**وزارت علوم، تحقیقات و فناوری**

**دانشگاه دامغان**
**دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر**

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
علوم کامپیوتر (گرایش محاسبات علمی)

# حل مسائل سهموی معکوس با استفاده از الگوریتم PSO

توسط:

**زینب بینائی**

استاد راهنما:
**دکتر رضا پورقلی**

استاد مشاور:
**دکتر سید امین اصفهانی**

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

**به نام خدا**

# حل مسائل سهموی معکوس با استفاده از الگوریتم PSO

**توسط:**

زینب بینائی

**پایان‌نامه**

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ

درجه کارشناسی ارشد

**در رشته**

علوم کامپیوتر (گرایش محاسبات علمی)

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر رضا پورقلی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکترسید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش سیستم های دینامیکی و نظریه ی معادلات دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر علی عباسی ملائی استادیار ریاضی کاربردی گرایش تحقیق در عملیات دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر علی طهماسبی استادیار ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ی ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

# تقدیم به

چکامه ای از تلاش سال های جوانی ام نثار محبت های بی دریغ پدر و مادرم که خورشید پر فروغ روزهایم هستند و، همسرم شاه بیت غزل زندگیم، که کلام مهرآفرینش امید را به خستگی هایم و نای را به ناتوانی هایم بخشید.

# سپاسگزاری

سپاس بی کران پروردگار پاک را که انگیزه رشد و بالندگی و علم آموزی را در آدمی نهاد تا طعم شیرین نتیجه و تلاش را بچشند. حال به مصداق آیه شریفه "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" بر خود لازم می دانم که:

صمیمانه ترین سپاس را با احترام به استاد بزرگوارم **جناب آقای دکتر رضا پور قلی** که بدون شک انجام این تحقیق بدون راهنمایی های ارزنده ایشان میسر نبوده تقدیم می نمایم.

از استاد مشاور ارجمندم **جناب آقای دکتر سید امین اصفهانی** که با دقت نظر مرا راهنمایی نمودند کمال تشکر را دارم.

از داوران محترم **جناب آقای دکتر علی عباسی ملأئی و دکتر علی طهماسبی** که زحمت داوری این پایان نامه بر دوش آنها بوده است، کمال تشکر را دارم.

از نماینده محترم تحصیلات تکمیلی **جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی ثالث** که مدیریت جلسه را بر عهده داشته اند، سپاسگزارم.

و در نهایت از زحمات بی پایان **خانواده ام** و همراهی های **همسرم** که سایه گستر وجود حقیر نالایق بود مراتب امتنان خاطر را ابراز دارم.

چکیده

# حل مسائل سهموی معکوس با استفاده از الگوریتم PSO

به وسیله‌ی:
زینب بینائی

دستاورد اصلی این پایان‌نامه مطالعه‌ی مسأله‌ی هدایت گرمایی معکوس در حل مسأله‌ی یک بعدی می‌باشد. مسائل هدایت گرمایی معکوس یک نمونه بارز از مسائلی هستند که چندین پارامتر مجهول از جمله منابع گرمایی ساکن و متحرک، شرایط اولیه، شرایط مرزی و ... همزمان قابل تخمین می‌باشد. در این پایان‌نامه، به محاسبه‌ی شرایط مرزی می‌پردازیم.

ابتدا مفاهیم اساسی معادلات با مشتقات جزئی ارائه می‌شود، سپس مسائل هدایت گرمایی معکوس و مثالهایی از کاربرد این مسائل مطرح می‌گردد و در فصل سوم روشهای حل مسائل هدایت گرمایی مستقیم بحث خواهد شد و در فصل چهارم به معرفی الگوریتم $PSO$ و کاربرد این الگوریتم در حل مسائل هدایت گرمایی معکوس پرداخته می‌شود و نهایتاً در فصل پنجم، چند مسأله‌ی هدایت گرمایی معکوس با شرایط مرزی مجهول با روش پیشنهادی فصل چهارم حل می‌شود که نتایج به دست آمده نشان می‌دهد این الگوریتم راه‌حل مناسبی برای حل همچین مسائلی است.

