وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

عنوان

معادلات انتگرال- دیفرانسیل و کنترل‌های بهینه در فضاهای باناخ

استاد راهنما

دکتر جعفر پورمحمود

استاد مشاور

دکتر علیرضا غفاری حدیقه

پژوهشگر

لیلی مهکی

تیرماه- ۱۳۸۷

تبریز- ایران

بسم اللّه الرّحمن الرّحيم

تقدیم به

آستان پر مهر موعود مهربان که حضورش را تشنه ایم.

تقدیم به بی‌کران‌های مهر و ایثار:

پدر و مادر بزرگوارم

ستایش

سپاس خدایی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارگران شمردن نعمت‌های او ندانند، و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. خدایی که پای اندیشه‌ی تیزگام در راه شناسایی او لنگ است، و سر فکرت ژرف رو به دریای معرفتش بر سنگ. صفت‌های او تعریف ناشدنی است و به وصف درنیامدنی، و در وقت ناگنجیدنی، و به زمانی مخصوص نابودنی. به قدرتش خلایق را بیافرید، وبه رحمتش بادها را بپراکنید، و با خرسنگ‌ها لرزه‌ی زمین را در مهار کشید.

گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهی‌ای از روی اعتقاد و ایمان، بی‌آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمد(ص) بنده‌ی او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار، که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گرد دودلی از دل‌ها بزداید، و با حجت و دلیل ملزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آن‌چه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آن‌چه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آن‌چه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمت‌های آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدان‌چه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنمایی‌های تو ناشناخته نیست و از کفایت‌های تو نه.

گزیده‌ای از نهج البلاغه

قدردانی

حمد بی پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آنان بی‌منتها، هدایتشان بی‌نظیر و هم‌نوایی با آنان سعادت است.

در پایان این مرحله بر خود لازم می‌بینم از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های مهربانی، پدر و مادر بزرگوارم صمیمانه تشکر کنم و بر دستان پر عطوفت این عزیزان، بوسه‌ی عشق نهم.

از اساتید گرانقدر جناب **آقای دکتر جعفر پورمحمود** و جناب **آقای دکتر علیرضا غفاری** که با راهنمایی‌ها و مساعدت‌های عالمانه‌ی خود راه‌گشای این پژوهش گشتند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پروژه هدایت کردند، سپاس‌گزاری می‌کنم.

هم‌چنین از اساتید محترم و فرهیخته‌ی گروه ریاضی به‌ویژه جناب **آقای دکتر ناصر آقازاده** که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام و علاوه بر دانش از حسن برخورد ایشان هم بهره‌مند بودم، تشکر و قدردانی می‌کنم. امیدوارم سپاس بی‌دریغ این حقیر را پذیرا باشند.

در پایان از خواهر و برادر بزرگوارم که همواره در تمام مراحل تحصیل مشوق من بوده‌اند، تشکر می‌نمایم.

لیلی مهکی

تیر ماه ۱۳۸۷

تبریز، ایران

فهرست مندرجات

چکیده

در طول قرن اخیر، معادلات ارزیابی نیم‌خطی مطالعه شده و هم‌چنین مسایل مربوط به کنترل‌های بهینه بررسی شده‌اند. هم‌چنین حالت‌های خاصی از معادلات انتگرال - دیفرانسیل توسط برخی از مؤلفان در نظر گرفته شده است. اما معادلات انتگرال - دیفرانسیل عمومی تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است.

در این پایان‌نامه، نتیجه‌ی اصلی با حالتی از $C_\circ$ - نیم‌گروه عملگر وابسته به معادله‌ی انتگرال - دیفرانسیل

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = F(t, x(t), (Sx)(t)), \\ x(\circ) = x_\circ, \end{cases} \qquad (۱.۰)$$

سروکار دارد که در آن $\{A(t) | t \in I\}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی بسته‌ی به‌طور چگال معین و S یک عملگر انتگرالی غیر خطی است که به‌صورت

$$(Sx)(t) = \int_\circ^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau,$$

تعریف می‌شود. هم‌چنین گونه‌ای از مسایل کنترل بهینه‌ی دستگاه (۱.۰) را در نظر می‌گیریم.

