بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شیخ‌بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی مالی

غلبه تصادفی و رفتار مبتنی بر ریسک:

بازار سهام ارزشی- رشدی

پژوهشگر:

فروغ کشاورز

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

استاد مشاور:

عبدالمجید عبدالباقی

اردیبهشت ۱۳۹۱

تقدیم به:

دلگرمی زندگیم   مادر

و

پشتگرمی زندگیم   پدر

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و به پاس داشت این کلام که هرکس کلمه‌ای به من بیاموزد مرا بنده‌ی خود کرده، مراتب سپاس و قدرشناسی خود را خدمت

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر علی رجالی که شاگردی ایشان افتخار من است،

استاد ارجمندم جناب آقای عبدالباقی که صبورانه راهنمای من بودند،

خانواده خوبم که عاشقانه در کنارم بودند،

برادر دلسوزم و همسر مهربانش که صمیمانه مرا یاری نمودند،

دوستان خوبی که همواره همراهم بودند،

تقدیم مي دارم .

چکیده

مطلوبیت مورد انتظار به عنوان یک روش در قیمت‌گذاری دارایی‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این روش فرض بر این است که تمام سرمایه‌گذاران ریسک‌گریزند. با این حال این نظریه به علت عدم تشریح چگونگی رفتار سرمایه‌گذاران مورد انتقاد قرار گرفت. نظریات متعدد دیگری برای ارائه الگوهای واقعی‌تری از اولویت‌بندی ریسک توسط کانمن–تورسکی، مارکویتز و فریدمن–سویچپیشنهاد شد، که در این پایان‌نامه مورد بحث قرار می‌گیرد. یکی از این روش‌هابر اساس نظریه غلبه تصادفی است که یک چارچوب کلی برای رتبه‌بندی آینده‌نگری ریسکی بر اساس نظریه مطلوبیت فراهم می‌کند.

در این پایان‌نامه، ابتدا به ارائه مفاهیم مطلوبیت مورد انتظار ثروت و انتخاب تحت شرایط ریسکی پرداخته می‌شود و سپس به ارائه متداول‌ترین قوانین غلبه تصادفی، یعنی غلبه‌های تصادفی مرتبه‌های اول، دوم و سوم، پرداخته می‌شود و مفهوم غلبه تصادفی در چارچوب رفتار واقعی سرمایه‌گذاران مورد بحث قرار می‌گیرد. مزیت اصلی استفاده از غلبه تصادفی، این است که می‌تواند به رسیدن شکلی از تابع مطلوبیت سرمایه‌گذاران بر اساس رده‌بندی اولویت دو دسته از سهام کمک کند.علاوه براین، غلبه تصادفی به دلیل جهت‌گیری غیر پارامتریک جذاب است.در مقابل تحلیل میانگین–واریانس که فقط برای توابع مطلوبیت درجه دوم یا توزیع بازدهی نرمال معتبر است، نیز مورد بحث قرار می‌گیرد. یکی دیگر از مزیت‌هایقانون غلبه تصادفی این است که به توزیع‌های خاصی محدود نمی‌شود و نیاز به حداقل مفروضات درباره اولوبت‌بندی دارد.در این پایان‌نامه این مزیت هم تشریح می‌شود.

فهرست :

عنوان **صفحه**

فصل دوم (نظریه‌های تصمیم‌گیری تحت ریسک)

فصل سوم (غلبه‌ی تصادفی)

فصل چهارم (آزمون اقتصادسنجی برای غلبه‌ی تصادفی)

فصل پنجم (بررسی شرکت‌های ایرانی)

فصل ششم (نتایج غلبه‌ی تصادفی روی سهام ارزشی و رشدی)

فصل اول

پیش‌گفتار

۱-۱ تاریخچه و مقدمه

در این پایان‌نامه از فرمول‌های غلبه‌ی تصادفی برای بررسی اولویت‌بندی سهام ارزشی و رشدی در بازار بورس اوراق بهادار تهران استفاده شده است. بدین منظور لازم است تاریخچه‌ای از غلبه‌ی تصادفی و بررسی بازدهی‌های سهام ارزشی و رشدی ارائه شود.

هادار-روسل[۱] [۲۸] و هوناچ-لوی[۲] [۳۰] در سال۱۹۶۹ ، روزچیلد-استیگلیتز[۳] [٤۷] و ویتمور[٤] [۵۲] در سال ۱۹۷۰، مطلوبیت را با استفاده از غلبه‌ی تصادفی بررسی کردند.

