بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

بسمه تعالی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه **آقای فاضل حدادی‌فرد** رشته **ریاضی‌کاربردی** تحت عنوان:

«اصلاحاتی در درونیابی (۰;۱) پال» را از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمد حسینی	استاد	
۲- استاد مشاور	دکتر محمدرضا اصلاحچی	استادیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر مصطفی شمسی	استادیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته   است که در سال

در دانشکده   دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار

خانم/جناب آقای دکتر   ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر

و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر   از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب **فاضل حدادی فرد** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** مقطع **کارشناسی ارشد** تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: فاضل حدادی فرد

تاریخ و امضا: ۱۳۹۰/۳/۳

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب ، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ۴- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه می باشد، باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ۵- این آیین‌نامه در ۵ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/۴/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/۴/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱۵ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب **فاضل حدادی فرد** دانشجوی رشته **ریاضی کاربردی** ورودی سال تحصیلی **۱۳۸۷** مقطع **کارشناسی ارشد** دانشکده **علوم ریاضی** متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه/ رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هرگونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمنا نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:.........

تاریخ:......... ۱۳۹۰/۱/۲۳

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم پایه

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

اصلاحاتی در درونیابی (۰; ۱) پال

توسط

فاضل حدادی فرد

استاد راهنما

دکتر سید محمد حسینی

استاد مشاور

دکتر محمدرضا اصلاحچی

بهمن ماه ۱۳۸۹

قدردانی

مراتب سپاس و قدردانی خویش را به محضر استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید محمد حسینی که با صبر و حوصله بسیار مرا در نگارش پایان نامه مورد محبت خویش قرار دادند، ابراز می دارم.

تشکر و قدردانی از جناب آقای دکتر اصلاحچی به جهت راهنمایی های ارزشمند شان. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر ملک و دکتر شیر بیشه که در طول تحصیل از محضرشان بهرمند شدم کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر شمسی و دکتر حیدری، که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند، متشکرم.

همچنین بر خود فرض می دانم از تمام دوستانی که مرا در طول تحصیل و انجام این پایان نامه یاری رساندند، به ویژه آقایان سید حمید رضا مفیدی، فرهاد نصرالله زاده، سجاد صادقی و سرکار خانم معصومه گرجی کمال تشکر را بنمایم.

به پاس تعبیر عظیم و انسانیشان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی و به پاس قلب بزرگشان که فریادرس است این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می کنم.

فاضل حدادی فرد

دی ماه ۱۳۸۹

اصلاحاتی در درونیابی (۰;۱) پال

چکیده

در این پایان نامه درونیاب (۰;۱) پال مورد مطالعه قرار می گیرد. در اینجا منظور از (۰;۱) این است که اطلاعاتی که از تابع در دست است شامل مقادیر تابع (مشتق صفرم) و مقادیر مشتق اول تابع روی دو مجموعهٔ جداگانه از نقاط می باشد. این درونیاب حالت خاصی از درونیاب بیرخوف می باشد. علت انتخاب این درونیاب به عنوان موضوع پایان نامه این است که این حالت، جزو معدود حالات درونیابی بیرخوف است که فرم صریح چندجمله ای درونیاب به ازای هر مجموعه دلخواه از نقاط گرهی در دست است. این درونیاب (درونیاب بیرخوف) به طور وسیعی در حل انتگرال ها به ویژه انتگرال ها با نوسان زیاد کاربرد دارد.

در این پایان نامه ابتدا قضیهٔ وجود درونیاب به همراه یکتایی چندجمله ای درونیاب ارائه می شود. سپس همگرایی درونیاب روی گره های خاص هرمیت و لژاندر بررسی می شود. در هر حالت برای تضمین یکتایی یک سری شرایط جدید به شرایط اولیهٔ اضافه می شود که شرایط سنگینی هستند. بنابراین در ادامه، فرم صریح چندجمله ای اصلاح شده معرفی می شود. در این حالت شرایط تحمیل شده به درونیاب تا حد ممکن کم می شوند. این کار ابتدا روی گره های ژاکوبی و سپس به ازای هر مجموعهٔ دلخواه از گره ها انجام می شود.