به منظور به‌دست آوردن نتیجه‌ی وجودی جوابهای $\alpha - mild$ برای دستگاه (۱.۰)، عملگر انتگرالی S و نگاشت $F(., x(.), (Sx)(.))$ مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در پایان با به‌کار بردن قضیه‌ی بالدر [۱]، یک نتیجه‌ی وجودی از کنترل‌های بهینه را به‌دست می‌آوریم.

---
[۱] $Balder's\ theorem$

کلمات کلیدی: معادله‌ی انتگرال - دیفرانسیل؛ معادله‌ی انتگرال - دیفرانسیل ضربه‌ای؛ کنترل بهینه؛ جواب $\alpha - mild$ و $PWC - \alpha - mild$؛ حساب مرتبه کسری.

پیشگفتار

معادلات انتگرال در بسیاری از مباحث فیزیک، زیست‌شناسی، شیمی و مهندسی‌و ... ظاهر می‌شوند. این معادلات اولین بار توسط آبل[۲] به رسمیت شناخته شده اند. هم‌چنین عقیده‌ای وجود دارد که اولین پیدایش معادله‌ی انتگرال به کار لاپلاس [۳] در سال ۱۷۸۲ برمی‌گردد که روی تبدیلات لاپلاس و معکوس آن‌ها مطالعه می‌کرد. در سال ۱۸۹۶ ولترا[۴] در زمینه‌ی موضوع رشد جمعیت به مسأله‌ی

$$\phi(x) + \int_a^x K(x,t)\phi(t)dt = f(x)$$

برخورد کرد. در سال ۱۹۰۰ فردهلم[۵] معادله‌ی

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)\phi(t)dt$$

را مورد مطالعه قرار د.

نوعی از معادلات انتگرال نیز وجود دارد که در آن هر دو عملگر مشتق و انتگرال ظاهر می‌شوند و به معادلات انتگرال - دیفرانسیل موسومند. این نوع معادلات نیز اولین بار توسط ولترا معرفی شدند. وی در حال مطالعه‌ی تأثیر وراثت بر رشد جمعیت با این‌گونه معادلات روبرو شد و این نام را برای آن‌ها انتخاب نمود.

در این پایان‌نامه معادلات انتگرال - دیفرانسیل عمومی و نیز معادلات انتگرال - دیفرانسیل ضربه‌ای در

[۲] Abel
[۳] Laplace
[۴] Volterra
[۵] Fredholm

نظر گرفته شده و وجود جواب برای این معادلات مورد مطالعه قرار گرفته است.

این پایان‌نامه از سه فصل تشکیل شده است. در فصل اول، تعاریف و مفاهیم مقدماتی که برای مطالعه‌ی فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، ارایه شده است. در فصل دوم، به اختصار به مطالعه‌ی نظریه‌ی کنترل بهینه می‌پردازیم. در فصل سوم، وجود کنترل بهینه را برای مسایل کنترل بهینه‌ای که به‌صورت دستگاه معادلات انتگرال - دیفرانسیل هستند، ثابت می‌کنیم. هم‌چنین در مورد وجود جواب‌های $\alpha - mild$ و $PWC - \alpha - mild$ برای معادلات انتگرال - دیفرانسیل و معادلات انتگرال - دیفرانسیل ضربه‌ای بحث می‌کنیم.

لازم به ذکر است منابع اصلی این پایان‌نامه، [۳]، [۱۳]، [۱۵]، [۱٦] و [۱۸] می‌باشند.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم پیش‌نیاز

در این بخش، تعاریف و مفاهیم اولیه و قضایایی که پیش‌نیاز مطالعه‌ی فصل‌های آتی هستند، یادآوری می‌شوند. این مطالب در سه بخش مقدماتی از معادلات انتگرال، آنالیز و حساب مرتبه کسری دسته‌بندی شده است که در هر بخش، تعاریف و قضایا و مثال‌های مربوطه آورده شده اند.

۱.۱ مقدماتی از معادلات انتگرال

معادله‌ای را که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال هم قرار داشته باشد **معادله‌ی انتگرال** نامند. شکل کلی معادله‌ی انتگرال به‌صورت

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F(u(t))dt, \tag{۱.۱}$$

می‌باشد که درآن $u(x)$ تابع مجهول، $K(x,t)$ هسته‌ی معادله‌ی انتگرال، λ پارامتر معلوم و $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال می‌باشند. هسته‌ی معادله و تابع $f(x)$ از قبل معلوم هستند.