# فهرست مطالب

# فهرست جدول‌ها

# فهرست شکل‌ها

# فصل ۱

# معادلات با مشتقات جزئی

## ۱-۱ مقدمه

هر معادله شامل یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را یک معادله دیفرانسیل می نامیم.
معادلات دیفرانسیل به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند:
(۱)معادلات دیفرانسیل معمولی(ODEs)[۱]
(۲)معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی(PDEs)[۲]
بحث اصلی در این پایان‌نامه، پیرامون مسائل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که در زیر به معرفی این دسته از معادلات می‌پردازیم.
یک معادله با مشتقات جزیی[۳]به وسیله‌ی دو یا چند متغیر مستقل مشخص می‌شود. معادلات با مشتقات جزیی به عنوان فرموله‌بندی ریاضی بسیاری مسائل ریاضیات کاربردی، شامل سرعت تغییرات نسبت به دو یا چند متغیر مستقل مورد استفاده قرار می‌گیرند. حالات خاص یک معادله با مشتقات جزیی دو بعدی مرتبه دوم که در مسائل فیزیکی بسیار اتفاق می‌افتد، به صورت زیر است:

$$a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d\frac{\partial v}{\partial x}+e\frac{\partial v}{\partial y}+fv+g=0, \qquad (۱.۱)$$

[۱] Ordinary Differential Equtions

[۲] Partial Differential Equtions

[۳] Partial differential equation

که در آن ممکن است $a$، $b$، $c$، $d$، $e$، $f$ و $g$ توابعی از $x$، $y$ و $v$ باشند. معادله با مشتقات جزیی بالا را

(الف) بیضوی [۴] گوییم اگر $b^{۲} - ۴ac < ۰$،

(ب) سهموی [۵] گوییم اگر $b^{۲} - ۴ac = ۰$،

(ج) هذلولی [۶] گوییم اگر $b^{۲} - ۴ac > ۰$،

معادله با مشتقات جزیی (۱.۱) را وقتی ضرایب $a$، $b$، $c$، $d$، $e$، $f$ و $g$ ثابت باشند یا فقط تابعی از $x$ و $y$ باشند، خطی می‌نامند، در غیر این‌صورت آن را غیرخطی گویند. اگر ضرایب مشتقات مرتبه دوم توابعی از $v$، $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $\frac{\partial v}{\partial y}$ باشند، ولی تابعی از مشتقات مرتبه‌ی دوم نباشند، معادله با مشتقات جزیی را شبه خطی گویند (اگر چه غیر خطی می‌باشند).

هدف از حل یک مسأله معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، حل یک معادله می‌باشد که در برخی شرایط فیزیکی، صادق است. شرایط فیزیکی مسأله ممکن است فقط از نوع اولیه ( آغازین ) باشد، که در این صورت به این مسأله، مشأله مقدار اولیه می‌گوییم. اگر شرایط فیزیکی مسأله از نوع مرزی ( کرانه‌ای ) باشد، مسأله مقدار مرزی و اگر شرایط فیزیکی مسأله از نوع اولیه و مرزی باشد، مسأله را، مسأله مقدار اولیه-مرزی می‌گوییم.

## ۱-۲ معادله بیضوی

به عنوان نمونه **معادله پواسون** [۷]

$$\frac{\partial^{۲} v}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} v}{\partial y^{۲}} + v = ۰, \tag{۲.۱}$$

و **معادله لاپلاس** [۸]

$$\frac{\partial^{۲} v}{\partial x^{۲}} + \frac{\partial^{۲} v}{\partial y^{۲}} = ۰, \tag{۳.۱}$$

[۴] Elliptic differential equation

[۵] Parabolic differential equation

[۶] Hyperbolic differential equation

[۷] Poisson equation

[۸] Laplace equation

معادلات بیضوی دوبعدی معروفی هستند. جواب تحلیلی معادله مشتقات جزیی (۲.۱) و معادله مشتقات جزیی (۳.۱) یک تابعی از $x$ و $y$ مانند $v(x,y)$ است.