در فصل آخر نیز به بررسی دو حالت دیگر درونیابی بیرخوف می پردازیم. حالت اول یکی از حالات درونیابی بیرخوف است که توسط نگارندگان مطرح شده است و حالت دوم، مسئله ای است در رابطه با درونیاب پال معروف به مسئلهٔ زیلی [۱]، که در این فصل سعی می شود این دو مسئله حل شوند.

واژه‌های کلیدی : درونیابی بیرخوف ، درونیاب پال، چندجمله ای های متعامد، چند جمله‌ای درونیاب

---

[۱] Szili

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیشگفتار

۱.۱ مقدمه

درونیابی توابع بوسیله چندجمله ای ها یکی از مباحث قدیمی در ریاضیات است. به نظر می رسد اولین کار در این زمینه در قرن هفدهم توسط نیوتن انجام شد. کمی بعد لاگرانژ فرمول نیوتن را گسترش داد. در سال ۱۸۷۸ هرمیت درونیاب معروف خود را ارائه داد.

در سال ۱۹۰۶ بیرخوف در سن ۱۸ سالگی اولین مقاله در زمینه درونیابی حفره ای [۱] یا درونیابی بیرخوف را ارائه داد. در این نوع درونیابی اطلاعاتی که از تابع اولیه در دست است شامل مقادیر تابع و مقادیر مشتقات بالاتر تابع در برخی نقاط دیگر است که نظم و ترتیب خاصی ندارند.

بیرخوف مسئله درونیابی خود را به صورت زیر مطرح کرد:

برای داده های $c_{i,k}$ و x_i چندجمله ای درونیاب $P_n(x)$ از درجه حداکثر n را پیدا کنید که در شرط

$$P_n^{(k)}(x_i) = c_{i,k} \tag{۱.۱.۱}$$

[۱] lacunary

صدق کند.

اگر به ازای هر i مرتبه مشتق k در (۱.۱.۱) دنباله ای باشد که شکستگی نداشته باشد، به عبارتی $k = 1, 2, ..., k_i$، آنگاه درونیابی که حاصل خواهد شد درونیاب هرمیت است (در حالت خاص وقتی که همهٔ k_i ها صفر باشند، درونیاب لاگرانژ بدست می آید). این درونیاب همیشه موجود و یکتاست و فرم صریح آن نیز در حالت کلی در دست است. اما اگر برخی از دنباله ها شکسته شوند، درونیاب بیرخوف را خواهیم داشت. تفاوت این دو درونیاب مثل تفاوت دو تئوری معادلات خطی و معادلات غیر خطی است.

در برخی از مراجع درونیاب هرمیت را حالت خاص درونیاب بیرخوف در نظر می گیرند.

دوتایی های (i, k) که در (۱.۱.۱) ظاهر شده اند توسط ماتریس درونیابی $E = [e_{i,k}]_{i=1, j=1}^{m \ \ n}$ بهتر مشخص می شوند. اگر $c_{i,k}$ در (۱.۱.۱) ظاهر شده باشد، آنگاه قرار می دهیم، $e_{i,k} = 1$ و در غیر اینصورت، $e_{i,k} = 0$. در سال ۱۹٦٦، شونبرگ [۲] مسئله پیدا کردن همهٔ ماتریس های E که مسئلهٔ (۱.۱.۱) حل پذیر باشد را بررسی کرد. وی این گونه ماتریس ها (ماتریس های حل پذیر) را ناتکین [۳] و بقیه ماتریس ها را تکین [۴] نامید. بعد از آن مسئله تکین و یا ناتکین بودن ماتریس ها مورد توجه محققین قرار گرفت.

مسئله درونیابی بیرخوف در حالتی که x_i ها نقاط ثابتی باشند، درحالت های مختلف مورد بررسی قرار گرفته شده است. در سال ۱۹۵۵ توران [۵] و شاگردانش روی حالاتی که به دلیل شکل خاص x_i ها، ناتکینی به مسئله تحمیل می شد، کار کردند ([۱]، [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، [٦] و [۲۸]). آنها x_i ها را بیشتر ریشه های چندجمله ای های متعامد در نظر گرفتند. برای حالات کلی به جز موارد اندک، فرم های درونیاب بدست نیامده است.

