرگواری که با حضور در کلاسهای پربارشان گوشه‌ای ناچیز از علمشان را فرا گرفتم و به لطف محبتهایشان توانستم با دنیای زیبای دانش و ریاضیات آشنا شوم از صمیم قلب سپاسگزاری

می‌کنم که تمام آنچه می‌دانم به لطف زحمات این عزیزان بوده است.

درخاتمه، از تمام کارکنان و بخش اداری دانشگاه شهید بهشتی که در طی این ۷ سال، دلسوزانه و با محبت همیشه در کنار ما بودند و تمام سعی خود را برای انجام امور اداری همه‌ی دانشجویان به کار گرفتند از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

والسلام علی من اتبع الهدی

بهنام خسروی

چکیده

مطالعه نیمگروههای توپولوژیکی و انواع مختلف عمل آنها، از سالها پیش مورد علاقه ریاضیدانان بوده است و دارای کاربردهای بسیار زیادی در شاخه‌های مختلف ریاضی همچون آنالیز، هندسه و توپولوژی است و به دلیل همین کاربردهای فراوان این نظریه است که در سالهای اخیر این نظریه به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. در سال ۱۹۹۳، نورمک نام S–سیستمهای توپولوژیکی را روی نمایش نیمگروههای توپولوژیکی گذاشت و خود نیز به بحث در مورد این ساختار پرداخت. در این رساله برآنیم که مطالعه رسته‌ی S–سیستمهای توپولوژیکی را ادامه دهیم و برای شروع، کار خود را با مطالعه شی آزاد، هم‌آزاد، همنهشتیها و اشیا خارج قسمتی در این رسته آغاز می‌کنیم که در واقع پیش نیاز مطالعات بعدی رسته‌ی S–سیستمهای توپولوژیکی و استفاده‌ی از ابزارهای نظریه‌ی رسته برای حل مسایل مطرح در توپولوژی است. البته به عنوان کاربردهایی از استفاده از نظریه‌ی رسته برای حل مسایل توپولوژیکی ، به بررسی و مطالعه چند مساله‌ی معروف در توپولوژی نیز خواهیم پرداخت. در فصل اول برخی تعاریف و قضایای لازم برای مطالعه این رسته را ارایه می‌دهیم و در فصل بعد، نخست رسته‌ی S–سیستمهای نیم‌توپولوژیک را به طور کامل مطالعه می‌کنیم و سپس در ادامه، انواع S–سیستمهای آزاد توپولوژیکی را ارایه می‌دهیم. در فصل دوم، انواع S–سیستمهای هم‌آزاد را مطالعه می‌کنیم و در حالتی که نیمگروه توپولوژیکی (S,τ_S) یک نیمگروه هاسدورف و فشرده‌ی موضعی باشد، این اشیا را ارایه می‌دهیم. در نهایت در فصل آخر، به مطالعه‌ی همنهشتیها روی S–سیستمها و نیمگروههای توپولوژیکی می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: S–سیستم توپولوژیکی، ۲)تکواره‌ی توپولوژیکی، ۳)رسته‌ی S–سیستمهای

توپولوژیکی، ۴)اشیای جهانی، ۵) همنهشتیهای روی S–سیستمها و نیمگروههای توپولوژیکی

پیش‌گفتار

مطالعه‌ی گروههای توپولوژیکی از سالها پیش مورد علاقه‌ی عده‌ی زیادی از ریاضیدانان در شاخه‌ی توپولوژی بوده است و به حدی رایج و شناخته شده است که امروزه به عنوان یک شاخه‌ی کاملا مستقل در توپولوژی شناخته شده است. با گسترش کاربردهای این شاخه در گرایشهای مختلف و با بروز حس نیاز به ساختارهای کلیتر برای کاربردهای شناخته شده از گروههای توپولوژیک، نیمگروههای توپولوژیکی مورد توجه و مطالعه و بررسی قرار گرفتند.

امروزه مطالعه‌ی نیمگروههای توپولوژیک از وسعت بسیار زیادی برخوردار شده است و به سختی می‌توان دسته بندی دقیقی برای این مطالعات ارایه داد ولی می‌توان گفت که یکی از دسته‌های بسیار مطرح در این نظریه، بررسی نیمگروههای توپولوژیکی با دیدگاه توپولوژیکی است. این دیدگاه کمتر به مساله کاربرد این نظریه در آنالیز، هندسه و ... توجه دارد و معمولا به مطالعه‌ی خود این ساختار توپولوژیکی و جبری می‌پردازد. در این دیدگاه مسایلی از قبیل عمل نیمگروههای توپولوژیکی با ویژگیهای گوناگون روی فضاها، نمایش نیمگروههای توپولوژیکی یا همنهشتیهای توپولوژیکی مورد مطالعه قرار می‌گیرند.