## ۱-۳ معادله سهموی

به عنوان نمونه **معادله انتقال حرارت** [۹] یک بعدی

$$\frac{\partial v}{\partial t} = K\frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}} \tag{۴.۱}$$

ساده‌ترین معادله سهموی است. از حل تحلیلی معادله با مشتقات جزیی (۴.۱) یک تابع مانند $v(x,y)$ به‌دست می‌آید که در آن $x$ بین ۰ و $b$ و $t$ بین ۰ و $\infty$ واقع است.

## ۱-۴ معادله هذلولی

به عنوان نمونه [۱۰]**معادله موج** یک بعدی

$$\frac{\partial^{2} v}{\partial t^{2}} = c^{2}\frac{\partial^{2} v}{\partial x^{2}} \tag{۵.۱}$$

ساده‌ترین معادله هذلولی است. جواب تحلیلی معادله با مشتقات جزیی (۵.۱)، معادله‌ی $v(x,t)$است، که برای مقادیر $x$ بین ۰ و $b$ و $t$ بین ۰ و $\infty$ در معادله صدق می‌کند.

## ۱-۵ معادله گرما

یک میله فلزی به طول $l$ را در نظر بگیرید. فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ دمای میله در نقطه‌ی $x$، $f(x)$ باشد و سطح جانبی آن عایق شده باشد. دو انتهای $x = 0$ و $x = l$ را به ترتیب در دماهای $g(t)$ و $h(t)$ قرار می‌دهیم. اگر دمای میله را در لحظه‌ی $t$ و در نقطه‌ی $x$ با $v(x,t)$ نشان می‌دهیم،

[۹] Heat conduction problem

[۱۰] Wave equation

آن‌گاه ثابت می‌شود که $v$ جواب مسأله‌ی زیر است،

$$\begin{aligned} \sigma\rho v_t(x,t) &= kv_{xx}(x,t), \circ \leqslant x \leqslant l, t > \circ, \\ v(x,\circ) &= f(x), \circ \leqslant x \leqslant l, \\ v(\circ,t) &= g(t), t > \circ, \\ v(l,t) &= h(t), t > \circ, \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

که در آن $k$ ضریب هدایت گرمایی میله، $\sigma$ گرمای ویژه‌ی میله و $\rho$ چگالی یا جرم میله است. اگر قرار دهیم $c = \dfrac{k}{\sigma\rho}$، آن‌گاه معادله‌ی انتقال حرارت به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$v_t(x,t) = cv_{xx}(x,t), \circ \leq x \leq l, t > \circ, \tag{۷.۱}$$

که در آن $c$ یک عدد ثابت است [۱۵].

# فصل ۲

# مسائل سهموی معکوس و انواع آن

در مسائل هدایت گرمایی اگر هدف از حل مسأله، یافتن درجه حرارت با فرض معلوم بودن شرایط مرزی و آغازین مسأله در دامنه‌ی مسأله باشد آن گاه چنین مسأله‌ای یک مسأله‌ی مستقیم است. اما، اگر هدف از مسأله، یافتن شرط یا شرایطی به جز درجه حرارت مسأله، مد نظر باشد آن گاه این مسأله به طور مستقیم قابل حل نبوده و برای حل آن نیازمند اندازه‌گیری دما در یک یا چند نقطه‌ی داخلی هستیم. بنابراین مسأله تبدیل به یک مسأله‌ی معکوس می‌شود. اگر چه تعریف رسمی و دقیقی از یک مسأله‌ی معکوس وجود ندارد ولی مفهوم آن در ریاضیات کاربردی مدرن به صورت وسیعی مورد استفاده قرار گرفته است. معمولا در یک مسأله‌ی معکوس، کمیت هایی مانند چگالی، ضریب هدایت گرمایی، بار سطح، شکل و... رسانا با تغییرات فیزیکی رسانا-یا هرمحیط دیگر - مشخص می‌شوند که می‌تواند تابعی از زمان، تابعی از شکل، ثابت و... باشند[۳].
مسائل معکوس، زیر مجموعه‌ای از مسائل اندازه‌گیری غیر مستقیم هستند. در واقع اندازه‌گیری‌های غیر مستقیم، ماهیت یک مسأله را توصیف می‌کند. این مسائل در زمینه‌های کاربردی پیش می‌آیند. در چنین مسائلی معمولا، اثرات غیرمستقیم پدیده موردنظر اندازه‌گیری می‌شود. مسائل معکوس جزء مسائل دشوار می‌باشند زیرا حساسیت زیادی نسبت به خطای مقادیر اندازه‌گیری شده دارند. برای یک مسأله‌ی معکوس، می‌توان یک مدل ریاضی ارائه داد. اما فرایند حل یک مسأله‌ی معکوس بسیار دشوار می‌باشد که معمولا جواب دقیقی به دست نمی‌آید. بنابراین برای حل چنین مسائلی از روش‌های تقریبی مانند: روش های تکراری، تکنیک‌های منظم‌سازی، روش‌های تصادفی و شناسایی سیستم، روش‌هایی که جواب تقریبی را در زیرمجموعه‌ی جواب‌ها جستجو می‌کنند، تکنیک‌های تلفیقی و یا روش‌های عددی مستقیم استفاده می کنیم.

