دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

گروههای حلپذیر با فرض۲-اول روی درجات کاراکترهای تحویلناپذیر

استاد راهنما

دکتر کمال عزیزی هریس

استاد مشاور

دکتر رضا نقیپور

پژوهشگر

مینا نصیری

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرّحمن الرّحیم

منت خدای را عزّ و جل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. هر نفسی که فرو میرود ممدّ حیات است و چون بر می آید مفرح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجود است و بر هر نعمتی شکری واجب.

از دست و زبان که برآید   کز عهده شکرش به در آید

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راه پرسیدن را ندانم، صلاح کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما.

تقدیم به:

پدرم، مادرم

بنام خدا

و لَمْ یَشْکُر الْمَخلوق لَمْ یَشْکُر الْخالِقْ.

سپاس و ستایش پروردگار متعال را که به اینجانب توفیق تلاش در راه کسب علم و دانش را عطا فرمود. امیدوارم بتوانم آموخته‌هایم را در راه پیشرفت علمی وطن خویش مورد استفاده قرار دهم.
در آغاز وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر **کمال عزیزی هریس**، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.
از جناب آقای دکتر**رضا نقی‌پور** استاد مشاور این رساله کمال تشکر را دارم.
از جناب آقای دکتر **حسن مهتدیفر** که داوری این رساله را با نهایت دقت و صرف وقت زیاد انجام دادند، تشکر می‌نمایم.

در پایان از کلیه اعضای خانواده‌ام که در تمامی مراحل همواره یار و مشوق من بوده‌اند، سپاسگزاری می‌کنم.

مینا نصیری
شهریور ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: نصیری نام: مینا

عنوان: گروههای حلپذیر با فرض۲-اول روی درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر

استاد راهنما : دکتر کمال عزیزی هریس

استاد مشاور : دکتر رضا نقی‌پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۹۹

کلید واژه‌ها: نظریه کاراکتر، نظریه گروهها، گروههای حلپذیر، درجات کاراکتر، فرض ۲-اول

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی و مطالعه گروههای متناهی حلپذیر که در فرض n-اول صدق می‌کنند، خواهیم پرداخت. در حالتیکه $n = 2$ است، یک کران برای تعداد درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر چنین گروهها پیدا می‌کنیم. ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه حلپذیر باشد بطوریکه G در فرض۲-اول صدق کند و گروه G دارای یک گروه خارج قسمت پوچتوان غیرآبلی باشد، آنگاه

$$| cd(G) | \leq 88.$$

فهرست مطالب

مقدمه

در این پایان‌نامه، که بر اساس مرجع [۱] تهیه و تنظیم شده است، چگونگی اثر ساختار مجموعه‌ی درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر را روی ساختار گروه متناهی G بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم G یک گروه متناهی، $Irr\,(G)$ مجموعه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G و $cd\,(G)$ مجموعه درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G باشد. در این پایان‌نامه، گروههای حلپذیر که در فرض n-اول صدق می‌کنند را در نظر می‌گیریم. اگر n یک عدد صحیح باشد، آنگاه $\omega\,(n)$ نشان دهنده تعداد مقسوم‌علیه‌های اول n (با احتساب تکرار) است و $\omega\,(a,b)$ یعنی $\omega\,(gcd\,(a,b))$. گوییم مجموعه X از اعداد صحیح مثبت در فرض n-اول صدق می‌کند هرگاه بازای هر $a,b \in X$ با $\omega\,(a,b) > n$، داشته باشیم $a = b$. گوییم گروه متناهی G در فرض n-اول صدق می‌کند هرگاه $cd\,(G)$ در فرض n-اول صدق کند. حدس زده شده است که تابع f مستقل از گروه متناهی G موجود است بطوریکه اگر G گروهی حلپذیر باشدکه در فرض n-اول صدق کند، آنگاه $|cd(G)| \leqslant f(n)$. باید توجه کرد که اگر گروه G در فرض۰-اول صدق کند، آنگاه درجات کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G دوبه‌دو نسبت به هم اول خواهند شد و از اینرو لذا طبق مسئله ۱۲.۳ از [۲]، $|cd(G)| \leqslant 3$ و از اینرو $f(0) = 3$. در [۳]، مارک لوئیس [۱] ثابت کرد که $f\,(1) = 9$. قضیه اصلی این پایان‌نامه بیان می‌کند که اگر G یک گروه حلپذیر باشد بطوریکه G در فرض۲-اول صدق کند و گروه G دارای یک گروه خارج قسمت پوچتوان غیرآبلی باشد، آنگاه

$$|\ cd\,(G)\ | \leq 88.$$

قضیه A. فرض کنیم G یک گروه حلپذیر باشد که در فرض۲-اول صدق کند. اگر گروه G

---

[۱] M.Lewis

دارای یک گروه خارج قسمت پوچتوان غیرآبلی باشد، آنگاه $|cd(G)| \leqslant 88$.

فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت و π مجموعه‌ای از اعداد اول و n_π برابر π-قسمت n باشد. فرض می‌کنیم π' متمم مجموعه π در مجموعه اعداد اول باشد. اگر X مجموعه‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد، آنگاه قرار می‌دهیم $X_\pi = \{x_\pi \mid x \in X\}$. گوییم مجموعه X از اعداد صحیح مثبت در (n, π)-فرض صدق می‌کند هرگاه بازای هر $a, b \in X$ که $\omega(a, b) > n$، داشته باشیم $a_{\pi'} = b_{\pi'}$. گوییم گروه متناهی G در (n, π)-فرض صدق می‌کند هرگاه $cd(G)$ در (n, π)-فرض صدق کند. لازم به ذکر است که $(n, \varnothing)$-فرض دقیقا معادل فرض n-اول است. در این پایان‌نامه، همچنین ثابت می‌کنیم که

قضیه B. فرض کنیم G یک گروه حلپذیر باشد که در $(1, \pi)$-فرض صدق می‌کند. در اینصورت

$$| cd(G)_{\pi'} | \leq 3/2 \mid \pi \mid^2 + 19/2 \mid \pi \mid + 18.$$

قضیه C. فرض کنیم G یک گروه حلپذیر و غیرآبلی باشد که در (n, π)-فرض صدق می‌کند. فرض کنیم $K \trianglelefteq G$ ماکزیمال با این خاصیت باشد که G/K غیرآبلی باشد. قرار می‌دهیم $N/K = (G/K)'$. اگر N یک گروه پوچتوان باشد، آنگاه $| cd(G)_{\pi'} | \leq (1 + 2^{2n})^3$.

فصل ۱

مقدمات مورد نیاز

۱.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز از گروهها

دراین بخش، مفاهیم و تعاریف و لم‌ها و قضایایی از گروههای متناهی را که در این پایان‌نامه به آنها نیازمندیم، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱. اگر π زیرمجموعه‌ای از اعداد اول باشد و $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_i^{\alpha_i} \cdots p_k^{\alpha_k}$ بطوریکه $p_1, \cdots, p_i \in \pi$ و $p_{i+1}, \cdots, p_k \in \pi'$، آنگاه $n_\pi = p_1^{\alpha_1} \cdots p_i^{\alpha_i}$ را π-قسمت n می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و Ω یک مجموعه‌ی غیرخالی باشد. گوییم G روی Ω عمل می‌کند هرگاه تابعی مانند $\bullet : \Omega \times G \longrightarrow \Omega$ با ضابطه $\bullet(\alpha, g) = \alpha.g$ موجود باشد بطوریکه

۱- $\alpha.(gh) = (\alpha.g).h$.

۲- $\alpha.(1) = \alpha$.

تعریف ۳.۱.۱. گوییم گروه A روی گروه G بوسیله اتومورفیسم عمل می‌کند هرگاه تابعی مانند $\bullet : G \times A \longrightarrow G$ با ضابطه $\bullet(g.a) = g^a$ موجود باشد بطوریکه

۱- $(gh)^a = (g^a) h^a$.

۲- $g^{ab} = (g^a)^b$.

۳- $g^1 = g$.

مثال ۴.۱.۱. به عنوان مثال برای عمل یک گروه روی یک گروه بوسیله اتومورفیسم، فرض کنیم گروه G یک گروه دلخواه باشد. دراینصورت گروه G روی خودش با تزویج (یعنی اینکه بازای هر $x, g \in G$، $x^g = g^{-1}xg$) عمل می‌کند.

تعریف ۵.۱.۱. گوییم گروه G روی مجموعه‌ی Ω بصورت بدیهی عمل می‌کند هرگاه بازای هر $g \in G$ و $\alpha \in \Omega$ داشته باشیم $\alpha.g = \alpha$.

