



دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد  
گرایش سازه و بدنه خودرو

عنوان:

# تحلیل ترموالاستیسیته کوپل در استوانه FGM مقارن

استاد راهنما:

دکتر محمد شرعیات

دانشجو:

سمیرا شیری

۸۷۰۳۰۵۴

زمستان ۱۳۸۹

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## چکیده

در پایان نامه حاضر، به بررسی میدان‌های دما، جابه‌جایی و تنش که در اثر اعمال بارهای ترمومکانیکی در استوانه‌هایی از جنس مواد FGM و مواد همگن پدید می‌آید، پرداخته شده است. بررسی‌های انجام شده بر اساس معادلات حاکم به دو دسته مسائل کوپل و دی‌کوپل تقسیم بندی شده‌اند. در سیستم معادلات دی-کوپل اغلب بررسی‌ها بر تاثیر تابع خصوصیات ماده و مستقل یا وابسته در نظر گرفتن خصوصیات مواد به دما، بر میدان‌های دما و تنش معطوف شده است. در بخش مرتبط با معادلات کوپل تنش‌های پدید آمده در اثر بارهای ناگهانی حرارتی با توجه به اندرکنش آثار حرارتی و تنشی و توجه به ویژگیهای موجی انتشار گرما و تنش مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در این پایان نامه ابتدا فرمولاسیون سه تئوری عمده و معروف ترموالاستیسیته هایپربولیک که توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف نموده، در قالب یک فصل با جزئیات کامل استخراج می‌گردد. در گام بعدی با توجه به هندسه مورد بررسی سیستم معادلات دی‌کوپل و کوپل برای مختصات استوانه‌ای استخراج شده‌اند. همچنین علاوه بر معرفی تابع تعریف شده برای خصوصیات مواد FGM، کلیه معادلات برای مواد همگن و FGM ارائه شده‌اند. پس از تعیین سیستم معادلات حاکم به روش‌های عددی به کار رفته در حل این معادلات خواهیم پرداخت. برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم، روش اجزا محدود برای محاسبه‌ی مشتقات مکانی، روش گوس-لژاندر برای انتگرال‌گیری عددی مکانی و روش نیومارک برای انتگرال‌گیری عددی زمانی به کار برده شده‌اند. همچنین در این بخش به نحوه اعمال شرایط مرزی دمایی و تنشی مختلف بر سیستم معادلات حاکم و چگونگی تعریف آن‌ها پرداخته شده است. و در نهایت نتایج به صورت نمودارهای توزیع دما، جابه‌جایی و تنش ارائه شده و ضمن تحلیل نتایج، به توجیه اتفاقاتی که روی نمودارها رخ داده‌اند پرداخته شده است.

## فهرست مطالب

<u>صفحه</u>	<u>عنوان مطالب</u>
1	1- مقدمه و مروری بر پژوهش‌های انجام شده
2	1-1- مقدمه
5	1-2- پژوهش‌های مرتبط با تئوری‌های ترموالاستیسیته
7	1-3- پژوهش‌های مرتبط با مواد FGM
9	1-4- پژوهش‌های صورت گرفته برای تحلیل ترموالاستیک استوانه
18	2- تئوری‌های ترموالاستیسیته کوپل
19	2-1- مقدمه
19	2-2- تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک (CTE)
21	2-2-1- تقریب خطی
23	2-2-2- معادلات ترموالاستیسیته کلاسیک برای جسم همسانگرد
23	2-3- تئوری ترموالاستیسیته با زمان وارهیدگی (L-S)
32	2-4- تئوری ترموالاستیسیته وابسته به نرخ دما (G-L)
39	2-5- تئوری ترموالاستیسیته بدون اتلاف انرژی (G-N)
45	2-6- جمع‌بندی
47	3- معادلات حاکم بر رفتار ترموالاستیک استوانه جدار ضخیم
48	3-1- مقدمه
48	3-2- معادلات حاکم برای ماده FGM
50	3-3- استخراج معادلات حاکم بر ترموالاستیسیته غیرکوپل
50	3-3-1- معادله انرژی
52	3-3-2- معادله حرکت
54	3-3-3- دستگاه معادلات حاکم
54	3-4- استخراج معادلات حاکم بر ترموالاستیسیته کوپل
55	3-4-1- معادلات پایه ترموالاستیسیته کوپل جامع
56	3-4-3- ترموالاستیسیته کوپل جامع در استوانه FGM
58	3-4-3- ترموالاستیسیته کوپل جامع در استوانه همگن
60	4- فرم اجزا محدود معادلات حاکم بر رفتار ترموالاستیک استوانه جدار ضخیم
61	4-1- مقدمه

61	4-2- روش‌های عددی بکاربرده شده
61	4-2-1- روش اجزا محدود
63	4-2-2- روش انتگرالگیری عددی زمانی
63	4-2-3- روش محاسبه عددی انتگرال‌های مکانی
64	4-3- الگوریتم حل
64	4-3-1- دستگاه معادلات غیرکوپل
67	4-3-2- دستگاه معادلات کوپل
71	4-4- شرایط مرزی