## ۲-۱ شرایط اولیه و مرزی،برای یک مسأله ی وابسته به زمان

### ۲-۱-۱ شرط اولیه

شرط اولیه برای یک مسأله‌ی وابسته به زمان، تعیین دما در جسم موردنظر در لحظه شروع فرایند می‌باشد.

### ۲-۱-۲ شرایط مرزی

شرایط مرزی، دما یا جریان حرارتی (شار حرارتی) بر روی مرز می‌باشد. شرایط مرزی به سه دسته زیر تقسیم بندی می‌شوند:

(۱) شرایط مرزی نوع اول (مسأله دیریکله)

(۲) شرایط مرزی نوع دوم (مسأله مرزی نیومن)

(۳) شرایط مرزی نوع سوم (مسأله مرزی روبین)

**۱-شرط مرزی با دمای معلوم، روی مرز (نوع اول)**

ممکن است در یک مسأله مقدار دما در سطح مرزی را داده باشند که تابع زمان و مکان می‌تواند باشد، این نوع شرط به شرط مرزی دیریکله معروف است.

**۲-شرط مرزی با شار حرارتی معین، بر روی مرز جسم(نوع دوم)**

هرگاه توزیع شار حرارتی بر روی مرز جسم مشخص باشد و به صورت ثابت یا تابعی از مکان و زمان و یا هردو باشد، شرط مرزی نوع دوم یا شرط مرزی نیومن گویند.

**۳-شرط مرزی نوع سوم**

اگر بر بخشی از کران مقدار دما و بر بقیه کران توزیع شار حرارتی مشخص باشد چنین شرطی به شرط مرزی روبین (آمیخته) موسوم است.

## ۲-۲ مسائل بد-وضع و خوش-وضع

فرض کنید یک مسأله به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$Au = g \qquad (۱.۲)$$

در این جا $u \in U$، $g \in G$ و $U$ و $G$ فضاهای متریک و $A$ یک عملگر است به طوری که $AU \in G$ میباشد. در حالت کلی $u$ می تواند برداری باشد که مدلی از یک پدیده را توصیف می کند و $g$ خواص

پدیده را نشان می دهد [۱۶].
یک مسأله‌ی خوش-وضع دارای شرایط زیر می‌باشد:

۱- جواب معادله (۱.۲) باید به ازاء هر $g \in G$ موجود باشد.

۲- جواب معادله (۱.۲) باید یکتا باشد.

۳- جواب معادله (۱.۲) باید نسبت به اختلال سمت راست پایدار باشد، یعنی عملگر $A^{-1}$ باید در سراسر فضای $G$ تعریف شده و پیوسته باشد.