هرگاه در معادله‌ی انتگرال، تابع مجهول به‌صورت خطی در زیر علامت انتگرال ظاهر شود، یعنی $F(u(t)) = u(t)$، معادله‌ی انتگرال را **خطی** نامند. در غیر این‌صورت آن‌را غیر خطی گویند. به عنوان مثال معادله‌ی

$$u(x) = \tfrac{2}{3}x + \int_0^1 xt\, u(t)dt,$$

معادله‌ی انتگرال خطی با هسته‌ی $K(x,t) = xt$ و معادله‌ی

$$u(x) = \tfrac{1}{2}\cos x + \int_0^1 (x-t)^2 u^2(t)dt,$$

معادله‌ی انتگرال غیرخطی با هسته‌ی $K(x,t) = (x-t)^2$ است.

هرگاه در معادله، تابع مجهول و مشتقات آن هم در زیر علامت انتگرال و هم خارج آن ظاهر شود، آن‌را **معادله‌ی انتگرال- دیفرانسیل** گویند. معادلات زیر، نمونه‌هایی از معادلات انتگرال- دیفرانسیل می‌باشند.

$$1)\ u'(x) = -x + \int_0^1 xtu(t)dt, \qquad u(0) = 1,$$

$$2)\ u''(x) + (x-1)u'(x) = \sin x + \int (x^2+1)tu(t)dt, \qquad u(0) = 1, u'(0) = 3,$$

$$3)\ (2x+1)u'(x) = e^x + \lambda \int (x-t)(u'(t)+u(t))dt, \qquad u(0) = 0.$$

هم‌چنین دستگاه معادلات به شکل

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + A(t)x(t) = F(t, x(t), (Sx)(t)) & t \in (0,T)\backslash D \\ x(0) = x_0 \\ \Delta x(t_i) = J_i(x(t_i)) & i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \tag{2.1}$$

را **معادله‌ی انتگرال - دیفرانسیل ضربه‌ای** می‌نامند که در آن $D = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \subseteq (0,T)$ با $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < T$ و $\{A(t) | t \in [0,T]\}$ خانواده‌ای از عملگرهای خطی بسته‌ی به‌طور چگال معین، S یک عملگر انتگرال غیرخطی به‌صورت

$$(Sx)(t) = \int_0^t K(t,\tau) g(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

F عملگر دلخواه و $J_i, \quad ۱ \leq i \leq n$ نگاشتی غیرخطی است و نیز

$$\Delta x(t_i) = x(t_i + ۰) - x(t_i - ۰).$$

۲.۱ مفاهیمی از آنالیز

تعریف ۱.۱ حاصل‌ضرب داخلی

اگر $V \subseteq \mathbb{R}^n$ یک فضای برداری باشد، **حاصل‌ضرب داخلی** (حاصل‌ضرب نقطه‌ای) تابعی است از $V \times V$ به $\mathbb{R}$ که با نگاشت $(x, y) \mapsto x.y$ نشان داده می‌شود و دارای خواص

۱) به ازای هر $x \in V$، $x.x \geq ۰$،

۲) $x.x = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$،

۳) به ازای هر $x, y \in V$ ، $x.y = y.x$،

۴) به ازای هر $x, y, z \in V$، $x.(y + z) = x.y + x.z$ و $(x + y).z = x.z + y.z$،

۵) به ازای هر $x, y \in V$ و $a \in \mathbb{R}$، $(ax).y = x.(ay) = a(x.y)$

می‌باشد. هر فضای برداری که در آن حاصل‌ضرب داخلی تعریف شده باشد فضای **حاصل‌ضرب داخلی** نام دارد.