## 76-5- ارائه و بحث نتایج عددی

77	5-1- مقدمه
77	5-2- نتایج حاصل از سیستم معادلات غیرکوپل
80	5-2-1- بررسی تاثیر وابستگی یا عدم وابستگی خصوصیات ماده به تغییرات میدان دما
81	5-2-2- بررسی تاثیر توزیع دما بر متغیرهای مسئله
81	5-2-3- بررسی تغییرات خواص مواد در جهت شعاعی
87	5-2-4- بررسی شرط مرزی فشاری غیرصفر
88	5-3- نتایج حاصل از معادلات ترموالاستیسیسته کوپل
89	5-3-1- بررسی انتشار موج دما و تنش در مواد FGM
89	5-3-1-1- بررسی موج دما و تنش ایجاد شده بواسطه بارهای حرارتی بسیار بزرگ
93	5-3-1-2- بررسی موج دما و تنش ایجاد شده بواسطه شوک حرارتی

## 121-6- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

122	6-1- نتیجه‌گیری
124	6-2- ارائه پیشنهادات

125

مراجع

## فهرست شکل‌ها

- شکل 1-2: المانی از جسم با شار حرارتی یک‌بعدی 26
- شکل 1-3: گرمای ورودی به المان و خروجی از آن 51
- شکل 2-3: تنش‌های وارده بر وجوه المان 52
- شکل 1-5: شرایط مرزی دمایی در سطح داخلی استوانه برای تحقیق وانگ 2004 94
- شکل 2-5: مقایسه تغییرات توزیع دما (خصوصیات مواد مستقل از تغییرات دما) 94
- شکل 3-5: مقایسه تغییرات توزیع دما (خصوصیات مواد وابسته به تغییرات دما) 95
- شکل 4-5: مقایسه تغییرات توزیع تنش محیطی (خصوصیات مواد مستقل از تغییرات دما) 95
- شکل 5-5: مقایسه تغییرات توزیع تنش محیطی (خصوصیات مواد وابسته به تغییرات دما) 96
- شکل 6-5: شماتیک دوبعدی استوانه جدار ضخیم FGM و شرایط مرزی اعمالی 96
- شکل 7-5: مقایسه توزیع دما (تاثیر وابستگی خواص مواد به تغییرات توزیع دما) 97
- شکل 8-5: مقایسه توزیع جابجایی شعاعی (تاثیر وابستگی خواص مواد به تغییرات توزیع دما) 97
- شکل 9-5: مقایسه توزیع تنش شعاعی نقطه میانی استوانه (تاثیر وابستگی خواص مواد به تغییرات توزیع دما) 98
- شکل 10-5: مقایسه توزیع تنش محیطی نقطه میانی استوانه (تاثیر وابستگی خواص مواد به تغییرات توزیع دما) 98
- شکل 11-5: مقایسه توزیع تنش شعاعی نقطه میانی استوانه (بررسی تاثیر بزرگی توزیع دما بر متغیرهای مسئله) 99
- شکل 12-5: مقایسه توزیع تنش محیطی نقطه میانی استوانه (بررسی تاثیر بزرگی توزیع دما بر متغیرهای مسئله) 99
- شکل 13-5: مقایسه توزیع دما (بررسی نوع قرار گرفتن مواد از سمت شعاع داخلی به سمت شعاع خارجی) 100
- شکل 14-5: نمای سه بعدی تغییرات جابجایی شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله پنجم) 101
- شکل 15-5: نمای سه بعدی تغییرات جابجایی شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله ششم) 101
- شکل 16-5: نمای سه بعدی تغییرات جابجایی شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله هفتم) 102
- شکل 17-5: نمای سه بعدی تغییرات جابجایی شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله هشتم) 102
- شکل 18-5: تغییرات توزیع تنش شعاعی (مسئله پنجم) 103