اگر یکی از شرایط بیان شده در مسأله برقرار نباشد آن‌گاه مسأله بد-وضع می‌باشد. برای مسائل بد-وضع ، عملگر معکوس $A^{-1}$ در دامنه اش $AU \subset G$ پیوسته نمی‌باشد، بدین معنی که جواب معادله (۱.۲) به طور پیوسته به داده ورودی $g \in G$ بستگی ندارد[۱۹]. به طور کلی می‌توان گفت که جواب یک مسأله بد-وضع لزوما به طور پیوسته به داده‌های ورودی بستگی ندارد و ساختار جواب دارای ارتباط ضعیف با داده‌های ورودی است. به علاوه، خطاهای اندازه گیری شده‌ی کوچک می‌تواند سبب اختلالات بزرگ در جواب شود. بعضی از نکات جالب پیرامون مسائل بد-وضع را می‌توان در [۲]، [۳۵] یافت.

## ۲-۳ دسته‌بندی مسائل معکوس

مسائل حاکم در مهندسی که به فرموله‌ی معادلات با مشتقات جزئی یا معادلات انتگرالی می‌رسد، با شکل و اندازه‌ی دامنه‌ی مسأله، شرایط مرزی و آغازین، ویژگی‌های فیزیکی سیال مورد نظر مسأله، منبع‌های داخلی، شرایط خارجی و ورودی تعریف می‌شوند. همان طور که در بالا اشاره شد، اگر همه‌ی این اطلاعات معلوم باشد، مسأله از نوع مستقیم می‌باشد و به طور عمومی می‌توان آن را قابل حل و خوش-وضع در نظر گرفت. فرم کلی یک مسأله‌ی هدایت گرمایی به صورت زیر است:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t} = \nabla.(K\nabla T) + Q_v, \quad (x,y,z) \in \Omega \subset R^{3}, \quad t \in (0, t_f], \tag{۲.۲}$$

$$T(x,y,z,t) = T_b(x,y,z,t) \quad for \quad (x,y,z,t) \in S_D, \quad t \in (0, t_f], \tag{۳.۲}$$

$$-K\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n} = q_b(x,y,z,t) \quad for \quad (x,y,z,t) \in S_N, \quad t \in (0, t_f] \tag{۴.۲}$$

$$-K\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial n} = h_c(T(x,y,z,t) - T_e(x,y,z,t)) \quad for \quad (x,y,z,t) \in S_R, \ t \in (0, t_f] \tag{۵.۲}$$

$$T(x,y,z,t) = T_\circ(x,y,z) \quad for \quad (x,y,z) \in \Omega, \tag{۶.۲}$$

که $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ عملگر مشتق گرادیان در فضای سه بعدی می‌باشد. $\rho$ نشان دهنده‌ی غلظت جرم، $[kg/m^3]$؛ $c$ گرمای ویژه در حجم ثابت، $[\frac{J}{kgK}]$؛ $T$ دما، $[K]$؛ $k$ نشان دهنده‌ی ضریب هدایت گرمایی، $[\frac{W}{mK}]$؛ $Q_v$ نرخ تولید گرما در هرواحد حجم، $[\frac{W}{m^3}]$؛ $\frac{\partial}{\partial n}$ به معنای مشتق نسبت به طول؛ $h_c$ نشان دهنده‌ی ضریب انتقال گرمایی، $[\frac{W}{m^2K}]$؛ $T_b$، $q_b$ و $T_\circ$ توابع داده شده ، $T_e$ دمای محیطی و $t_f$ زمان انتها می‌باشد. کران $\partial\Omega$ از دامنه‌ی $\Omega$که به سه بخش مجزا توسط $D$ برای شرایط مرزی دیریکله و $N$ برای شرایط مرزی نیومن و $R$ برای شرایط مرزی روبین نشان داده می‌شوند، تقسیم شده است؛ $S_D \cup S_N \cup S_R = \partial\Omega$.

معادله‌ی (۲.۲) با شرایط (۳.۲) تا (۶.۲) یک مسأله‌ی هدایت گرمایی را توصیف می‌کند. درحالتی که مسأله ایستا باشد معادله‌ی (۲.۲) معادله پوآسون یا هنگامی که تابع منبع $Q_v$ برابر صفر باشد معادله لاپلاس می‌باشد. مسائل سهموی معکوس به انواع زیر تقسیم بندی می‌شوند: مسائل هدایت معکوس، انتقال گرمایی معکوس، تابش معکوس و تغییر فاز معکوس(انجماد یاذوب)[۲۲].