وینگ گیونگ وونگ[۵] و چی کنگ لی[٦][۳۸] ، در سال ۱۹۹۹، فرمول‌های غلبه‌ی تصادفی را برای سرمایه‌گذاران ریسک‌پذیر به‌کار بردند.

مش لوی و هیم لوی[۷] [۳۷] در سال ۲۰۰۲، فرمول‌های غلبه‌ی تصادفی را برای نظریه غلبه‌ی تصادفی مارکویتز و غلبه‌ی تصادفی آینده‌نگری بر اساس تابع مطلوبیت مطرح شده توسط مارکویتز[۸] و کانمن-تورسکی[۹] گسترش دادند.

---

[1] Hadar - Russel
[2] Hanoch - Levy
[3] Rothschild - Stiglitz
[4] Whitmore
[5] Wing-Keung Wong
[6] Chi-Kwong Li
[7] Levy.Moshe and Levy.Haim
[8] Markowitz
[9] Kahenman and Tversky

وینگ کیونگ وونگ[1] و رایموند چان[2] [۵۳] در سال۲۰۰۵، غلبه‌ی تصادفی مارکویتز و آینده‌نگری را بر روی دو سرمایه‌گذاری دلخواه بررسی کردند.

آبهای آبهایانکار[3]، کنگ یوهو[4] و هیونیان زاهو[5] [۱۳] در سال ۲۰۰۸، غلبه‌ی تصادفی را روی سهام ارزشی و رشدی بررسی کردند، که سهام‌های ارزشی غلبه تصادفی مرتبه دوم را نسبت به سهام‌های رشدی نشان دادند.

وای مون فنگ[6] ،هویی هویی لین[7] و وینگ کیونگ وونگ[8] [۲۵] در سال ۲۰۰۸، غلبه‌ی تصادفی را بر روی سهام‌های اینترنتی و غیراینترنتی در دو دوره رونق بازار وافول بازار بررسی کردند و نتایج نشان داد که در دوره رونق بازار یعنی سال‌های (۱۹۹۸ تا۲۰۰۰) سرمایه‌گذاران ریسک‌پذیر، سهام اینترنتی را به غیر اینترنتی ترجیح دادند و سرمایه‌گذاران ریسک‌گریز بین این دو سهام بی‌تفاوت بوده‌اند و در دوره افول بازار یعنی سال‌های (۲۰۰۰ تا ۲۰۰۳) جهت اولویت‌بندی‌ها تغییر کرد، یعنی ترجیحات به سمت سهام غیراینترنتی بوده است.

راسل دیویدسون[9] و جین داکلوس[10] [۲۰] در سال ۲۰۰۰، یک آزمون غلبه‌ی تصادفی را ارائه دادند.

هویی هویی لین ، وینگ کیونگ وونگ و زیبین زانگ[11] [۳٦] در سال ۲۰۰۷، اندازه و شدت آزمون‌های غلبه‌ی تصادفی را بررسی کردند.

ایجن فاما[12] و کنز فرنچ[13][۲۳] در سال ۱۹۹۸، بازدهی سهام‌های ارزشی و رشدی را در بازارهای آمریکا و سیزده کشور بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که در تمام این کشورها سهام‌های ارزشی بازدهی بیشتری نسبت به سهام‌های رشدی داشته است.

پیش‌نیازهای لازم برای این پایان‌نامه به‌عنوان مفاهیم اولیه در فصل اول آورده شده‌اند. در فصل دوم رفتارهای مبتنی بر ریسک سرمایه‌گذاران، تحت عنوان تصمیم‌گیری تحت ریسک بررسی شده‌اند.

---

[1] Wing-Keung Wong
[2] Raymond Chan
[3] Abhay Abhyankar
[4] Keng-Yu Ho
[5] Huainan Zhao
[6] Wai Mun Fong
[7] Hooi Hooi Lean
[8] Wing Keung Wong
[9] Russel Davidson
[10] JEAN-YVES DUCLOS
[11] Xibin Zhang
[12] Eugene F. Fama
[13] Kenneth R. French

نظریه غلبه‌ی تصادفی یک چارچوب کلی برای رتبه‌بندی آینده‌نگری مبتنی بر ریسک، بر اساس نظریه‌ی مطلوبیت فراهم می‌کند. متداولترین قانون‌های غلبه‌ی تصادفی، غلبه‌ی تصادفی مرتبه‌های اول، دوم و سوم هستند که توضیحات آن در فصل سوم آورده شده‌اند. در غلبه‌ی تصادفی مرتبه اول به دلیل این که تنها با مشاهده تابع توزیع تجمعی و بررسی این که کدام توزیع بالاتر یا پایین‌تر است، می‌توان به اولویت‌بندی سهام دست یافت، غلبه‌ی تصادفی مرتبه اول قابل لمس‌تر از غلبه‌ی تصادفی مرتبه‌های بالاتر است.