لم ۶.۱.۱. *فرض کنیم گروه A روی گروه G بوسیله اتومورفیسم عمل می‌کند و $H \le A$ در هسته این عمل باشد. در اینصورت A/H روی گروه G با ضابطه*

$$\forall a \in A, \forall g \in G : g^{Ha} = g^a$$

عمل می‌کند. این عمل را عمل القا شده از A به A/H می‌نامیم.

برهان. کافیست نشان دهیم که این عمل خوشتعریف است. لذا فرض می‌کنیم $a_1, a_2 \in A$ و $Ha_1 = Ha_2$. در اینصورت $a_1a_2^{-1} \in H$ و چون H در هسته عمل A روی G قرار دارد، پس بازای هر $g \in G$ ، $g^{a_1a_2^{-1}} = g$ و لذا $g^{a_1} = g^{a_2}$. درنتیجه طبق تعریف، $g^{Ha_1} = g^{Ha_2}$. □

لم ۷.۱.۱. *فرض کنیم G گروه متناهی، $H, K \le G$ و $(|G:H|, |G:K|) = 1$. در اینصورت $|G:H\cap K| = |G:H||G:K|$.*

برهان. چون $H\cap K \le H \le G$ و $H\cap K \le K \le G$، پس

$$|G:H\cap K| = |G:H||H:H\cap K| \, (*),$$

و $|G:H\cap K| = |G:K||K:H\cap K|$ بنابراین $|G:K|$ مقسوم‌علیه $|G:H||H:H\cap K|$ خواهد بود و چون $(|G:K|, |G:H|) = 1$، پس $|G:K|$ مقسوم‌علیه $|H:H\cap K|$ بوده و به

ویژه $|H:H\cap K|\leq|G:K|$. از طرف دیگر،

$$\varphi:\{(H\cap K)h|h\in H\}\longrightarrow\{Kg|g\in G\}$$

با ضابطه‌ی $\varphi((H\cap K)h)=Kh$ یک تابع ۱-۱ است. زیرا اگر $h_1,h_2\in H$، آنگاه

$$\begin{aligned}(H\cap K)h_1=(H\cap K)h_2 &\Leftrightarrow h_1h_2^{-1}\in H\cap K\\ &\Leftrightarrow h_1h_2^{-1}\in K\\ &\Leftrightarrow Kh_1=Kh_2\\ &\Leftrightarrow \varphi((H\cap K)h_1)=\varphi((H\cap K)h_2)\end{aligned}$$

بنابراین $|G:K|\leq|H:H\cap K|$. در نتیجه $|H:H\cap K|=|G:K|$ و لذا با توجه به $(*)$ خواهیم داشت $|G:H\cap K|=|G:H||G:K|$. □

لم ۸.۱.۱. *فرض کنیم G یک گروه دوری متناهی باشد و $H,K\leq G$، در اینصورت*

$$|G:H\cap K|=lcm(|G:H|,|G:K|).$$

برهان. فرض می‌کنیم $m=(|G:H|,|G:K|)$. چون m یک مقسوم‌علیه $|G|$ است و G گروه دوری است، پس گروه G دارای زیرگروه منحصربفرد از مرتبه $|G|/m$ مانند T است، و لذا $|G:T|=m$. از این نتیجه می‌شود $|H|,|K|\leq|T|$. چون G دوری است، پس G دارای زیرگروه منحصربفرد از مرتبه‌های $|T|,|K|,|H|$ است. بنابراین $H,K\leq T$ و از اینرو نتیجه می‌گیریم که $|G:H|=|G:T||T:H|$ و $|G:K|=|G:T||T:K|$. بنابراین خواهیم داشت $|T:H|=|G:H|/|G:T|=|G:H|/m$ و $|T:K|=|G:K|/|G:T|=|G:K|/m$.

اما $m=(|G:H|,|G:K|)$ و لذا $(|G:H|/m,|G:K|/m)=1$.

بنابراین $(|T:H|,|T:K|)=1$ و با بکار بردن لم ۳.۱.۱، نتیجه می‌گیریم که

$$|T:H\cap K|=|T:H||T:K|.$$

از اینرو چون $H\cap K\leq T\leq G$، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}|G:H\cap K| &= |T:H\cap K||G:T|\\ &= |T:H||T:K||G:T|\\ &= (|G:H|/m)\times(|G:K|/m)\times m\\ &= |G:H||G:K|/m\\ &= |G:H||G:K|/(|G:H|,|G:K|)\\ &= lcm(|G:H|,|G:K|),\end{aligned}$$

و حکم برقرار است. □

تعریف ۹.۱.۱. زیرگروه H از G را یک p-متمم گوییم هرگاه $|G:H|=p^{\alpha}$ و p مقسوم‌علیه $|H|$ نباشد که در آن α یک عدد صحیح نامنفی است.