- 103 شکل 5-19: تغییرات توزیع تنش شعاعی (مسئله ششم)
- 104 شکل 5-20: تغییرات توزیع تنش شعاعی (مسئله هفتم)
- 104 شکل 5-21: تغییرات توزیع تنش شعاعی (مسئله هشتم)
- 105 شکل 5-22: تغییرات توزیع تنش محیطی (مسئله پنجم)
- 105 شکل 5-23: تغییرات توزیع تنش محیطی (مسئله ششم)
- 106 شکل 5-24: تغییرات توزیع تنش محیطی (مسئله هفتم)
- 106 شکل 5-25: تغییرات توزیع تنش محیطی (مسئله هشتم)
- 107 شکل 5-26: مقایسه تغییرات توزیع دما (بررسی تاثیر توان تابع خصوصیات مواد (g))
- 107 شکل 5-27: مقایسه تغییرات توزیع جابجایی شعاعی (بررسی تاثیر توان تابع خصوصیات مواد (g))
- 108 شکل 5-28: مقایسه تغییرات توزیع تنش شعاعی (بررسی تاثیر توان تابع خصوصیات مواد (g))
- 108 شکل 5-29: مقایسه تغییرات توزیع تنش محیطی (بررسی تاثیر توان تابع خصوصیات مواد (g))
- 109 شکل 5-30: مقایسه تغییرات توزیع جابجایی شعاعی (بررسی شرط مرزی فشاری غیرصفر)
- 109 شکل 5-31: نمای سه بعدی تغییرات جابجایی شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله دهم)
- 110 شکل 5-32: نمای سه بعدی تغییرات جابجایی شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله یازدهم)
- 110 شکل 5-33: مقایسه تغییرات توزیع تنش شعاعی (بررسی شرط مرزی فشاری غیرصفر)
- 111 شکل 5-34: نمای سه بعدی تغییرات تنش شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله دهم)
- 111 شکل 5-35: نمای سه بعدی تغییرات تنش شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله یازدهم)
- 112 شکل 5-36: مقایسه تغییرات توزیع تنش محیطی (بررسی شرط مرزی فشاری غیرصفر)
- 112 شکل 5-37: نمای سه بعدی تغییرات تنش محیطی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله دهم)
- 113 شکل 5-38: نمای سه بعدی تغییرات تنش شعاعی تمامی نقاط در تمامی زمان‌ها (مسئله یازدهم)
- 113 شکل 5-39: نحوه اعمال شار حرارتی وارده بر سطح داخلی استوانه
- 114 شکل 5-40: چگونگی تغییر نسبت حجمی در امتداد ضخامت استوانه برای توان‌های مختلف تابع خواص
- 114 شکل 5-41: توزیع دما در طول ضخامت استوانه (بررسی تاثیر توان تابع خواص مواد)

- 115 شکل 5-42 : چگونگی انتشار موج گرما برای  $g=1$
- 115 شکل 5-43 : توزیع جابجایی شعاعی در طول ضخامت استوانه (بررسی تاثیر توان تابع خواص مواد)
- 116 شکل 5-44 : چگونگی انتشار موج جابجایی شعاعی برای  $g=1$
- 116 شکل 5-45 : چگونگی انتشار موج تنش شعاعی برای  $g=1$
- 117 شکل 5-46 : چگونگی انتشار موج تنش محیطی برای  $g=1$
- 117 شکل 5-47 : چگونگی انتشار موج تنش محوری برای  $g=1$
- 118 شکل 5-48 : نحوه اعمال شوک حرارتی وارده بر سطح داخلی استوانه
- 118 شکل 5-49 : تغییرات دما در طول ضخامت استوانه (بررسی تاثیر توان تابع خواص مواد)
- 119 شکل 5-50 : چگونگی انتشار موج گرما برای  $g=1$
- 119 شکل 5-51 : تغییرات جابجایی شعاعی در طول ضخامت استوانه (بررسی تاثیر توان تابع خواص مواد)
- 120 شکل 5-52 : چگونگی انتشار موج جابجایی شعاعی برای  $g=5$



## فهرست جداول

- 50 جدول 3-1: ضرایب تغییرات خواص با دما برای مواد تشکیل دهنده‌ی FGM
- 78 جدول 5-1: خواص و ضرایب تغییرات خواص با دما برای مواد تشکیل دهنده‌ی FGM در تحقیق وانگ 2004
- 79 جدول 5-2: مسائل مختلف بررسی در بخش سیستم معادلات دی‌کوپل
- 79 جدول 5-3: خواص و ضرایب تغییرات خواص با دما برای مواد تشکیل دهنده‌ی FGM

## فهرست نمادها

بردار نیروی خارجی بر واحد جرم	$b$
ظرفیت گرمایی ویژه	$c$
سرعت انتشار موج طولی	$Cl$
تانسور الاستیسیته	$C_{ijkl}$
تانسور نرخ تغییر شکل	$\bar{D}$
تانسور کرنش Green	$e_{ij}$
کرنش بی‌نهایت کوچک	$E$
تابع انرژی آزاد ویژه	$f$
تابع انرژی آزاد هلمهولتز	$F$
تانسور گرادیان تغییر شکل	$\bar{F}$
گرادیان دما	$\bar{g}$
عدد Biot	$h$
تابع پله واحد Heaviside	$H(t)$
انرژی ذاتی بر واحد جرم	$I$
ناوردهای تانسور کرنش	$I_\varepsilon, II_\varepsilon, III_\varepsilon$
ژاکوبین تغییر شکل	$J$
ضریب هدایت حرارتی	$k$
تانسور هدایت حرارت	$k_{ij}$
تابع شکلی المان	$N$
بردار شار آنتروپی	$p$
بردار شار حرارتی	$q$
نرخ تولید حرارت	$Q$
نرخ انتقال حرارت بر واحد جرم	$r$
نرخ تولید انرژی بر واحد جرم	$R$
متغیر لاپلاس در حوزه فرکانسی	$s$
بردار هدایت الاستیک	$s$
تانسور دوم تنش Piola-Kirchoff	$s_{ij}$
آنتروپی بر واحد جرم	$S$
زمان	$t$
زمان وارهدگی برای تئوری G-L	$t_1, t_2$
دمای مطلق	$\square$