در این جا مسائل سهموی معکوس را برپایه‌ی عوامل بوجودآورنده‌ی این مسائل دسته‌بندی می‌کنیم:

(۱) تعیین مقادیر مرزی مسائل معکوس

(۲) تعیین مقادیر آغازین مسائل معکوس

(۳) تعیین خصوصیات فیزیکی مسائل معکوس

(۴) تعیین منبع در مسائل معکوس

(۵) تعیین شکل مسائل معکوس

## ۲-۳-۱ تعیین مقادیر مرزی مسائل معکوس

در این نوع از مسأله‌ی معکوس، شرط مرزی مسأله مجهول می‌باشد. در عوض در تعدادی از نقاط داخلی دامنه‌ی مسأله، دماهای اندازه‌گیری شده یا مقادیر پیش‌بینی شده، جواب‌های داخلی نامیده می‌شوند. آنها می‌توانند در مرزها و یا سطح داخلی محدوده‌ی مسأله به‌صورت مجموعه نقاط گسسته معلوم باشند. اگر جواب‌های داخلی به عنوان مقادیر شار گرمایی معلوم باشند در این‌صورت باید دما در قسمتی از مرز معلوم باشد. یعنی باید یکی از شرایط روبین یا دیریکله معلوم باشد. در مسائل ایستا، مسأله معکوس برای معادله‌ی پوآسون یا لاپلاس حل می‌شود. اگر دما به زمان بستگی داشته باشد در این‌صورت معادله (۲.۲) با شرایط اضافی به صورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$T(x,y,z,t) = T_a(x,y,z,t) \quad for \quad (x,y,z,t) \in L \in \Omega, \quad t \in (\circ, t_f], \tag{۷.۲}$$

یا

$$T(x_i, y_i, z_i, t_i) = T_{ik} \quad for \quad (x_i, y_i, z_i) \in \Omega, \quad t_k \in (۰, t_f)], \qquad (۸.۲)$$

در اینجا $I$ ,...,۱, ۲, ۳، $i =$ ۱, ۲, ۳...,$K$، $k =$ $T_a$ یک تابع معین و $T_{ik}$ از مقادیر اندازه گیری شده به‌دست می‌آید. برای مشاهده‌ی مثال‌هایی از این نوع مسائل می توان به [۲۷] رجوع کرد.

### ۲-۳-۲ تعیین مقادیر آغازین مسائل معکوس

در این نوع از مسائل معکوس سهموی، شرط آغازین مسأله مجهول است یعنی در شرط (۶.۲) تابع $T_۰$ مجهول است. برای یافتن توزیع دمای آغازین، یک میدان گرمایی در دامنه‌ی مورد نظر برای $t >$ ۰، باید معلوم باشد.یعنی به جای شرط (۶.۲) شرطی به فرم زیر را داریم:

$$T(x, y, z, t_{in}) = T(x, y, z) \quad for \quad (x, y, z) \in \Omega \ and \ t_{in} \in (۰, t_f),$$

در برخی از مقالات به جای شرط (۴.۲) دمای اندازه‌گیری شده روی بخشی از مرز استفاده می‌شود. رجوع کنید به[۲۷].

### ۲-۳-۳ تعیین خصوصیات فیزیکی مسائل معکوس

تعیین خصوصیات فیزیکی، دسته‌ای دیگر از مسائل هدایت گرمایی معکوس را به وجود می‌آورد. ضرایب می‌توانند به مکان یا دما وابسته باشند. در بعضی موارد فقط وابستگی به زمان، مدنظر است. همچنین در مواردی که خصوصیات فیزیکی مسأله تعیین می‌شود برخی از اطلاعات اضافی شامل دما و یا شارش گرما در دامنه‌ی مسأله معلوم می‌باشد. معمولا دمای اندازه‌گیری شده در نقاط داخلی دامنه در دست می‌باشد[۳۷].