در این رساله ما قصد داریم که مطالعه‌ی نمایش نیمگروههای توپولوژیکی را ادامه دهیم و این مفهوم را از دیدگاه نظریه‌ی رسته مورد بررسی قرار دهیم. لازم به یادآوری است که نمایش نیمگروهها و نیمگروههای مرتب در سالهای اخیر از این دیدگاه مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و این مطالعات به عنوان یک ابزار قوی در مطالعه‌ی نیمگروهها و نیمگروههای مرتب استفاده می‌شوند. از آنجایی که مطالعه‌ی نیمگروههای توپولوژیک و عمل پیوسته‌ی آنها با استفاده‌ی از ابزارهای نظریه‌ی رسته، نیازمند برخی مطالعات اولیه است، هدف اصلی ما در این مطالعه، بررسی و مشخص سازی اشیای جهانی مانند شی آزاد، هم‌آزاد، ضرب، همضرب و ... در رسته‌ی $S-$سیستمهای توپولوژیکی و نیم‌توپولوژیکی است، زیرا همانطور که می‌دانیم مطالعه‌ی این اشیا، نخستین گام در به کارگیری ابزار قدرتمند نظریه‌ی رسته برای ادامه‌ی مطالعات است. لازم به ذکر است که این نظریه به طور مستقیم در شاخه‌های دیگر علم چون هندسه و شیمی و شاخه‌های دیگر ریاضی چون آنالیز و هندسه کاربرد مستقیم دارد و مفاهیم بسیار زیادی به طور مستقیم یا ضمنی در ارتباط با

این نظریه هستند. برای مثال مفهوم شار در هندسه[۳۳، ۱۰] یا در توپولوژی[۳۱، ۲۷] یا مفهوم نمایش یک گروه گسسته در آنالیز تابعی و نظریه قابها[۲۸، ۲۴، ۲] همگی مثالهایی از S—سیستمهای توپولوژیکی هستند.

در فصل اول این رساله، برخی مفاهیم و قضایای لازم برای شروع مطالعاتمان را ارایه می‌دهیم. سپس در فصل بعد، نخست به بررسی رسته‌ی S—سیستمهای نیم‌توپولوژیکی و بعد به مطالعه‌ی انواع مختلف اشیا آزاد در رسته‌ی S—سیستمهای توپولوژیکی می‌پردازیم. در فصل سوم، به بررسی انواع مختلف اشیا هم‌آزاد در رسته‌ی S—سیستمهای توپولوژیکی می‌پردازیم. در نهایت در فصل چهارم به بررسی همنشتیهای توپولوژیکی روی S—سیستمهای توپولوژیکی و نیمگروههای توپولوژیکی می‌پردازیم.

مقاله‌های زیر حاصل از این رساله هستند:

- B. Khosravi, *On Topological congruences of a topological semigroup*, (to appear in *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society).*
- B. Khosravi, *Free Topological acts over a topological monoid*, Quasigroup and *Related Systems* **18**(1) (2010), 25-42.
- B. Khosravi, *The Category of semitopological S-acts*, WASJ **7** (2009), 7-13.
- M. M. Ebrahimi and B. Khosravi, *Injectivity and Cofree Topological S-acts over a topological monoid*, (submitted).
- B. Khosravi, *Congruences on Topological S-acts and Topological Semigroups*, (submitted).

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

همانطور که در مقدمه‌ی این رساله گفتیم، برای بیان مفهوم S—سیستمهای توپولوژیکی و نیم توپولوژیکی و بررسی رسته‌ی آنها، بایستی با برخی تعاریف و مفاهیم از نظریه S—سیستمها، توپولوژی و نظریه نیمگروه‌های توپولوژیکی و عمل آنها آشنا باشیم. لذا در این فصل به ترتیب به بیان مفاهیم لازم از نظریه‌ی نیمگروه‌ها و نظریه S—سیستمها، توپولوژی و در نهایت نظریه نیمگروه‌های توپولوژیکی و عمل آنها می‌پردازیم.