روش‌های متعددی برای آزمون غلبه‌ی تصادفی در اقتصادسنجی استفاده شده است. یک آزمون ساده برای غلبه‌ی تصادفی توسط فدن[1][۴۲] ارائه شده است که این آزمون، نوعی آزمون کلموگروف[2]–اسمیرنف[3] برای غلبه‌ی تصادفی مرتبه اول، روی نمونه‌های مستقل با تعداد مشاهدات برابر است. به دنبال آن دیویدسون[4] و داکلوس[5] [۲۰]، آزمونی برای غلبه‌ی تصادفی ارائه دادند که عمومیت بیشتری داشت و محاسبات آن ساده‌تر از آزمون کلموگروف–اسمیرنف بود که توضیحات آن در فصل اول بیان می‌شود. آزمون دیویدسون–داکلوس را به اختصار آزمون DD گویند. دلیل ساده بودن این آزمون، مقایسه توابع توزیع تجمعی روی یک شبکه قراردادی از نقاط است. آزمون کلموگرف برای نمونه‌های مستقل به کار می‌رود، در حالی که آزمون DD، می‌تواند برای تحلیل نمونه‌های وابسته از توزیع‌های مشترک در مقایسه با آزمون‌های پیش از آن به‌کار رود. آزمون DD، در بین آزمون‌های ارائه شده برای غلبه‌ی تصادفی نسبتاً جدیدتر است و ساختن آن به‌طور مختصر در فصل چهارم شرح داده می‌شود. [۲۵]

در فصل پنجم برای مطالعه موردی مسأله، شرکت‌های مورد بررسی به دو دسته ارزشی و رشدی تقسیم و بازدهی این شرکت‌ها جمع‌آوری شده‌اند. در فصل ششم فرمول‌های غلبه‌ی تصادفی روی بازدهی سهام‌های ارزشی و رشدی بررسی می‌شود و معنی‌داری نتایج آزمون دیویدسون–داکلوس با آماره SMM[6] بررسی خواهد شد.

۱–۲ مفاهیم آماری و ریاضی

به این دلیل که در فرمول‌های غلبه‌ی تصادفی برای تشخیص برتری سهام، نیاز به تابع توزیع بازدهی‌های سهام می‌باشد، لازم است که در ابتدا، تعاریفی از تابع چگالی و تابع توزیع بیان شود. برای اثبات قضیه غلبه‌ی تصادفی نیز نیاز به قضایایی است که در این بخش بیان خواهد شد. همان‌طور که در پیش‌گفتار بیان شد یک نوع آزمون برای

[1] Mc Fadden
[2] Kolmogorov
[3] Smirnov
[4] Davidson
[5] Duclos
[6] Studentized maximum modulus distribution

غلبه‌ی تصادفی که در اقتصادسنجی استفاده می‌شود، آزمون کلموگروف – اسمیرنف می‌باشد، که بعدها دیویدسون و داکلوس آزمون بهتری ارائه دادند که توضیحات این آزمون، در فصل چهارم بیان شده است و آزمون کولموگرف–اسمیرنف در این بخش توضیح داده می‌شود. همچنین برای معنی‌داری نتایج آزمون دیویدسون–داکلوس از آماره SMM استفاده می‌شود که توضیح‌های مربوط به این آماره در این بخش آورده شده است.

۱-۲-۱ تابع چگالی[۱] یک متغیر تصادفی پیوسته

تابعی با مقادیر $f(x)$، که روی مجموعه تمام اعداد حقیقی تعریف شده است، **تابع چگالی** احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X گفته می‌شود، اگر وتنها اگر به ازای هر دو مقدار حقیقی ثابت a و b وقتی $a < b$، رابطه زیر برقرار باشد :

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx \qquad (۱-۱)$$

تابعی را می‌توان به‌عنوان **تابع چگالی** احتمال یک متغیر تصادفی پیوسته X به‌کار برد که در شرایط زیر صدق کند :

۱- هر $x \in R$ ، $f(x) \ge 0$.