تعریف ۱۰.۱.۱. زیرگروه L از G را زیرگروه هال گوییم هرگاه $(|L|,|G:L|)=1$.

تعریف ۱۱.۱.۱. گروه G را حلپذیر گوییم هرگاه سری نرمالی مانند $G_0\leq G_1\leq\cdots\leq G_r=G$ وجود داشته باشد بطوریکه بازای هر $1\leq i\leq r$، گروه G_i/G_{i-1} آبلی باشد.

قضیه ۱۲.۱.۱. **(شور-زاسنهاس)** [1] *اگر G گروه متناهی و N زیرگروه نرمال هال G باشد، آنگاه N در G دارای متمم است. بعبارت دیگر، زیرگروه H از G موجود است بطوریکه $G=NH$ و $N\cap H=1$. همچنین اگر N یا G حلپذیر باشند، آنگاه همه متمم‌های N در G مزدوج هستند.*

برهان. رجوع شود به قضیه های ۸.۳ و ۱۲.۳ از مرجع [۵]. □

[1] Schur-Zassenhaus

تعریف ۱.۱.۱۳. فرض کنیم G یک گروه و H زیرمجموعه‌ی غیرتهی آن باشد. در اینصورت عناصری از G را که با تمام اعضای H جابه‌جا می‌شوند را مرکزساز H در G می‌نامیم و با $C_G(H)$ نشان می‌دهیم و داریم $C_G(H) = \{g \in G \mid \forall h \in H, gh = hg\}$.

تعریف ۱.۱.۱۴. گوییم G روی Ω بصورت متعدی عمل می‌کند هرگاه بازای هر $\alpha \in \Omega$،

$$\Omega = O_\alpha = \{\alpha.g \mid g \in G\}$$

و یا

$$\forall \alpha, \beta \in \Omega \exists g \in G; \alpha^g = \beta.$$

تعریف ۱.۱.۱۵. اگر A گروه متناهی و Ω مجموعه‌ای غیرخالی باشد بطوریکه A روی Ω عمل می‌کند، آنگاه گوییم عنصر $\alpha \in \Omega$ تحت A پایا است هرگاه بازای هر $a \in A$ داشته باشیم $\alpha.a = \alpha$.

لم ۱.۱.۱۶. **(گلابرمن)** [۲] *فرض کنیم گروه A روی گروه G بوسیله اتومورفیسم عمل می‌کند، $(|A|, |G|) = 1$. و حداقل یکی از گروههای A یا G حلپذیر باشد. همچنین فرض می‌کنیم که A و G هر دو روی مجموعه Ω عمل می‌کنند بطوریکه عمل G متعدی است. اگر*

$$\forall (\alpha \in \Omega, a \in A, g \in G); (\alpha.g).a = (\alpha.a).g^a,$$

آنگاه

۱- *عنصر $\alpha \in \Omega$* **موجود** *است که A-پایا است یعنی بازای هر $a \in A$، $\alpha.a = \alpha$.*

۲- *اگر $\alpha, \beta \in \Omega$ هر دو A-پایا باشند، آنگاه* **وجود دارد** *$c \in C_G(A)$ بطوریکه $\alpha.c = \beta$.*

برهان. رجوع شود به لم ۳.۲۴ از مرجع [۵]. □

تعریف ۱.۱.۱۷. فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد. گوییم G آبلی مقدماتی است هرگاه آبلی بوده و هر عضو غیرهمانی آن از مرتبه عدد اول p باشد.

[۲] Glauberman's

تعریف ۱.۱.۱۸. گروه متناهی G را گروه فروبینیوس گوییم هرگاه زیرگروه $1 < H < G$ از G با این شرط موجود باشد که بازای هر $g \in G - H$ داشته باشیم $H \cap H^g = 1$. در اینصورت H را متمم فروبینیوس در G گوییم. ثابت می‌شود که

$$\exists K \trianglelefteq G, G = HK, H \cap K = 1.$$

K هسته فروبینیوس نامیده می‌شود و در این حالت گفته می‌شود G روی K شکافته می‌شود.