در طول تحقیقات و کارهایی که انجام شد، مشخص شده است که کار کردن با درونیابی بیرخوف بسیار

---

[۲] Schoenberg

[۳] regular

[۴] singular

[۵] Turan

مشکل است. برخی از دلایل مشکل بودن این درونیاب می تواند به صورت زیر باشند:
حل پذیری این درونیاب هم ارز با ناتکینی ماتریس ضرایب است که به روشنی برای چندجمله ای از درجات بالا و در حالت کلی اثبات ناتکینی این ماتریس کار ساده ای نیست.
اگر بدانیم که ماتریس ضرایب درونیاب ناتکین است، ارائهٔ فرم صریح چندجمله ای یکی دیگر از مشکلات خواهد بود، و حتی اگر بتوانیم این چندجمله ای را ارائه دهیم معمولاً پیچیده است و ادامه کار روی آن مشکل می شود. مثلاً اثبات یکتایی و همینطور پیدا کردن کران های بالا و پائین برای خطا مشکل است.

در فصل دوم این پایان نامه درونیاب پال معرفی می شود و طریقهٔ بدست آوردن پایه های درونیابی آورده شده است. همینطور یکتایی درونیاب نیز با اضافه شدن یک شرط اضافی (سنگین) اثبات می شود. در انتهای فصل ثابت می شود که چندجمله ای درونیاب ارائه شده بین همهٔ چندجمله ای هایی که شرایط درونیابی را برآورده می کنند، از کمترین درجه ممکن است.
فصل سوم به بررسی همگرایی درونیاب پال در حالاتی که که گره های انتخاب شده، ریشه های چندجمله ای های متعامد لژاندر و هرمیت باشند می پردازد. در این دو حالت نیز برای یکتایی درونیاب، یک سری شرایط جدید به شرایط درونیابی تحمیل می شود.
بخش دوم فصل چهارم مبتنی بر مقالهٔ اصلی است. در این فصل شرایط اضافی تحمیل شده به درونیاب ، که شرایط سنگینی بودند، تا حد امکان از شرایط اولیه حذف می شوند. برای اینکار ابتدا اصلاحات فقط روی گره های ژاکوبی صورت می گیرد (بخش اول فصل). سپس اصلاحات روی هر مجموعهٔ دلخواه از گره ها و فقط با یک شرط اضافی کوچک ارائه شده است که هدف اصلی پایان نامه نیز می باشد.
فصل پنجم شامل کارهای جدیدی است که در زمینهٔ درونیابی بیرخوف توسط نگارندگان صورت گرفته است.

در این فصل ابتدا چندجمله ای درونیاب (۱ ;۱ ;۰) روی هر مجموعهٔ دلخواه از گره ها مطرح می شود. ثابت می شود که این چندجمله ای بین تمام چندجمله ای هایی که شرایط درونیابی را برآورده می

کنند از کمترین درجه ممکن است.

در بخش دوم دوگان درونیاب پال (مسئلهٔ زیلی) روی گره های هرمیت بررسی می شود. این دوگان قبلاً برای گره های ژاکوبی و لژاندر ارائه شد. اما به خاطر خواص چندجمله ای های هرمیت، درونیاب روی گره های هرمیت موجود نیست، به همین دلیل از درونیابی وزن دار استفاده شده است. ثابت می شود که این چندجمله ای از کمترین درجه ممکن است. همینطور یکتایی درونیاب نیز اثبات شده است و در انتها با در نظر گرفتن چندجمله ای های پایه ای ارائه شده، کران خطا برای این پایه ها ارائه می شود .

۲.۱ تاریخچه

در سال ۱۹۷۴ روش درونیابی (۱ ;۰) حفره ای توسط پال ارائه شد. این درونیاب حالت خاصی از درونیاب بیرخوف است. درونیاب پال را به این دلیل به عنوان موضوع پایان نامه انتخاب کردیم، که تا این لحظه تنها حالت درونیاب بیرخوف است که فرم صریح چندجمله ای درونیاب به ازای هر مجموعهٔ دلخواه از گره ها در دست است (البته ناگفته نماند که حالت اسپلاین درونیاب در حالت های متفاوت بدست آمده است). فرض کنیم یک سیستم از نقاط گرهی به صورت زیر داده شده باشد:

$$-\infty < x_۱ < x_۲ < ... < x_k < ... < x_n < \infty$$

و این نقاط، چندجمله ای $w_n(x) = \prod_{i=۱}^{n}(x - x_i)$ را تولید کنند، باتوجه به اینکه x_i ها را مجزا درنظر گرفتیم، ریشه های چندجمله ای $w_n'(x) = n\prod_{i=۱}^{n-۱}(x - x_n^*)$ بین ریشه های $w_n(x)$ قرار می گیرند:

$$\infty < x_۱ < x_۱^* < x_۲ < ... < x_k < x_k^* < x_{k+۱} ... < x_{n-۱}^* < x_n < \infty$$

پال [۱۷] با در اختیار داشتن این سیستم از نقاط گرهی، و همینطور با در اختیار داشتن دو سیستم $\{y_k\}_{k=۱}^{n}$ و $\{y_k'\}_{k=۱}^{n-۱}$ از اعداد حقیقی، فرم صریح چندجمله ای درونیاب $P(x) = P_{۲n-۱}(x)$ از درجه $۲n - ۱$ که خواص درونیابی زیر را برآورده می کند:

$$P(x_k) = y_k \quad (k = ۱, ۲, ..., n) \quad , \quad P'(x_k^*) = y_k' \quad (k = ۱, ۲, ..., n - ۱)$$

را در حالت انتگرال نامعین ارائه داد.

به منظور تضمین یکتایی درونیاب، گره $x_0 = a \neq x_k$ نیزبه مجموعه نقاط گرهی اضافه شد و شرط $P(a) = 0$ نیز به شرایط اولیهٔ درونیاب اضافه شد.

پس از آن تعدادی از محققین مطالعات خود را روی حالاتی که $w_n(x)$ یک چندجمله ای متعامد با در نظر گرفتن تابع وزن خاص باشد، متمرکز کردند. زیلی [6] [۲٦] حالتی را در نظر گرفت که $w_n(x) = e^{x^2}(e^{-x^2})^{(n)}$، n–امین چندجمله ای متعامد هرمیتی باشد. او برای تضمین یکتایی شرط $x_0 = 0$ را اضافه کرد و همزمان این محدودیت را روی مرتبه $H_n(x)$ به وجود آورد که n باید زوج باشد.

اندووانیا [7] [۷] حالت $w_n(x) = \int_{-1}^{x} P_{n-1}(t)dt = (1 - x^2)P'_{n-1}(x)$ که $P_{n-1}(x)$، $(n-1)$ – امین چندجمله ای متعامد لژاندر در حالت نرمال شده $P_n(1) = 1$ است را بررسی کرد. او از یک شرط خاص در شرایط اولیه اش، با در نظر گرفتن مشتق چندجمله ای درونیاب در $x_0^* = -1$ استفاده کرد.

مسئله کم کردن این شرایط اولیه اضافی که در درونیاب نقشی ندارند اولین بار توسط پال و همکارش جو [8] عنوان شد [۱۳]. آنها حالتی را در نظر گرفتند که $w_n(x)$ چندجمله ای n–ام ژاکوبی باشد یعنی

$$w_n(x) = J_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d}{dx^n}(1-x)^{-\alpha+n}(1+x)^{-\beta+n}$$

و دو نقطه اضافی $x_{n+1} = -1$ و $x_0 = 1$ را علاوه بر نقاط $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ معرفی کردند، اما نقاط $\{x_k^*\}_{k=1}^{n-1}$ را به عنوان ریشه های $w'_n(x)$ بدون تغییر باقی گذاشتند.

آنها اثبات کردند که $P(x) = P_{2n}(x)$ از مرتبه $2n$ وجود دارد که شرایط درونیابی

$$P(x_k) = y_k \quad (k = 0, 2, ..., n+1) \quad , \quad P'(x_k^*) = y'_k \quad (k = 1, 2, ..., n-1)$$

را برآورده می کند، و همینطور نشان دادند که یکتایی چندجمله ای درونیاب با نوشتن آن در فرم صریح، که درجه آن $2n$ باشد کار راحتی است.