۱.۱ قضایا و تعاریف لازم از نظریه‌ی نیمگروهها و عمل آنها

در این بخش به معرفی مفهوم S—سیستمها و رسته آنها می پردازیم. مراجع اصلی ما در این زیربخش [۱۵] و [۳۰] است. یادآوری می‌کنیم که یک مجموعه‌ی همراه با یک عمل ضرب شرکتپذیر بر روی آن را یک نیمگروه می نامند. به یک نیمگروه که یک عضو همانی دارد، یک تکواره گفته می‌شود. به عنصری چون s در یک نیمگروه S خودتوان گفته می‌شود اگر $s \cdot s = s$. به نیمگروهی که هر عضو آن خودتوان است یک دسته[۱] یا نیمگروه خودتوان گفته می‌شود. در سراسر این فصل S یک نیمگروه است مگر آن که خلاف آن به صراحت بیان شود.

---

[۱] Band

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم S و S' دو نیمگروه و $f : S \to S'$ یک تابع باشد. تابع f را یک همریختی نیمگروهی از S به S' گویند هرگاه به ازای هر $s, t \in S$ داشته باشیم $f(st) = f(s)f(t)$. اگر $f : S \to S'$ یک همریختی یک به یک و پوشا باشد، آنگاه f را یک یکریختی می‌نامند و S و S' را یکریخت می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱ زیرمجموعه I از نیمگروه S را یک ایده‌آل چپ (راست) می‌گویند هرگاه $SI \subseteq I$ ($IS \subseteq I$). زیرمجموعه I را یک ایده‌آل دوطرفه یا به اختصار یک ایده‌آل می‌نامند هرگاه I هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست باشد.

تعریف ۳.۱.۱ مجموعه A با تابع $\lambda : S \times A \to A$ را یک S–سیستم[۲] می‌نامند هرگاه تابع λ در خواص زیر صدق کند

الف) به ازای هر $s, t \in S$ و $a \in A$ داشته باشیم:

$$\lambda(st, a) := \lambda(s, \lambda(t, a))$$

ب) اگر S یک تکواره با عضو همانی ۱ باشد، در این صورت داشته باشیم $\lambda(1, a) = a$. در این حالت، تابع λ را عمل S روی A می‌نامند.

نمادگذاری. از این پس زمانی که ابهامی در مورد عمل λ وجود نداشته باشد، برای سهولت، $\lambda(s, a)$ را با نماد sa نمایش می‌دهیم. همچنین S–سیستم یک عضوی با نماد Θ_S نمایش داده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم A یک S–سیستم باشد و B یک زیر مجموعه از A باشد. در اینصورت B را یک زیرS–سیستم A می‌نامند هرگاه به ازای هر $b \in B$ و $s \in S$ داشته باشیم $sb \in B$. اگر B زیرS–سیستم A باشد، آنرا با نماد $B \leq A$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنیم S یک نیمگروه باشد و A و B دو S–سیستم باشند. در این صورت تابع $f : A \to B$ را یک S–نگاشت (S–همریختی) می‌نامند هرگاه به ازای هر $s \in S$ و $a \in A$ داشته باشیم

[۲] S–اتوماتا، S–عمل

$f(sa) = sf(a)$. یک S—همریختی پوشا را یک بروریختی می‌نامند. اگر $f : A \to B$ یک S— همریختی یک به یک و پوشا باشد آنگاه f را یک S—یکریختی می‌نامند و S—سیستمهای A و B را یکریخت گویند.

به وضوح هر نیمگروه S را می‌توان با عمل طبیعی القا شده توسط عمل ضربش تبدیل به یک S—سیستم کرد (در واقع کافیست در تعریف بالا، λ را برابر عمل ضرب نیمگروه S بگیریم). ما از این مطلب در جریان اثباتها استفاده خواهیم کرد تا حکمهایی که با فرض برقرار بودن برای هر S—سیستم توپولوژیک ثابت می‌شوند را به شرایطی بر روی خود S یا توپولوژی روی آن ارتباط دهیم.

چون در مباحث فصل آخر این رساله، به پاره‌ای مسایل مرتبط با همنهشتیها بر روی نیمگروه‌ها و S—سیستمها نیازمندیم، در ادامه به طور خلاصه به یادآوری تعریف و برخی مفاهیم مرتبط با همنهشتیها بر روی نیمگروه‌ها و S—سیستمها می‌پردازیم.