قضیه ۱.۱.۱۹. *فرض کنیم $K \trianglelefteq G$ بطوریکه G/K گروه فروبینیوس با هسته N/K باشد که در آن N/K یک p-گروه آبلی مقدماتی است. همچنین فرض کنیم $\psi \in Irr\,(N)$. در اینصورت یکی از شرایط زیر اتفاق خواهد افتاد*

۱- $|\,G:N\,|\,\psi\,(1) \in cd\,(G)$

۲- $V\,(\psi) \subseteq K$ *که در آن* $V\,(\psi) = \langle n \in N \mid \psi\,(n) \neq 0\rangle$ *و* $|\,N:K\,|$ *مقسوم‌علیه* $\psi\,(1)^2$ *خواهد شد.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۴.۱۲ از مرجع [۲]. □

قضیه ۱.۱.۲۰. **(ایتو)** [۳] *اگر $A \trianglelefteq G$ آبلی باشد، آنگاه برای هر $\chi \in Irr\,(G)$، $\chi\,(1)$ مقسوم‌علیه $|\,G:A\,|$ خواهد بود.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۵.۶ از مرجع [۲]. □

تعریف ۱.۱.۲۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه مشتق G را که با $G^{(1)}$ یا G' نشان می‌دهیم بصورت زیر تعریف می‌شود

$$G^{(1)} = G' = \langle [x,y] \mid x,y \in G\rangle = \left\langle x^{-1}y^{-1}xy \mid x,y \in G\right\rangle.$$

و برای هر عدد صحیح $m > 1$، $G^{(m)} = \left(G^{(m-1))'}\right)$.

[۳] Ito's

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم M و N زیرگروههای نرمال از یک گروه G باشند بطوریکه $N \subsetneqq M$. گوییم M/N یک عامل اصلی G است هرگاه M/N زیرگروه نرمال مینیمال G/N باشد. بعبارت دیگر، M/N یک عامل اصلی G است هرگاه بین M و N هیچ زیرگروه نرمال دیگری غیر از M و N نباشد.

تعریف ۲۳.۱.۱. کاراکتر χ از گروه G را خطی گوییم هرگاه $\chi(1) = 1$.

قضیه ۲۴.۱.۱. *اگر G گروه حلپذیری باشد که G' زیرگروه نرمال مینیمال G باشد، آنگاه تمام درجات کاراکترهای غیرخطی G دارای درجات مساوی f هستند و یکی از حالات زیر اتفاق خواهد افتاد*

۱- *G یک p-گروه است و $Z(G)$ دوری بوده و $G/Z(G)$ آبلی مقدماتی از مرتبه f^2 است.*

۲- *G یک گروه فروبینیوس با مکمل آبلی فروبینیوس از مرتبه f است و همچنین G' هسته فروبینیوس است و یک p-گروه آبلی مقدماتی می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به لم ۳.۱۲ از مرجع [۲]. □

قضیه ۲۵.۱.۱. **(فیتینگ):**[۴] *فرض کنیم گروه متناهی A روی گروه متناهی G بوسیله اتومورفیسم عمل کرده و $(|A|,|G|) = 1$. دراینصورت اگر G آبلی باشد، آنگاه $G = [G, A] \times C_G(A)$ که در آن $[G, A] = \langle g^{-1}g^a \mid g \in G, a \in A\rangle$ و $C_G(A) = \{g \in G \mid \forall a \in A : g^a = g\}$ مجموعه نقاط ثابت عمل A روی G می‌باشد.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۴.۳۴ از مرجع [۵]. □

[۴] Fitting

۲.۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز از نظریه کاراکترها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم گروه G متناهی باشد. منظور از یک نمایش مختلط G عبارتست از یک هومومورفیسم گروهی $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ که در آن n یک عدد طبیعی و $GL_n(\mathbb{C})$ گروه ضربی ماتریس‌های $n \times n$ معکوس‌پذیر با درایه‌ها در میدان اعداد مختلط می‌باشد. می‌دانیم $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ یک هومومورفیسم گروهی باشد، آنگاه $\varphi(1) = I_n$ که در آن I_n ماتریس همانی $n \times n$ است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم G گروه متناهی و $\varphi : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ یک نمایش مختلط G باشد در اینصورت کاراکتر پیشنهاد شده توسط φ عبارتست از تابع $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی

$$\chi(g) = Trace(\varphi(g))$$

که در ان $Trace(\varphi(g))$ جمع درایه‌های قطر ماتریس $\varphi(g)$ می‌باشد. باید توجه کرد که

$$\chi(1) = Trace(\varphi(1)) = Trace(I_n) = n.$$

عدد طبیعی $\chi(1)$ را درجه کاراکتر χ گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم χ کاراکتری از گروه G باشد. در اینصورت χ را تحویل‌ناپذیر گوییم هرگاه نتوان χ را بصورت جمع دو کاراکتر دیگر نوشت.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنیم χ کاراکتری از گروه G باشد. در اینصورت

$$ker\chi = \{g \in G \mid \chi(g) = \chi(1)$$

را هسته کاراکتر χ گوییم و آن دقیقا برابر است با هسته نمایشی که χ را پیشنهاد داده است.

تعریف ۵.۲.۱. کاراکتر χ را باوفا گوییم هرگاه $ker\chi = 1$.

تعریف ۶.۲.۱. اگر $\gamma : G \longrightarrow (\mathbb{C} - \{0\}, \times)$ هومومورفیسم بدیهی باشد(یعنی بازای هر $g \in G$، $\gamma(g) = 1$) آنگاه γ یک کاراکتر خطی روی G است و γ را کاراکتر اصلی گوییم و با 1_G نشان

می‌دهیم. بنابراین بازای هر $g \in G$،

$$1_G(g) = \gamma(g) = 1.$$

تعریف ۷.۲.۱. ضرب داخلی دو کاراکتر ψ و χ از گروه G را با علامت $[\chi, \psi]$ نشان می‌دهیم و آن برابر است با

$$[\chi, \psi] = (1/\mid G \mid) \sum_{g \in G} \chi(g) \overline{\psi(g)}.$$

ثابت می‌شود که کاراکتر χ از گروه G تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر $[\chi, \chi] = 1$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم $H \trianglelefteq G$ و $\theta \in \mathrm{Irr}(H)$ و $g \in G$. در اینصورت مزدوج θ در G عبارت است از کاراکتر $\theta^g \in \mathrm{Irr}(H)$ با ضابطه $\theta^g(h) = \theta(ghg^{-1})$. بنابراین G روی $\mathrm{Irr}(H)$ بوسیله تزویج عمل می‌کند.

تعریف ۹.۲.۱. منظور از $Irr(G|\theta)$، مجموعه تمام کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G روی θ می‌باشد که برابر است با

$$\begin{aligned} Irr(G|\theta) &= \{\chi \in Irr(G) \mid [\chi_N, \theta] \neq 0\} \\ &= \{\chi \in Irr(G) \mid [\chi, \theta^G] \neq 0\}. \end{aligned}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم $Irr(G) = \{\chi(1), \cdots, \chi(k)\}$ مجموعه‌ی همه کاراکترهای تحویل‌ناپذیر G باشد و $\chi = a_1\chi_1 + \cdots + a_k\chi_k$ کاراکتری از G باشد که در آن $a_1, \cdots, a_k$ ها اعداد صحیح هستند و همگی با هم صفر نیستند. در اینصورت χ_j را یک موسس تحویل‌ناپذیر χ گوییم هرگاه $a_j = [\chi, \chi_j] \neq 0$.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم G یک گروه متناهی و N یک زیرگروه نرمال G باشد. اگر $\theta \in Irr(N)$ یک کاراکتر تحویل ناپذیر N باشد، آنگاه پایدارساز θ در G عبارت است از

$$I_G(\theta) = \{g \in G \mid \theta^g = \theta\}.$$

قضیه ۱۲.۲.۱. *اگر $G \triangleleft N$ باشد بطوریکه G/N دوری و $\theta \in Irr\left(N\right)$، کاراکتری تحویل‌ناپذیر از N باشد، آنگاه θ قابل توسیع به کاراکتری از G خواهد شد.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۷.۶ از مرجع [۲]. $\square$

قضیه ۱۳.۲.۱. ***(کلیفورد)*** [۵] *اگر $G \triangleleft H$ و $\chi \in Irr\left(G\right)$ باشد و θ موسس تحویل‌ناپذیر χ_H است، با فرض اینکه $\theta = \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ مزدوجهای متمایز θ در G هستند، آنگاه $\chi_H = e\sum_{i=1}^{k}\theta_i$ که در آن $e = [\chi_H, \theta]$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۳.۶ از مرجع [۲]. $\square$