### ۲-۳-۴ تعیین منبع مسائل معکوس

در دسته‌ای دیگر از مسائل معکوس سهموی، منبع $Q_v$، مجهول می‌باشد. در بسیاری موارد مقادیر دما در نقاط اختیاری دامنه به‌عنوان شرط اضافی در دست است. معمولا این مقادیر با اندازه‌گیری به‌دست می‌آیند. شرط (۸.۲) را ببینید. همچنین مقادیر اندازه‌گیری شده و یا پیش‌بینی شده دما و شارش گرمایی در قسمتی از مرز می‌تواند به‌عنوان شرط اضافی مسأله در نظر گرفته شود. دسته‌ی دیگری از مسائل، مربوط به منبع متحرک با توان نامعلوم می‌باشند. تعدادی از چنین مسائلی را می‌توان در [۱۴] مشاهده کرد.

### ۲-۳-۵ تعیین شکل مسائل معکوس

در چنین مسائلی شرط یا شرایط کرانه‌ای مجهول مسأله، متحرک می‌باشد. در میان مسائل معکوس، حل عددی چنین مسائلی بسیار دشوار می‌باشد زیرا گسسته‌سازی آن‌ها منجر به یک سیستم معادلات غیرخطی می‌شوند. برای دیدن چند مثال از چنین مسائلی به [۸] رجوع کنید.

## ۲-۴ برخی از کاربردهای صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس

تحقیقات بر روی مسائل هدایت گرمایی معکوس و استفاده از آن‌ها در کاربردهای صنعتی به دهه‌ی ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بر می‌گردد. از جمله‌ی این کاربردها می‌توان به عملیات و مکانیزم گرمایی آیرودینامیک اشاره کرد. گرمای آیرودینامیکی هواپیما ( فضای درون توربین ) آنقدر بالاست که اندازه‌گیری مستقیم حرارت سطحی آن توسط حسگرها امکان‌پذیر نیست، بنابراین در چنین وضعیتی، حسگرها را زیر سپر تشعشع قرار می‌دهند و درجه حرارت سطح داغ را توسط تحلیل مسائل هدایت گرمایی معکوس تخمین می‌زنند [۳۷، ۳۴، ۱۲].

برخی از کاربردهای مسائل هدایت گرمایی معکوس عبارتند از: تخمین منبع حرارتی پرقدرت [۱] در یک ورقه‌ی پهن یا یک میله، تخمین شرایط سطحی نامعلوم، تخمین خواص فیزیکی مواد از جمله ضریب هدایت گرمایی $k$ و ظرفیت ویژه‌ی گرمایی $\rho c_p$ و تخمین درجه حرارت در موتورهای درون‌سوز. در زیر به معرفی و شرح چند کاربرد صنعتی مسائل هدایت گرمایی معکوس می‌پردازیم.

**تخمین شار گرمایی سطحی در یک شاتل فضایی**

یک موشک فضاپیما یا یک شاتل فضایی که در فضا در حال گردش است را در نظر بگیرید. هدف تخمین شار گرمایی سطح شاتل با استفاده از اندازه‌گیری دمای به‌دست آمده توسط یک حسگر که در موقعیت $x = x_۱$ نصب شده‌است، می‌باشد شکل (۲-۱).

اندازه‌گیری‌ها در لحظه‌های مجزا و گسسته‌ی $t_i$ به‌دست می‌آید، دماهای اندازه‌گیری شده با $y_i$ نمایش داده می‌شوند، مقدار دقیق شار گرمایی سطح را با $q_i$ و شار سطح تخمین زده شده را با $\hat{q}_i$ که متناظر با لحظه‌ی $t_i$ می‌باشد، نشان می‌دهیم.

برای تخمین شار گرمایی در این شاتل، لازم است که یک مدل ریاضی از روند انتقال گرما در دسترس باشد. برای این منظور قسمتی از پوسته را در نظر می‌گیریم و مدل ریاضی مسأله را روی این قسمت پیاده‌سازی می‌کنیم.

---

[۱] Strength of a time-varing heat source