۲- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

[۱۱]

۱-۲-۲ تابع توزیع تجمعی[۲] یک متغیر تصادفی پیوسته

اگر X ، یک متغیر تصادفی پیوسته‌ای باشد که مقدار چگالی احتمال آن به ازای هر t ، برابر با $f(t)$ است، آن‌گاه تابعی که به‌صورت

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,, \qquad -\infty < x < \infty \qquad (۲-۱)$$

باشد، **تابع توزیع** یا **تابع توزیع تجمعی X** نامیده می‌شود.[۱۱]

[1] Density Function
[2] Cumulative Distribbution Function (CDF)

۱-۲-۳ تابع توزیع تجربی[۱]

اگر متغیر تصادفی X دارای تابع توزیع تجمعی F باشد $(X \sim F)$، یعنی برای هر x ، $P(X \leq x) = F(x)$. انتظار می‌رود که تعداد $[n\, F(x)]$ از X_i ها، از x کوچکتر باشند. از این راه می‌توان $F(x)$ را برای هر $x \in R$ به‌صورت زیر برآورد کرد:

$$\hat{F}(x) = \frac{\text{تعداد } X_i \text{ های کوچکتر یا مساوی } x}{n} \qquad (۱-۳)$$

این برآورد را که به یک نمونه n تایی بستگی دارد، معمولاً با $F_n(x)$ نشان می‌دهند و **تابع توزیع تجربی** گویند.

در واقع اگر متغیرهای $X_1, X_2, \dots, X_n$ ، یک نمونه تصادفی از توزیع پیوسته F و $X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)}$ ، آماره‌های ترتیبی برای این نمونه باشد. توزیع تجربی برای این نمونه تصادفی در حقیقت یک آماره $F_n(x)$ می‌باشد، که به ازای هر $x \in R$ ، می‌توان آن را به‌صورت (۱-٤) نوشت :[۲]

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < X_{(1)} \\ \frac{k}{n} & X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \\ 1 & x \geq X_{(n)} \end{cases} \qquad (۱-٤)$$

۱-۲-٤ آزمون کولموگرف- اسمیرنف

کولموگرف ریاضیدان روسی در سال ۱۹۳۳ ، یک نوع آزمون برازندگی را به‌شرح زیر پیشنهاد کرد.

اگر $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای مستقل و هم توزیع با تابع توزیع نامشخص F باشند. برای آزمون این که آیا این تابع توزیع برابر با تابع توزیع مشخص F_0 است به‌صورت زیر عمل می‌شود :

الف- در آزمون دو طرفه

$$\begin{cases} H_0 : F = F_0 \\ H_1 : F \neq F_0 \end{cases} \qquad (۱-٥)$$

فرض H_0 رد می‌شود، هرگاه آماره $D_n = \sup\limits_{x} |F_n(x) - F_0(x)|$ ، خیلی بزرگ شود.

[1] Empirical Distribution Function

ب- در آزمون یک طرفه

$$\begin{cases} H_0: F = F_0 \\ H_1: F > F_0 \end{cases}$$

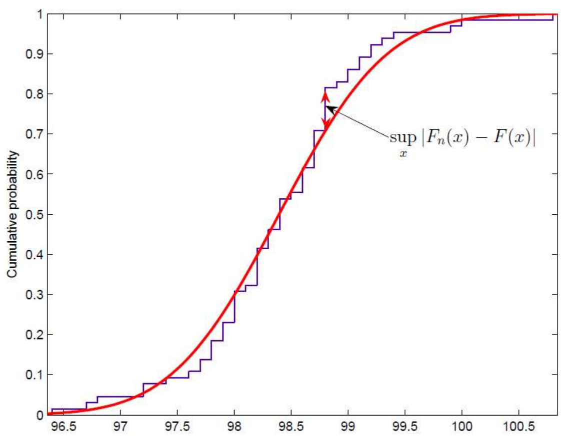
فرض H_0 رد می‌شود، هرگاه آماره $D_n^+ = \sup_x [F_n(x) - F_0(x)]$ ، خیلی بزرگ شود.

ج- در آزمون یک طرفه

$$\begin{cases} H_0: F = F_0 \\ H_1: F < F_0 \end{cases}$$

فرض H_0 رد می‌شود، هرگاه آماره $D_n^- = \sup_x [F_0(x) - F_n(x)]$ ، خیلی بزرگ شود.[۲]

برای درک بیشتر آزمون کولموگرف-اسمیرنف به شکل زیر توجه کنید.