قضیه ۱۴.۲.۱. ***(تناظر کلیفورد)*** *فرض کنیم $G \triangleleft H$، $\theta \in Irr\left(H\right)$ و $T = I_G\left(\theta\right)$ پایدارساز θ در G باشد، با فرض*

$$\boldsymbol{A} = \{\psi \in Irr\left(T\right) | [\psi_H, \theta] \neq 0\}$$

و

$$\boldsymbol{B} = \{\chi \in Irr\left(G\right) | [\chi_H, \theta] \neq 0\}$$

در اینصورت

۱- *اگر $\psi \in \boldsymbol{A}$، آنگاه ψ^G تحویل‌ناپذیر است.*

۲- *نگاشت $\psi \longrightarrow \psi^G$ دوسویی است.*

۳- *اگر $\chi = \psi^G$ بطوریکه $\psi \in \boldsymbol{A}$ باشد، آنگاه ψ موسس تحویل‌ناپذیر منحصربفرد χ_T است که در $\boldsymbol{A}$ واقع می‌شود.*

۴- *اگر $\chi = \psi^G$ بطوریکه $\psi \in \boldsymbol{A}$، آنگاه $[\chi_H, \theta] = [\psi_H, \theta]$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۱.۶ از مرجع [۲]. $\square$

---

[۵] Clifford

قضیه ۱.۲.۱۵. **(گلکر)** [۶] *فرض کنیم G یک گروه متناهی و N زیرگروه نرمال G باشد. اگر $\chi \in Irr\,(G)$ بطوریکه $\chi_N = \theta \in Irr\,(N)$، آنگاه برای $\beta \in Irr\,(G/N)$ های متمایز، $\beta\chi$ ها کاراکترهای تحویل‌ناپذیری و دوبه‌دو متمایزی هستند و همه موسس‌های تحویل‌ناپذیر θ^G می‌باشند.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۶.۱۷ از مرجع [۲]. □

لم ۱.۲.۱۶. *فرض کنیم G یک گروه متناهی و N زیرگروه نرمال G باشد. اگر $\chi \in Irr\,(G)$ و $\theta \in Irr(N)$ موسس تحویل‌ناپذیر χ_N باشد، آنگاه $\chi\,(1)\,/\theta\,(1)$ مقسوم‌علیه $|\,G:N\,|$ است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۱۱.۲۹ از مرجع [۲]. □

قضیه ۱.۲.۱۷. *اگر H یک زیرگروه نرمال G ، $\chi \in Irr(G)$ و $\theta \in Irr(H)$ موسس تحویل‌ناپذیر χ_H باشد، آنگاه $\theta\,(1)$ یک مقسوم‌علیه $\chi\,(1)$ است.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۶.۳ از مرجع [۲]. □

قضیه ۱.۲.۱۸. *اگر $N \lhd G$ بطوریکه برای هر $1 \neq x \in N$، $C_G\,(x) \subseteq N$ آنگاه*

۱- *برای هر $1_N \neq \varphi \in Irr\,(N)$ ، **خواهیم داشت** $\varphi^G \in Irr\,(G)$ و $I_G\,(\varphi) = N$.*

۲- *برای $\chi \in Irr\,(G)$ با $N \subsetneq ker\chi$ ، **خواهیم داشت** $\varphi \in Irr\,(N)$ **موجود است بطوریکه** $\chi = \varphi^G$.*

برهان. رجوع شود به قضیه ۶.۳۴ از مرجع [۲]. □

تعریف ۱.۲.۱۹. فرض کنیم G گروه متناهی باشد. تابع $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک تابع کلاسی روی G گوییم هرگاه بازای هر $g, h \in G$، داشته باشیم $\varphi\,(g^h) = \varphi\,(h^{-1}gh) = \varphi\,(g)$.

لم ۱.۲.۲۰. ***(تقابل فروبینیوس):*** [۷] *اگر $H \leq G$ باشد بطوریکه φ تابع کلاسی روی H و θ تابع کلاسی روی G باشد، آنگاه $[\varphi, \theta_H] = [\varphi^G, \theta]$.*

---

[۶] Gallagher

[۷] Frobenius Reciprocity

برهان. رجوع شود به قضیه ۵.۲ از مرجع [۲]. □