تانسور تنش	$\mathbf{T}$
دمای مرجع	$T_0$
بردار جابجایی	$u_i$
انرژی درونی بر واحد جرم	$U$
سرعت انتشار گرما	$v_T$
تانسور سرعت	$\bar{W}$
مختصات نقاط درون فضای تغییرشکل نیافته	$x_i$
بردار نیروی حجمی بر واحد حجم	$\mathbf{X}$
ضریب انبساط حرارتی خطی ماده	$\alpha$
گرادیان جابجایی حرارتی	$\boldsymbol{\beta}$
ضریب انبساط حجمی	$\beta^*$
تانسور ترموالاستیسیته	$\beta_{ij}$
مدول تنش - دما	$\gamma$
دلتای کرونیگر	$\delta_{lm}^{ij}, \delta_{lmn}^{ijk}$
انرژی داخلی ویژه	$\varepsilon$
تانسور کرنش Cauchy	$\varepsilon_{ij}$
دانسیته آنتروپی بر واحد جرم	$\eta$
جابجایی حرارتی	$\vartheta$
دمای اولیه	$\theta_0$
ضریب هدایت حرارتی	$\kappa$
ثابت لامه	$\lambda$
ثابت لامه	$\mu$
نرخ داخلی تولید آنتروپی بر واحد جرم	$\xi$
دانسیته جرمی	$\rho$
تانسور تنش Cauchy	$\sigma_{ij}$
زمان وارهدگی برای تئوری L-S	$\tau$
ضریب هدایت حرارتی	$\chi$



فصل اول

**مقدمه**

**و**

**مروری بر پژوهش‌های**

**انجام شده**

## 1-1 مقدمه

مسأله پیش‌بینی تنش‌های حرارتی محیط‌های ترموالاستیک بدلیل اهمیت تبعات احتمالی آن توجه پژوهشگران طبیعت الاستیک را در حوزه‌های علوم و مهندسی به خود جلب کرده است. پیشرفت علم و تکنولوژی در صناعی همچون هوافضا بخصوص در ارتباط با سرعت‌های مافوق صوت اجسام پرنده، تکنولوژی اتمی خصوصاً اطراف رآکتورها، تکنولوژی لیزر و گسترش روزافزون حوزه‌های کاربرد آن و موارد دیگر، ضرورت بررسی مسائل ترموالاستیسیته را توجیه می‌کند. از آنجا که اجزا استوانه‌ای شکل به دلیل قابلیت بالای تحمل فشار، بارهای شعاعی و گرادیان‌های شعاعی متاثر از تغییرات میدان دما کاربردهای بسیار زیادی دارند، مسئله بررسی میدان‌های تنش در آن‌ها از اهمیت قابل توجهی برخوردار می‌باشد. از طرفی لزوم استفاده از موادی که بتوان در آن‌ها توزیع تنش یا توزیع دمای دلخواه را بنابر شرایط حاکم ایجاد نمود سبب گسترش روز افزون کاربرد موادی به نام FGM گشت. این مواد با هدف پاسخگویی به نیازهای بشر به موادی که دارای ویژگی‌های کنترل‌پذیر باشند، در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. که در ادامه به بررسی پژوهش‌های انجام شده بر روی تئوری‌های ترموالاستیسیته، مواد FGM و سازه‌های استوانه پرداخته خواهد شد.

مسائل ترموالاستیسیته را می‌توان به دو دسته کلی مسائل کوپل و غیرکوپل طبقه‌بندی کرد. که در مسائل ترموالاستیسیته غیرکوپل میدان دما مستقل از میدان جابجایی بوده و می‌توان با حل مستقل آن و محاسبه میدان دما، میدان جابجایی را محاسبه نمود. در رابطه با میدان‌های غیرکوپل کارهای متنوعی انجام شده است. اما در اغلب کارهای انجام شده از وابستگی خصوصیات ترمومکانیکی مواد به دما صرف‌نظر شده که این فرض در اختلاف دماهای بزرگ سبب بروز خطای قابل توجهی در نتایج حاصل می‌گردد. در کار کنونی سعی شده تا تحلیلی نسبتاً جامع از رفتار دینامیکی استوانه‌های جدارضخیم FGM و همگن تحت بارهای حرارتی و مکانیکی با در نظر گرفتن وابستگی خواص به دما جهت نزدیک‌تر شدن مدل به واقعیت و بهبود دقت نتایج، انجام گیرد. در این بررسی بارگذاری‌های مختلف حرارتی و مکانیکی در نظر گرفته شده و توزیع دما، جابجایی، تنش‌های شعاعی و تنش‌های محیطی دست آمده است. دسته دوم مسائل، مسائل ترموالاستیسیته