نمادگذاری فرض کنید S یک نیمگروه و A یک S—سیستم باشد. در این صورت به ازای هر $a \in A$ و $s \in S$ منظور از λ_s و ρ_a عبارت است از

$$\begin{array}{ll} \lambda_s : A \to A & \rho_a : S \to A \\ a \mapsto sa & t \mapsto ta \end{array}$$

لازم به ذکر است که چون در بعضی از اثباتهای قضیه‌ها، نیازمند کار با هر دو تابع $\lambda_s : A \to A$ و $\lambda_s : S \to S$ در یک زمان، برای یک نیمگروه S و S—سیستمی مثل A هستیم، برای جلوگیری از اشتباه، در این موارد تابع $\lambda_s : S \to S$ را با نماد $\lambda_s^{(S)} : S \to S$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم که S یک نیمگروه و A یک S—سیستم باشد. در این صورت رابطه‌ی هم‌ارزی ρ روی A را یک همنهشتی S—سیستمی (یا S—همنهشتی) (یا اگر شبهه‌ای ایجاد نشود به اختصار یک همنهشتی) روی A می‌نامند هرگاه به ازای هر $s \in S$ و $(a, a') \in \rho$ داشته باشیم $(sa, sa') \in \rho$.

به طریق مشابه همنهشتی روی نیمگروه‌ها قابل تعریف است. در واقع داریم

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم که S یک نیمگروه و ρ یک رابطه هم‌ارزی روی S باشد. در این صورت ρ را یک همنهشتی روی S می‌نامند هرگاه به ازای هر $s \in S$ و $(t, t') \in \rho$ داشته باشیم $(st, st'),\ (ts, t's) \in \rho$.

به وضوح اگر S را به عنوان یک Sـسیستم در نظر بگیریم، هر همنهشتی نیمگروهی روی S یک همنهشتی Sـسیستمی روی آن خواهد بود ولی به وضوح عکس آن درست نیست (چون فرض $(ts, t's) \in \rho$ لزوما نتیجه نمی‌دهد که $(st, st' \in \rho)$). یکی از انواع مختلف همنهشتیها که مطالعه آن از اهمیت بسزایی در نظریه نیمگروه‌ها و Sـسیستمها برخوردار است، همنهشتیهای ریس[۳] روی نیمگروه‌ها و Sـسیستمها هستند که به طریق زیر تعریف می‌شوند.

تعریف ۸.۱.۱ فرض کنیم S یک نیمگروه و A یک Sـسیستم باشد. اگر B یک زیرSـسیستم از A باشد، در این صورت همنهشتی ریس نظیر B بر A، که با ρ_B نمایش داده می‌شود، به طریق زیر تعریف می‌شود که به ازای هر $x, y \in A$، زوج مرتب (x, y) متعلق به ρ_B اگر x, y هر دو متغلق به B باشند یا $x = y$.

به طریق مشابه داریم

تعریف ۹.۱.۱ فرض کنیم S یک نیمگروه و I یک ایده‌آل S باشد. در این صورت همنهشتی ریس نظیر I به شکل زیر تعریف می‌شود که به ازای هر $x, y \in S$، زوج مرتب (x, y) متعلق به ρ_I اگر x, y هر دو متغلق به I باشند یا $x = y$.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم S یک نیمگروه و A یک Sـسیستم باشد. اگر ρ یک همنهشتی روی A باشد، آنگاه همریختی

$$\begin{aligned} \pi : A &\to A/\rho \\ a &\mapsto s[a] \end{aligned}$$

را بروریختی کانونی می‌نامند. اگر ρ یک Sـهمنهشتی ریسی نظیر یک زیرSـسیستم B از A باشد، آنگاه Sـسیستم خارج قسمتی A/ρ را با نماد A/B نمایش می‌دهیم و آنرا Sـسیستم خارج قسمتی A توسط زیرSـسیستم B می‌نامند.

تذکر. اگر A یک Sـسیستم روی نیمگروه S باشد، آنگاه ما کوچکترین همنهشتی شامل X روی A را با نماد $\rho(X)$ نمایش می‌دهیم.