در این پایان‌نامه، حاصل‌ضرب داخلی استاندارد روی $\mathbb{R}^n$ به‌صورت $x.y = \sum_{i=۱}^{n} x_i \, y_i$ در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۱ اندازه

فرض کنید X مجموعه‌ی ناتهی باشد، یک جبر از مجموعه‌ها روی X، گردایه‌ای ناتهی مانند M از زیرمجموعه‌های X است که تحت اجتماع‌های متناهی و متمم‌گیری بسته است. یعنی

$$\begin{cases} ۱) A \in M & \Rightarrow \quad A^c \in M, \\ \\ ۲) \quad A_۱, A_۲, \ldots, A_n \in M & \Rightarrow \quad \bigcup_{i=۱}^{n} A_i \in M. \end{cases}$$

از دو خاصیت فوق نتیجه می‌شود $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i \in M$[۱].

هم‌چنین اگر

$$\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in M \Rightarrow \bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i \in M,$$

آن‌گاه M را σ- **جبر** می‌نامند.

فرض کنید X فضای متری باشد. σ- جبر تولید شده به وسیله‌ی مجموعه‌های باز واقع در X را σ- **جبر بورل روی** X نامیده و با $\mathbb{B}_X$ نمایش می‌دهند. اعضای σ- جبر بورل را مجموعه‌های بورل می‌نامند.

فرض کنید مجموعه‌ی X مجهز به یک σ- جبر مانند M باشد. یک **اندازه** روی M تابعی چون $\mu : M \to [\circ, \infty)$ است به‌طوری‌که

الف) $\mu(\emptyset) = \circ$

ب) اگر $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در M باشد، آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{۱}^{\infty} A_i\right) = \sum_{۱}^{\infty} \mu(A_i).$$

خاصیت (ب) خاصیت جمعی شمارش‌پذیر نامیده می‌شود و خاصیت جمعی متناهی بودن نیز از آن نتیجه می‌شود، یعنی:

$$\mu(\bigcup_{۱}^{n} A_i) = \sum_{۱}^{n} \mu(A_i),$$

زیرا می‌توان A_i را برای $i > n$ تهی در نظر گرفت.

اگر $M \subseteq P(X)$ یک σ- جبرباشد، (X, M) را **فضای اندازه‌پذیر** گویند و مجموعه‌های واقع در M، مجموعه‌های اندازه‌پذیر نامیده می‌شوند. اگر μ اندازه‌ای روی (X, M) باشد، آن‌گاه (X, M, μ) فضای اندازه نامیده می‌شود. اندازه‌ای روی $\mathbb{R}$ که با دامنه‌ی $\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ تعریف می‌شود را **اندازه‌ی بورل** روی $\mathbb{R}$

---

[۱] زیرا $\bigcap_{i=۱}^{n} A_i = (\bigcup_{i=۱}^{n} A_i^c)^c$ است.

گویند.

اگر (X,M) و (Y,N) فضاهای اندازه‌پذیر باشند، تابعی چون $f:X\to Y$ را (M,N)- **اندازه‌پذیر** (یا اندازه‌پذیر) نامند هرگاه برای هر $E\in N$، $f^{-1}(E)\in M$. تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ **اندازه‌پذیر بورل** است هرگاه $(\mathbb{B}_{\mathbb{R}},\mathbb{B}_{\mathbb{C}})$- اندازه‌پذیر باشد.

فرض کنید f تابعی اندازه‌پذیر باشد و $0<p<\infty$. تعریف می‌کنیم:

$$\parallel f\parallel_p=\left[\int\mid f\mid^p d\mu\right]^{\frac{1}{p}},$$

در این‌صورت **فضای** $L^p(X,M,\mu)$ به‌صورت

$$L^p(X,M,\mu)=\left\{f:X\to\mathbb{C}\ :\quad \parallel f\parallel_p<\infty,\ \text{تابع اندازه‌پذیر}\ f\right\},$$

تعریف می‌شود. در صورتی‌که مجموعه‌های X و M و اندازه‌ی μ مهم نباشند، $L^p(X,M,\mu)$ را به‌طور خلاصه با L^p نمایش داده می‌شود.