کوپل می‌باشند. که در این مسائل میدان‌های دما و تنش به یکدیگر وابسته بوده و امکان حل مستقل هیچ یک از آن‌ها وجود ندارد. چنین شرایطی زمانی ایجاد می‌گردد که نرخ تغییرات زمانی بار اعمالی بر سیستم با فرکانس طبیعی سیستم قابل قیاس باشد و یا بار اعمالی بر سیستم بسیار بزرگ باشد. برای حل بررسی میدان‌های کوپل دما و جابجایی تئوری‌های مختلفی وجود دارد. اولین تئوری، تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک می‌باشد، که بر پایه تئوری کلاسیک هدایت حرارت بنا نهاده شده است. در این تئوری بدلیل سهمی (پارابولیک) بودن نوع معادله انتقال حرارت، سرعت انتشار سیگنال حرارتی، نامحدود پیش بینی می‌شود؛ به عبارت دیگر طبق این تئوری، اگر جسم هادی تحت اعمال یک تحریک گرمایی ناگهانی قرار گیرد، اثرات این تحریک بطور آنی در فواصل بسیار دور از منبع حرارت احساس خواهد شد. این پیش‌بینی از دید فیزیکی غیر واقعی انگاشته می‌شود. در طول نیم‌قرن گذشته تئوری‌های غیر کلاسیک ترموالاستیسیته شکل گرفته‌اند که معادله انتقال حرارت آنها از نوع هذلولی (هایپربولیک) می‌باشد. آنها بر خلاف تئوری کلاسیک، انتشار گرما را موجی در نظر می‌گیرند و سرعت محدود برای آن پیش بینی می‌کنند. این تئوری-های غیر کلاسیک تحت عنوان تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته یا هایپربولیک شناخته می‌شوند. تحقیقات فراوانی در طول دهه‌های گذشته، به دنبال شکل‌گیری تئوری‌های مدرن در زمینه حل مسائل کوپل صورت گرفته است. حلهای تحلیلی یک‌بعدی تقریباً برای همه تئوری‌های معروف در دست می‌باشد؛ ولی تعداد حلهای خصوصی با شرایط مرزی تعریف شده، محدود و مربوط به مسائل با شرایط مرزی ساده‌تر می‌باشد. از طرفی اغلب مسائل برای مواد همگن حل شده‌اند. همچنین مسائل حل شده برای مواد FGM بسیار محدود بوده و در اغلب حل‌های موجود برای مواد FGM از روش لایه‌لایه نمودن میدان حل استفاده می‌گردد. در این روش میدان حل به تعدادی زیر لایه تقسیم می‌شود و فرض می‌گردد که در هر لایه خصوصیات ماده ثابت است. پیوستگی لایه‌ها در این روش با وارد نمودن شروط پیوستگی تنش و انتقال حرارت بین لایه‌ها برقرار می‌گردد. اما در حل حاضر میدان حل به شکل پیوسته در نظر گرفته شده و کلیه مشتقات مواد به صورت تحلیلی محاسبه شده‌اند. اشکال این کار ایجاد انتگرال‌هایی است برای محاسبه

ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی که حل تحلیلی آن‌ها بسیار مشکل می‌باشد. در این پایان‌نامه این انتگرال‌ها با روش عددی گوس-لژاندر محاسبه شده‌اند.

فرض‌های اساسی صورت گرفته در این پایان‌نامه از این قرار خواهند بود. ویژگی‌های مکانیکی و حرارتی محیط پیوسته بوده و برای ماده FGM تنها با مکان تغییر می‌کنند. اثر خزش ناچیز است و رفتار مواد آیزوتروپیک و الاستیک خطی می‌باشد. طول استوانه مورد بررسی نامحدود و شرایط کرنش صفحه‌ای بر مسائل حاکم است. همچنین بارهای حرارتی و شرایط مرزی بگونه‌ای است که مسئله علاوه بر تقارن هندسی، تقارن حرارتی نیز دارد.

در پایان‌نامه حاضر، در فصل اول به بررسی پژوهش‌های انجام شده در زمینه تئوری‌های کوپل ترموالاستیسیته هایپربولیک و تحلیل‌های حرارتی و مکانیکی استوانه‌های جدارضخیم تحت بارهای استاتیکی و دینامیکی خواهیم پرداخت.

در فصل دوم فرمولاسیون سه تئوری عمده و معروف ترموالاستیسیته هایپربولیک که توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود معطوف نموده، در قالب یک فصل با جزئیات کامل استخراج می‌گردد.

در فصل سوم با توجه به هندسه مورد بررسی سیستم معادلات دی‌کوپل و کوپل برای مختصات استوانه‌ای استخراج شده‌اند. همچنین علاوه بر معرفی تابع تعریف شده برای خصوصیات مواد FGM، کلیه معادلات برای مواد همگن و FGM ارائه شده‌اند.