---
[۳] Rees

گزاره ۱۱.۱.۱ فرض کنیم S یک نیمگروه، A یک S—سیستم و $X \subseteq A \times A$ باشد. تعریف می‌کنیم $\rho := \rho(X)$. آنگاه برای هر $a, b \in A$ داریم $a\rho b$ اگر و تنها اگر $a = b$ یا وجود داشته باشد $p_1, \cdots, p_n, q_1, \cdots q_n \in A$ و $\omega_1, \cdots, \omega_n \in S$ به طوری که به ازای هر $i = 1, \cdots, n$، $(p_i, q_i) \in X$ یا $(q_i, p_i) \in X$ به قسمی که

$$\begin{array}{ccccccccc} a & = & p_1\omega_1 & & q_2\omega_2 & = & p_3\omega_3 & & \cdots & & q_n\omega_n = b \\ & & q_1\omega_1 & = & p_2\omega_2 & & q_3\omega_3 & = & p_4\omega_4 & \cdots & \end{array}$$

در این رساله، رسته‌ی S—سیستمها را با نماد متداول **S-Act** نشان می‌دهیم. این بخش را با یادآوری ساختارهای جهانی در این رسته به پایان می‌بریم.

نکته ۱۲.۱.۱ در این رساله فرض می‌کنیم که مجموعه تهی متعلق به رسته **S-Act** است.

پیش از آن که به معرفی اشیا جهانی در رسته‌ی **S-Act** به پردازیم، به یادآوری تعریفهای اشیا جهانی در یک رسته‌ی دلخواه می‌پردازیم. لازم به ذکر است که ما تنها اشیا جهانی ضرب، برابرساز، عقب‌بر و شی آزاد را معرفی می‌کنیم و تعریفهای دوگان را به جهت جلوگیری از طولانی شدن و تکراری شدن ذکر نمی‌کنیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک رسته‌ی دلخواه باشد. شی T در رسته‌ی $\mathcal{C}$ را یک شی پایانی در رسته‌ی $\mathcal{C}$ می‌نامیم اگر به ازای هر شی C در رسته‌ی $\mathcal{C}$، مجموعه‌ی $Mor_{\mathcal{C}}(C, T)$ یک مجموعه ناتهی و یک عضوی باشد. دوگان این مفهوم را شی ابتدایی می‌نامند.

تعریف ۱۴.۱.۱ (i) حال فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک رسته و $(A_i)_{i \in I}$ یک خانواده از اشیا در $\mathcal{C}$ باشد. رسته‌ی $\mathcal{K}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. اشیا $\mathcal{K}$ را برابر زوج مرتبهای $(E, (f_i)_{i \in I})$ می‌گیریم که در آن E یک شی $\mathcal{C}$ و $(f_i)_{i \in I}$ خانواده‌ای از ریختهای $f_i : E \to A_i$، برای هر $i \in I$ است. برای ریختها تعریف می‌کنیم $Mor_{\mathcal{K}}((E, (f_i)_{i \in I}), (E', (f'_i)_{i \in I}))$ برابر است با مجموعه‌ی تمام ریختهای $g : E \to E'$ در $\mathcal{C}$ به طوری که برای هر $i \in I$، دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "g"'] & A_i \\ & E' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

اگر یک شی پایانی در رسته‌ی $\mathcal{K}$ وجود داشت، این شی پایانی را یک ضرب خانواده‌ی $(A_i)_{i\in I}$ می‌نامند. دوگام این مفهوم را همضرب خانواده‌ی $(A_i)_{i\in I}$ می‌نامند.

(ii) فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک رسته و $f, g : A \to B$ زوجی از ریختها بین دو شی A و B باشند. رسته‌ی $\mathcal{K}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم که اشیا آن نمودارهای به شکل زیر هستند

$$X \xrightarrow{\alpha} A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B$$

که در آن $f \circ \alpha = g \circ \alpha$، و ریختهای آن ریختهایی به شکل $\nu : X \to Y$هایی هستند که نمودار زیر را جا به جا کند.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\nu"'] \arrow[dr] & & \\ Y \arrow[r] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

اگر یک شی پایانی در رسته‌ی $\mathcal{K}$ وجود داشت، این شی پایانی را یک برابرساز f, g می‌نامند. دوگان این مفهوم را یک هم‌پایدارساز می نامند.

(iii) فرض کنیم که $\mathcal{C}$ یک رسته باشد و فرض می‌کنیم که نمودار زیر در رسته‌ی $\mathcal{C}$ به ما داده شده باشد.

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

رسته‌ی $\mathcal{K}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: اشیا این رسته را برابر نمودارهای جابجایی $|A, B, C, D|$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\beta} & B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

و مجموعه‌ی ریختهای بین دو نمودار $|A, B, C, D|$ و $|A', B', C, X|$ را ریختهای به شکل $\gamma : D \to X$ در رسته‌ی $\mathcal{C}$ تعریف می‌کنیم که نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & B \\ A & D \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ul, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$