تعریف ۳.۱ انواع فضاها

اگر X یک فضای برداری باشد، آن‌گاه **نرم** در X تابعی است از X به $[0,\infty)$ که با $\|.\|:x\mapsto\|x\|$ نشان داده می‌شود و دارای خواص

۱) به ازای هر $x\in X$، $\parallel x\parallel\geq 0$،

۲) $\parallel x\parallel=0$ اگر و تنها اگر $x=0$،

۳) به ازای هر $x\in X$ و $a\in\mathbb{R}$، $\parallel ax\parallel=\mid a\mid\parallel x\parallel$ ،

۴) به ازای هر $x,y\in X$، $\parallel x+y\parallel\leq\parallel x\parallel+\parallel y\parallel$.

می‌باشد. هر فضای برداری را که در آن نرم تعریف شده باشد **فضای نرم‌دار** گویند. به‌عنوان مثال در $\mathbb{R}^n$ نرم را به‌صورت

$$\parallel(x_1,x_2,\cdots,x_p)\parallel=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2},$$

تعریف می‌کنیم.

اگر X یک فضای برداری نرم‌دار باشد، تابع $\rho(x,y)=\| x-y \|$ یک متر روی X تعریف می‌کند. این متر را **متر نرمی** گویند. توپولوژی تعریف شده توسط این متر، توپولوژی نرمی روی X نامیده می‌شود. هر فضای برداری نرم‌دار مانند X را که نسبت به متر نرمی کامل باشد(هر دنباله‌ی کشی، همگرا باشد.) **فضای باناخ** گویند.

مثلاً فضای برداری $\mathbb{R}^n$ با نرم

$$\|x\| = \left(\sum_{i=۱}^{n} x_i^{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

فضای باناخ است. در این‌جا $x=(x_۱,x_۲,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$.

یک **توپولوژی** روی مجموعه‌ی ناتهی X، خانواده‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که شامل X و $\emptyset$ بوده و تحت اجتماع‌های دلخواه و اشتراک‌های متناهی بسته است. یعنی

$$\begin{cases} ۱)\ \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}\subseteq\tau \quad \Rightarrow\ \bigcup_{\alpha\in A} V_\alpha\in\tau, \\ \\ ۲)\ V_۱,V_۲,\dots,V_n\in\tau \ \Rightarrow\ \bigcap_{i=۱}^{n} V_i\in\tau. \end{cases}$$

زوج (X,τ) یک فضای توپولوژیک نامیده می‌شود. فضای توپولوژیکی (X,τ) و $S\subseteq X$ را در نظر بگیرید. **توپولوژی زیرفضایی** روی S به‌صورت

$$\tau_S=\{S\cap U:\ U\in\tau\}$$

تعریف می‌شود. این توپولوژی را توپولوژی نسبی روی S نیز می‌نامند.

اگر X فضای توپولوژیکی دلخواه و $\mathbb{C}^X$ فضای توابع مختلط روی X باشد، توپولوژی تولید شده توسط مجموعه‌های

$$\left\{g\in\mathbb{C}^X:\ \sup_{x\in X}|g(x)-f(x)|<n^{-۱},\ \ n\in\mathbb{N},\ f\in\mathbb{C}^X\right\},$$

را **توپولوژی همگرایی یکنواخت** گویند.

فرض کنید X فضای توپولوژیکی دلخواه باشد. اگر $x,y\in X$ و $x\neq y$ و دو مجموعه‌ی باز مجزای U

و V موجود باشند به‌طوری‌که $x \in U$ و $y \in V$، آن‌گاه X را **فضای هاسدورف** گویند.
فرض کنید $K = \mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ و X فضای برداری نرم‌داری روی K باشد. فضای $L(X, K)$، متشکل از همه‌ی تابعک‌های خطی روی X، فضای دوگان X نامیده می‌شود و با X^* نمایش داده می‌شود. یعنی

$$X^* = L(X, K) = \Big\{ f : X \longrightarrow K, \ \text{تابعک خطی } f \Big\}.$$