در فصل چهارم پس از تعیین سیستم معادلات حاکم به روش‌های عددی به کار رفته در حل این معادلات خواهیم پرداخت. برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم، روش اجزا محدود برای محاسبه مشتقات مکانی، روش گوس-لژاندر برای انتگرال‌گیری عددی مکانی و روش نیومارک برای انتگرال‌گیری عددی زمانی به کار برده شده‌اند. همچنین در این بخش به نحوه اعمال شرایط مرزی دمایی و تنشی مختلف بر سیستم معادلات حاکم و چگونگی تعریف آن‌ها پرداخته شده است.

فصل پنجم نتایج به صورت نمودارهای توزیع دما، جابجایی و تنش ارائه شده و ضمن تحلیل نتایج، به توجیه اتفاقاتی که روی نمودارها رخ داده‌اند پرداخته شده است.

و در فصل ششم نتایج کاربردی بدست آمده از تحلیل‌های انجام شده به اختصار بیان شده و در نهایت پیشنهاداتی که به نظر می‌رسید می‌توانند در آینده انجام گیرند، ارائه شده‌اند.

## 2-1 پژوهشهای مرتبط با تئوری‌های ترموالاستیسیته

تئوری ترموالاستیسیته ترکیبی از تئوری‌های حرارت و الاستیسیته می‌باشد. این تئوری تأثیر میدان دما بر تغییر شکل جسم الاستیک و همچنین تأثیر متقابل تغییر شکل روی میدان دما را مورد توجه قرار می‌دهد. در طول دوران عمر ترموالاستیسیته مدرن پژوهشهای گسترده‌ای، تقریباً در تمام شاخه‌های این علم صورت گرفته است. در این فصل سعی می‌شود ضمن معرفی کارهای مرتبط با این موضوع، اطلاعات جامع و مفیدی از مراجع شناخته شده ارائه گردد.

مبانی تئوری ترموالاستیسیته کوپل کلاسیک در سال ۱۸۳۷ توسط Duhamel [۱] پایه‌گذاری شد و فرمولاسیون این تئوری با در نظر گرفتن قانون دوم ترمودینامیک در سال ۱۹۵۶ توسط Biot [۲] صورت پذیرفت. با وجود این که معادله انرژی در این تئوری ماهیتی پارابولیک داشت اما برای انتشار اختلالات دمایی سرعتی نامحدود قائل می‌شد که از نقطه نظر فیزیکی قابل قبول نبود. اولین بار در سال ۱۸۶۷ مفهوم در نظر گرفتن طبیعت هایپربولیک برای معادله حرارت که سرعتی محدود برای انتشار موج گرما به دنبال داشت توسط Maxwell [۳] پیشنهاد شد و این انتشار موج به نام صدای دوم صوت<sup>۱</sup> معروف گشت.

Peshkov [۴] در سال ۱۹۴۴ اثرات صدای دوم صوت را به صورت عملی در هلیوم مایع مورد بررسی قرار داد و سپس در سال ۱۹۷۴ Tisza [۵] امکان انتشار صدای دوم صوت در داخل هلیوم مایع را به صورت تئوری پیش‌بینی نمود. همچنین در سال ۱۹۶۳ Chester [۶] دلایلی مبنی بر احتمال وجود این پدیده در جامدات ارائه نمود. اغلب تئوری‌هایی که طبیعتی هایپربولیک برای معادله انرژی در نظر می‌گیرند از معادله اصلاح شده انتقال حرارت فوریه منتج می‌گردند. تئوری ترموالاستیسیته به همراه اثرات صدای دوم صوت که توسط Lord و Shulman [۷] در سال ۱۹۶۷ پیشنهاد داده شد یکی از ساده‌ترین این مدل‌هاست که با

---

<sup>۱</sup> Second Sound



معرفی مفهومی به نام زمان وارهدگی<sup>۲</sup> در معادله انتقال حرارت فوریه اصلاح شده بیان شده است. این مدل در سال ۱۹۸۰ توسط Dhaliwal و Sherief [۸] برای مواد ناهمسانگرد بازنویسی شد. در زمینه یکتایی جواب تئوری L-S می‌توان به کارهای Sherief و Dhaliwal [۹، ۸] و Ignaczak [۱۰، ۱۱] اشاره کرد.

Green و Lindsay [۱۲] تئوری ترموالاستیسیته دیگری را که در برگیرنده اثرات صدای دوم صوت بود در سال ۱۹۷۲ فرمول‌بندی نمودند. در این فرمولاسیون جدید نرخ دما به روابط Duhamel-Neumann افزوده شد و برای رابطه آنتروپی دو زمان وارهدگی در نظر گرفته شد. Suhubi [۱۳] نیز در سال ۱۹۷۵ بطور مستقل معادلات این تئوری را استخراج کرد. در زمینه یکتایی جواب تئوری G-L می‌توان به کارهای انجام شده توسط Green و Lindsay [۱۲]، Green [۱۴] و Ignaczak [۱۵] اشاره کرد.