شکل(۱-۱) :آزمون کولموگرف-اسمیرنف

همان‌طور که گفته شد هرگاه آماره $D_n = \sup_x |F_n(x) - F_0(x)|$، خیلی بزرگ نشود فرض H_0 رد نمی‌شود. چون در اینجا صحبت از قدر مطلق است ابتدا D_n^+ و D_n^- محاسبه می‌شود و در آخر sup بین این دو مقدار D_n، مورد نظر می‌باشد. با توجه به شکل بالا می‌توان این‌طور گفت که ابتدا sup فواصلی که از پایین و بالا به تابع توزیع مورد نظر نزدیک می‌شوند، محاسبه می‌شوند و در نهایت sup بین این دو مقدار محاسبه شده D_n، مورد نظر می‌باشد. یعنی اگر بیشترین فاصله تا توزیع مورد نظر (چه از بالا و چه از پایین) خیلی بزرگ نباشد، فرض H_0 رد نمی‌شود.

مثال ۱-۱-۱ : برای $\alpha = 0.5$، سوال این است که نمونه‌های ده‌تایی زیر از توزیع یکنواخت روی فاصله$(0,1)$ تبعیت می‌کند یانه.

۰/۵۸۱، ۰/۳۲۹، ۰/۴۸۰، ۰/۵۵۹، ۰/۶۲۱، ۰/۳۲۸، ۰/۵۰۳، ۰/۲۰۳، ۰/۴۷۷، ۰/۷۱۰

حل :توزیع یکنواخت روی $(0,1)$ به‌صورت زیر می‌باشد :

$$F_0(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

حال باید آزمون دوطرفه زیر انجام شود :

$$\begin{cases} H_0: F = F_0 \\ H_1 : F \neq F_0 \end{cases}$$

ابتدا D_{10} به کمک محاسبات زیر به‌دست می‌آید. قبل از آن x_iها را باید به‌صورت صعودی مطابق جدول (۱-۱) نوشت:

جدول(۱-۱): مثال آزمون کلموگروف

x	$F_0(x_i)$	$\frac{i}{10} - F_0(x_i)$	$F_0(x_i) - \frac{i-1}{10}$
۰/۲۰۳	۰/۲۰۳	−۰/۱۰۳	۰/۲۰۳
۰/۳۲۹	۰/۳۲۹	−۰/۱۲۹	۰/۲۲۹
۰/۰۳۲۸	۰/۳۸۲	−۰/۸۲	۰/۱۸۲
۰/۴۷۷	۰/۴۷۷	−۰/۷۷	۰/۱۷۷
۰/۴۸۰	۰/۴۸۰	۰/۲۰	۰/۸۰
۰/۵۰۳	۰/۵۰۳	۰/۹۷	۰/۰۰۳
۰/۵۵۹	۰/۵۵۹	۰/۱۴۱	−۰/۴۱
۰/۵۸۱	۰/۵۸۱	۰/۲۱۹	−۰/۱۱۹
۰/۶۲۱	۰/۶۲۱	۰/۲۷۹	−۰/۱۷۹
۰/۷۱۰	۰/۷۱۰	۰/۲۹۰	−۰/۱۹۰
		$D_{10}^{+} = 0.290$	$D_{10}^{-} = 0.229$
		$D_{10}^{+}(0.5) = 0.369$	$D_{10}^{-}(0.5) = 0.369$

از طرفی $D_{10} = max(D_{10}^{-}, D_{10}^{+}) = 0.290$ و بنابر جدول ۷ در پیوست [۲]، $D_{10}^{-}(0.5) = 0.369$ و $D_{10}^{+}(0.5) = 0.369$ و $D_{10}(0.5) = 0.409$.از آنجایی که D_n به‌دست آمده از D_n جدول بزرگ‌تر نشد، فرض H_0 با $\alpha = 0.5$ رد نمی‌شود.[۲]

۱-۲-۵ آماره SMM

اگر $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ ، یک نمونه تصادفی از توزیع نرمال $N(0, \sigma^2)$ باشد و S^2 یک تخمین‌گر از σ^2 با توزیع $\sigma^2\chi^2(\nu)/\nu$ و مستقل از $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ باشد. آماره (SMM) با پارامتر r و ν درجه آزادی به‌صورت (۱-٦)تعریف می‌شود :

$$M(r, \nu) = \max_{1 \le i \le r} \; |z_i| / S \qquad (۱-٦)$$

برای $c > 0$، هان[۱] و هندریکسون[۲] [۲۹] ومیلر[۳] [٤٥] نشان دادند که :

$$P\left[M(r, \nu) \ge c\right] = 1 - \int_0^\infty [2\Phi(cx) - 1]^r \, g(x; \nu)\, dx \qquad (۱-۷)$$