هر فضایی که زیرمجموعه‌های آن را بتوان به‌صورت اجتماع شمارایی از مجموعه‌های چگال نوشت، **فضای جدایی‌پذیر** نامیده می‌شود.
هم‌چنین فرض کنید $x \in X$، تابع $\widehat{x} : X^* \to \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی $\widehat{x}(f) = f(x)$ تعریف کرده و قرار می‌دهیم $\widehat{X} = \{\widehat{x} | x \in X\}$. اگر داشته باشیم $X^{**} = \widehat{X}$، آن‌گاه X را فضای **انعکاسی** (بازتابی) گویند.
فرض کنید X یک فضای توپولوژیکی (مجموعه‌ای دلخواه) باشد و $Y \subseteq X$. زیرفضای (زیرمجموعه‌ی) Y را **به‌طور نسبی فشرده** گویند هرگاه بستار آن فشرده باشد. این فضا را پیش‌فشرده نیز می‌نامند.
ناحیه‌ی کراندار $Y \subset \mathbb{R}^n$ را به‌طور اکید زیرمجموعه‌ی ناحیه‌ی $X \subset \mathbb{R}^n$ نامیده و با نماد $Y \Subset X$ نشان می‌دهند هرگاه $\overline{Y} \subset X$.

تعریف ۴.۱ $C_\circ$-نیم‌گروه

مجموعه‌ی غیر تهی G همراه با یک عمل دوتایی شرکت‌پذیر، یک **نیم‌گروه** نامیده می‌شود. فرض کنید $\Delta = \{z | z \in \mathbb{C}, \ \varphi_۱ \leq \arg(z) \leq \varphi_۲, \ \ \varphi_۱ < \circ < \varphi_۲\}$ باشد و فرض کنید برای $z \in \Delta$، $T(z)$ یک عملگر خطی کراندار باشد. خانواده‌ی $\{T(z) | z \in \Delta\}$ یک **نیم گروه تحلیلی** در Δ نامیده می‌شود هرگاه

۱) $z \mapsto T(z)$ در Δ تحلیلی باشد،

۲) $T(\circ) = I$ و برای هر $x \in X$، $\lim_{z \to \circ, z \in \Delta} T(z)x = x$،

۳) برای هر $z_۱, z_۲ \in \Delta$ داشته باشیم: $T(z_۱ + z_۲) = T(z_۱) + T(z_۲)$.

فرض کنید $T(t),\ t \in [0,\infty)$ یک نیم‌گروه از عملگرهای خطی کراندار روی X باشد، این نیم‌گروه را به‌طور قوی پیوسته از این عملگرها گویند هرگاه

$$\forall x \in X \quad : \quad \lim_{t \to 0} T(t)(x) = x.$$

هر نیم گروه به‌طور قوی پیوسته از عملگرهای خطی کراندار یک C_0- **نیم‌گروه** نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱ عملگرها

فرض کنید X و Y فضاهای باناخ باشند به‌طوری‌که $X \subseteq Y$. عملگر $E : X \to Y$ را تعریف می‌کنیم به‌طوری‌که برای هر $u \in X$، $E(u) = u$. در این‌صورت عملگر E را **عملگر نشاننده** گویند. این نشاندن **پیوسته** است هرگاه

$$\forall u \in X, \quad \exists C : \quad \| u \|_Y \leq C \| u \|_X.$$

به علاوه **فشرده** است هرگاه E پیوسته بوده و هر دنباله‌ی کراندار در X یک زیردنباله‌ی همگرا در Y داشته باشد.

عملگر خطی K از فضای برداری توپولوژیکی X به فضای برداری توپولوژیکی Y **عملگر به‌طور چگال معین** گفته می‌شود هرگاه دامنه‌ی K زیرمجموعه‌ی چگالی از X بوده و برد T زیرمجموعه‌ی سره‌ای از Y باشد.

اگر X فضای باناخ باشد، عملگر خطی $A : D(A) \subseteq X \to X$ **بسته** است هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D(A)$ **که** $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ **و** $\lim_{n\to\infty} Ax_n = y$ ، **داشته باشیم** $x \in D(A)$ **و** $Ax = y$.

فرض کنید X و Y فضای نرم‌دار باشند. عملگر خطی $H : D(H) \subseteq X \to Y$ **کراندار** است هرگاه

$$\exists C \in \mathbb{R}; \quad \forall x \in D(H) : \quad ||Hx||_Y \leq C \| x \|_X .$$

فرض کنید X و Y فضاهای دلخواه باشند. رابطه‌ی $D : X \to 2^Y$ را که هر عضو از X را به زیرمجموعه‌ی ناتهی از Y می‌نگارد **چندتابعی** نامند.