---

[6] Szili

[7] Eneduanya

[8] Joo

قضیه آنها برای همه چندجمله ای های $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ که $\alpha \neq \beta$ درست است، اما برای $\alpha = \beta$، به یک شرط اضافه نیاز داشتند، یعنی n باید عدد صحیح فرد باشد($n = 2k + 1$). زیرا در اثبات مجبور بودند از اینکه $w_n(-1) \neq w_n(+1)$ استفاده کنند.

پس از آن Pal [۱۶]، فرم کلی نتیجه قبل را برای هر چندجمله ای $w_n(x)$ با ریشه های $1 > x_n > ... > x_k > ... > x_2 > x_1 > -1$ با در نظر گرفتن دو نقطه گرهی اضافی $x_0 = -1$ و $x_{n+1} = 1$ و فقط با شرط کوچک $w_n(-1) \neq w_n(1)$ پیدا کرد.

سرانجام سبستیان [9] [۲۰] نشان داد که چگونه مسئله ذکر شده قبلی برای هر سیستمی از نقاط گرهی قابل حل است و آن هم فقط با درنظر گرفتن شرط $x_0 \neq x_k$ برای $k = 1, 2, ..., n$ و بدون هیچ محدودیتی روی $w_n(x)$.

نتیجه نه تنها قضیه پال را تکمیل می کند، بلکه فرم صریح مطلوبتری نسبت به درونیاب مطرح شده توسط پال ارائه می دهد.

[9] Z.F.Sebestyn

فصل ۲

تعاریف و مقدمات اولیه

۱.۲ چند جمله ای های متعامد و برخی توابع خاص

چندجمله‌ای های متعامد همچون چبیشف و لژاندر و... بطور وسیعی در ریاضیات کاربردی بالاخص در درونیابی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با توجه به اینکه در این پایان نامه به مراتب از این چندجمله ای ها استفاده شده است، در این قسمت این چندجمله ای ها را معرفی کرده و برخی از خواص آنها را بیان می کنیم. [۱]

فرض کنیم که $w = w(x)$ تابع وزن روی بازه‌ی $(-۱, ۱)$ باشد، یعنی یک تابع انتگرال پذیر نامنفی روی $(-۱, ۱)$ باشد. فرض کنیم که $\{p_k, k = ۰, ۱, ...\}$ یک دستگاه از چندجمله ای های جبری p_k با درجهٔ k باشند، که روی بازه $(-۱, ۱)$ نسبت به تابع وزن w دوبه‌دو متعامد باشند. یعنی به ازای هر $n, \ m$ متمایز

$$(p_m, p_n) = \int_{-۱}^{۱} w(x)|p_m(x)p_n(x)|dx \ = ۰. \qquad (۱.۱.۲)$$

[۱] برای اطلاعات بیشتر در مورد چندجمله ای های متعامد به مرجع [۲۵] مراجعه کنید

می‌توان ثابت کرد که (رجوع کنید به [۲۲]) که هر دستگاه از چندجمله‌ای های متعامد در رابطه‌ی بازگشتی زیر صدق می‌کند.

$$\begin{cases} p_{k+1} = (x-\alpha_k)p_k(x) - \beta_k p_{k-1}(x), & k = 0, 1, 2, \ldots \\ p_{-1}(x) = 0, \ \ p_0(x) = 1 \end{cases} \tag{۲.۱.۲}$$

بطوریکه

$$\alpha_k = \frac{(xp_k, p_k)}{(p_k, p_k)}, \qquad \beta_{k+1} = \frac{(p_{k+1}, p_{k+1})}{(p_k, p_k)} \qquad k \geq 0. \tag{۳.۱.۲}$$

$p_{-1} = 0$ لذا ضریب β_0 دلخواه انتخاب می‌شود.