در فرمول (۱-۷)، $\Phi(x)$ تابع توزیع تجمعی نرمال استاندارد و $g(x; \nu)$ تابع چگالی X است، وقتی که νX^2 دارای توزیع $\chi^2(\nu)$ است. بنابراین $m_{\alpha;r,\nu}$ ، α نقطه بالایی از متغیر $M(r, \nu)$ ، در رابطه‌ی (۱-۸) صدق می‌کند:

$$P\left[M(r, \nu) \ge m_{\alpha;r,\nu}\right] = \alpha. \qquad (۱-۸)$$

عملیات رسیدن به فرمول (۱-۷) به‌روش زیر می‌باشد:

از آنجایی که $Z_1, Z_2, \dots, Z_r$ دارای توزیع $N(0, \sigma^2)$ و S^2 دارای توزیع $\sigma^2\chi^2(\nu)/\nu$ می‌باشد. توزیع $|Z_i|$ و S به‌صورت زیر به‌دست آورده می‌شود.

$$Y = |Z_i| \quad \Rightarrow \quad F(y) = P(Y \le y) = p(-y \le Y \le y) = F(y) - F(-y)$$

$$g(y) = 2f_Y(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}$$

$g(y)$ تابع چگالی $Y = |Z_i|$ می‌باشد. حال تابع چگالی S به‌دست آورده می‌شود.

$S^2 = t$ دارای توزیع $\sigma^2\chi^2(\nu)/\nu$ می‌باشد. حال توزیع $x = \sqrt{t}$ به روش تبدیل متغیر به‌دست می‌آید.

[1] Hahn
[2] Hendrickson
[3] Miller

$$f(t) = \frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\, t^{\frac{\nu-2}{2}}\, e^{-\frac{t}{2}} \qquad \Longrightarrow \qquad J = -\frac{1}{2\sqrt{t}} = -\frac{1}{2x} \quad \Longrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\,(x^2)^{\frac{\nu-2}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \left|-\frac{1}{2x}\right|$$

$f(x)$ تابع چگالی S می‌باشد. از آنجایی که Z_iها از S مستقل‌اند برای به‌دست آوردن تابع چگالی توأم $|Z_i|$ و S کافی است تابع چگالی این دو در هم ضرب شود.

$$f_{|Z_i|,S}(y,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\,(x^2)^{\frac{\nu-2}{2}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, \frac{1}{x}$$

$$P\,[M(r,\nu) \geq c] = P\left(\exists \;\; i \;:\;\; \frac{|Z_i|}{S} \geq c\right)$$

$$= 1 - P\left(\forall\, i \;:\; \frac{|Z_i|}{S} < c\right) = 1 - \prod_{i=1}^{r} P\left(\frac{|Z_i|}{S} < c\right)$$

$$P\,[M(r,\nu) \geq c] = 1 - \prod_{i=1}^{r} \int_0^{\infty} \int_{-cx}^{cx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \quad \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\,(x^2)^{\nu-3}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dy\, dx \qquad (۱-۹)$$

با تغییر متغیر $z = \frac{y}{\sigma}$ وجایگذاری $\sigma dz = dy$ در رابطه (۱-۹) نتیجه می‌دهد:

$$P\,[M(r,\nu) \geq c] = 1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\,(x)^{\nu-3}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \prod_{i=1}^{r} \int_{-cx}^{cx} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz\, dx$$

$$= 1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{2^{\nu/2}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})}\,(x)^{\nu-3}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, (\Phi(cx) - \Phi(-cx))^{r}\, dx$$

$$= 1 - \int_0^{\infty} g(x,\nu)\, (2\Phi(cx) - 1)^{r}\, dx$$

ν در آماره SMM برابر با $\nu = N - r$ می‌باشد، که N تعداد متغیر نرمال و r تعداد اعدادی است که از N متغیر نرمال به‌تصادف انتخاب شده است: [٤٤]

۱-۲-٦ فضای‌متری[1]

یک فضای‌متری مجموعه‌ای است مانند X، به‌همراه متر d، که دارای سه خاصیت زیر است،($d: X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$) که برای هر $x,y,z \in X$:

۱- $d(x,y) \geq 0$ و $d(x,y)=0$ اگر و تنها اگر $x=y$

[1] Metric Spase