همچنین Green و Naghdi [۱۷، ۱۶] در کارهای انجام شده خود طی سال‌های ۱۹۹۱ و ۱۹۹۳ سه مدل ترموالاستیسیته برای مواد همگن و همسانگرد ارائه نمودند که به صورت مدل‌های I، II و III طبقه‌بندی شدند. در زمینه یکتایی جواب تئوری G-N می‌توان به کارهای Green و Naghdi [۱۷]، Chandrasekharaiah [۱۸] و Chandrasekharaiah [۱۹] اشاره کرد.

تئوری‌های بیان شده در بالا به تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم یافته یا تئوری‌های ترموالاستیسیته با سرعت موج گرمای محدود نیز معروف می‌باشند. تئوری ترموالاستیسیته کلاسیک در مسائل مهندسی گوناگونی قابل به کارگیری است، اما در شرایطی از قبیل اعمال شار حرارتی ناگهانی و یا شرایطی که در آن‌ها طول زمان حالت گذرا کوتاه می‌باشد اثرات صدای دوم صوت از اهمیت قابل توجهی برخوردار می‌باشد. در چنین شرایطی میدان دما که سرعت انتشار محدودی دارد تحت تاثیر میدان الاستیک واقع شده و معادلات ترموالاستیسیته کوپل برای بررسی چنین میدان‌هایی باید به کار گرفته شوند. در ادامه به تعدادی از مقالات علمی که در آنها از تئوری‌های ترموالاستیسیته کوپل استفاده شده است اشاره خواهیم نمود.

---

<sup>۲</sup> Relaxation Time

### 3-1 پژوهشهای مرتبط با مواد FGM

FGM مخفف عبارت Functionally Graded Material بوده و به معنای ماده با توزیع خواص هدفمند می-باشد. بنابه گفته Gasik [۲۰] FGM ماده‌ای است با تغییرات (گرادیان) طراحی شده‌ی ترکیب، با این هدف که کارایی ماده تولیدی نسبت به مواد تشکیل دهنده آن در شرایط مشابه بهبود یابد.

روش‌های تحلیلی و روش‌های اجزای محدود و مدل‌های میکرومکانیکی به وفور برای مدل‌سازی مواد FGM به کار می‌روند [۲۱]. بیشترین موضوعات تحقیق شده در مدل‌سازی عبارتند از: کرنش‌های الاستیک، تنش-های الاستیک، تسلیم و تغییر شکل پلاستیک، خزش در دماهای بالا و انتشار ترک [۲۲ و ۲۳].

مفهوم اولیه‌ی مواد FGM در سال ۱۹۸۴ توسط Niino و همکارانش [۲۴] در لابراتور ملی هوافضای ژاپن، به عنوان یک روش تهیه‌ی مواد برای سپرهای حرارتی<sup>۳</sup> پیشنهاد شد. در این تحقیقات مواد FGM با موفقیت در پوشش‌های سپر حرارتی که در آن‌ها هدف بهبود مقاومت در برابر حرارت، اکسید شدن و خوردگی بود، به کار گرفته شدند. و با گذشت زمان به کارگیری این مواد در حوزه‌های دیگر نیز مورد بررسی قرار گرفت.

در حوزه‌ی ترموالکتریک، مواد FGM (نظیر BiTe/PbFe) در حسگرها (سنسورها) و ترموزنراتورها با گذار فلز- نیمه‌رسانا به کار گرفته شده‌اند و در مواردی خاص بازده تا میزان ۵۰ تا ۱۰۰ درصد در مقایسه با مواد همگن بهبود یافته است [۲۵، ۲۶]. همچنین این مواد در پیل سوختی اکسید جامد<sup>۴</sup> که سیستمی برای تولید انرژی می‌باشد، به کار گرفته شده‌اند و تا حد زیادی سبب بهبود کارایی این قبیل پیل‌ها شده‌اند [۲۷]. مواد FGM می‌توانند در تکنیک‌های ارتباطات و اطلاعات نیز کاربرد داشته باشند. یک FGM کاملاً جدید، به نام فراکتال فوتونی، متشکل از اپکسی به همراه ذره‌های پراکنده‌ی یک سرامیک پایه تیتانیومی، توسط Miyamoto و همکارانش ساخته شد [۲۸، ۲۹]. این ماده می‌تواند امواج الکترومغناطیسی را به شدت در یک

<sup>3</sup> Thermal Barrier Coatings (TBC)

<sup>4</sup> Solid Oxide Fuel Cell

مکعب فراکتال دی‌الکتریک بدون بازتابش یا عبور متمرکز کند. نگرش آینده‌ی این مولفین، استفاده از این تکنولوژی برای به‌دست آوردن یک جاذب الکترومغناطیسی کامل و آنتنی با کارایی بالا بود.