۱.۱.۲ چندجمله‌ای های لژاندر

چندجمله‌ای های لژاندر، چندجمله‌ای های متعامدی روی بازه‌ی $(-1, 1)$ نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ هستند. چندجمله ای های متعامد لژاندر را می توان با استفاده از رابطه بازگشتی زیر نیز بدست آورد:

$$P_{k+1}(x) = \frac{2k+1}{k+1}\, x\, P_k(x) - \frac{k}{k+1} P_{k-1}(x) \tag{۴.۱.۲}$$

به طوریکه :

$$P_0(x) = 1\ , \qquad P_1(x) = x \tag{۵.۱.۲}$$

همچنین این چندجمله‌ای ها مستقیماً بااستفاده از فرمول رودریگز [۲] به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}[(x^2-1)^k], \qquad k = 0, 1, 2 \ldots . \tag{۶.۱.۲}$$

[۲] Rodrigues' formula

رابطه زیر یکی از روابط معروف در رابطه باچندجمله‌ای های لژاندر است که در بسیاری از اثبات ها از آن استفاده می شود

$$\frac{P'_m(x)P'_{m-1}(y) - P'_m(y)P'_{m-1}(x)}{m(x-y)} = \sum_{j=2}^{n} \frac{2j-1}{j(j-1)} P'_{j-1}(x)P'_{j-1}(y) \qquad (۷.۱.۲)$$

و همینطور نامساوی زیر به نامساوی برنشتاین [۳] معروف است که در فصل ۳ از آن استفاده خواهد شد

$$|(1-x^2)P'_{n-1}(x)| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}n}, \qquad x \in [-1, 1] \qquad (۸.۱.۲)$$

۲.۱.۲ چندجمله‌ای های لاگور

این چندجمله‌ای جواب معادله دیفرانسیل

$$xy''_n(x) + (s+1-x)y'(x) + ny_n(x) = 0 \qquad (۹.۱.۲)$$

است .

رابطه متعامد بودن به صورت زیر است :

$$\int_0^{\infty} x^s e^{(-x)} L_n^{(s)}(x) L_m^{(s)}(x)dx = \frac{\Gamma(n+s+1)}{n!}\delta_{m,n}$$

همینطور به راحتی می توان اثبات کرد که فرمول صریح برای بدست آوردن چندجمله‌ای های لاگوربه صورت زیر است :

$$L_n^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+s}{n-k} \frac{(-x)^k}{k!} \quad , \qquad x \in [0, +\infty)$$

---

[۳] Bernstein

۳.۱.۲ چندجمله‌ای های هرمیت

این چندجمله‌ای جواب معادله دیفرانسیل زیر می باشد

$$y_n''(x) - ۲xy_n'(x) + ۲ny_n(x) = ۰ \tag{۱۰.۱.۲}$$

رابطه متعامد بودن به صورت زیر است :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^۲)} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi}۲^m m! \delta_{m,n}$$

همینطور به راحتی می توان اثبات کرد که فرمول صریح برای بدست آوردن چندجمله‌ای های هرمیت به صورت زیر است

$$H_n(x) = \sum_{k=۰}^{[\frac{n}{۲}]} \frac{(-۱)^k n!}{k!(n-۲k)!}(۲x)^{n-۲k} \quad , x\epsilon(-\infty, +\infty).$$

رابطهٔ بین چندجمله ای های هرمیت و چندجمله ای های لاگور نیز به صورت زیر است

$$H_{۲m}(x) = (-۱)^m ۲^{۲m}\ m!\ L_m^{(-\frac{۱}{۲})}(x^۲) \tag{۱۱.۱.۲}$$

$$H_{۲m+۱}(x) = (-۱)^m ۲^{۲m+۱}\ m!\ L_m^{(\frac{۱}{۲})}(x^۲) \tag{۱۲.۱.۲}$$

رابطه زیر نیز یکی از روابط معروف در رابطه باچندجمله‌ای های هرمیت است

$$\sum_{i=۱}^{n-۱} \frac{۱}{۲^i i!} H_i(y) H_i(x) = \frac{۱}{۲^n(n-۱)!} \frac{H_n(y)H_{n-۱}(x) - H_{n-۱}(y)H_n(x)}{y-x}. \tag{۱۳.۱.۲}$$

همینطور عدد ثابت C وجود دارد به طوری که

$$H_n(x) = C\sqrt{۲^n n!} n^{\frac{-۱}{۴}} (۱ + \sqrt[۳]{x}) e^{\frac{x^۲}{۲}} \tag{۱۴.۱.۲}$$

۴.۱.۲ تابع بسل

این تابع جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + x^{-۱}y' + (۱ - \alpha^۲ x^{-۲}) = ۰$$