ابزارهای ساینده برای برش فلز و سنگ مثال مهم دیگری هستند که در آن تغییرات در لایه‌ی سطحی کارایی را تا حد قابل قبولی بهبود بخشیده است. علاقه‌ی عمده‌ی صنعت به ابزارهای برشی فلز سخت (WC – Co) بر مبنای سرعت‌های برش بالاتر، تolerانس‌های بهتر و عمر بیشتر ابزار است. تولید مواد FGM، جهت جلوگیری از اعوجاج نمونه، به شناخت و کنترل دقیق فرایندهای سینترینگ نیاز دارد و نشان داده شده است که مدل‌سازی جدید و بهینه‌سازی سینترینگ می‌تواند منجر به تنش‌های کم‌تر و اعوجاج کم‌تر پس از انجام فرایند شود. Gasik و همکارانش [۳۰] از طریق انتخاب مناسب هندسه‌ی اجزا و پارامترهای آغازین موفق شدند که به چنین بهبودی دست یابند.

پیشرفت مهم دیگری که در زمینه‌ی مواد FGM می‌توان به آن اشاره نمود، استفاده از این مواد در زمینه قطعات زیست-پزشکی می‌باشد [۳۱]. آلیاژهای پایه تیتانیومی،  $Al_2O_3$  و YTZP به وفور برای پروتزهای (اندام‌های مصنوعی) ارتوپدی، به‌خصوص پروتزهای مفصل ران به‌کار می‌روند. همچنین در دندان‌پزشکی به منظور ترمیم دندان‌ها، مواد چسب‌دار رزینی دندان‌ی جدیدی ایجاد شده‌اند [۳۲].

مشاهدات در رابطه با مواد FGM نشان می‌دهد که با ایجاد تغییرات (گرادیان) ریز یا درشت ساختاری در ترکیب مواد نه تنها می‌توان تاثیرات نامطلوبی نظیر تمرکز تنش را برطرف نمود بلکه می‌توان کارکرد مثبت منحصر به فردی را نیز فراهم نمود. علی‌رغم نتایج مهم به‌دست آمده، در عمل این مواد به‌طور مناسبی به کار گرفته نمی‌شوند. کمبود پایه‌های تئوریک، روش‌های طراحی مواد و شناخت از چگونگی عملکرد مواد FGM، به‌طور قابل ملاحظه‌ای مانع از به‌کارگیری این مواد در سطح تجاری شده است. به همین دلیل چشم‌انداز آینده بر مبنای کار و آزمایش تجربی بیشتر مستقر شده است.

#### 4-1 پژوهش‌های صورت گرفته برای تحلیل ترموالاستیک استوانه

در این بخش به بررسی کارهای انجام شده در زمینه‌ی تحلیل حرارتی و مکانیکی کوپل و دی‌کوپل استوانه-های جدارضخیم همگن و FGM پرداخته خواهد شد.

Noda و Takeuti [۳۳] در سال ۱۹۷۸ تنش حرارتی گذرا در یک سیلندر با طول نامحدود را با استفاده از توابع Boussinesq-Papkovich مورد بررسی قرار دادند. در این آنالیز سطح استوانه ای سیلندر در دو جهت طولی و پیرامونی تحت اثر یک منبع حرارتی غیر یکنواخت قرار داده شد و نتایج عددی متعددی برای انواع متفاوت منابع حرارتی ارائه گشت.

Misra و Achari [۳۴] در سال ۱۹۸۰ تنش‌های حرارتی در یک سیلندر توخالی غیر همسانگرد که دارای طول محدودی بود، را بررسی نمودند. تنش در این سیلندر در اثر تغییرات دمای متقارن محوری که بر دو انتهای آن وارد می‌شد ایجاد می‌گشت. همچنین سطوح منحنی داخلی و خارجی این سیلندر توسط عایق‌های حرارتی پوشانده شده بود. حل دقیق این مسئله با استفاده از توابع پتانسیل جابه جایی توسعه داده شد و معلوم گشت که بیشترین تنش تحت چنین شرایطی در سطح منحنی داخلی و در دو انتهای سیلندر ایجاد می‌گردد.

Noda و Takeuti [۳۵] در سال ۱۹۸۰ تنش‌های حرارتی گذرای سه بعدی در یک سیلندر مدور با طول محدود را تحت اثر یک توزیع دمایی نامتقارن محوری مورد بررسی قرار دادند. این مسئله با استفاده از توابع Boussinesq اصلاح شده و تابع پتانسیل جابه جایی ترموالاستیک فرمولبندی شد و توسعه حل انجام شده را به شرایط مختلف نامتقارن محوری که بر مرزهای سیلندر وارد می‌شد امکان پذیر نمود.

Li و همکارانش [۳۶] و در سال ۱۹۸۳ یک حل عددی برای مسأله ترموالاستیسیته دینامیکی کوپل در استوانه توخالی بلند ارائه کردند. آنها از یک روش اجزاء محدود استفاده کردند که متغیرهای فضایی و زمانی در آن با چندین روش مش‌بندی شدند و در نهایت روشی مناسب برای المان‌بندی فضایی و زمانی ارائه نمودند. در این بررسی شرایط مرزی داخلی و خارجی استوانه از نوع توزیع دما و تنش سطحی و به صورت توابع پله و پالس اعمال شدند.