دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

میانگین پذیری جانسون برای نیم‌گروه‌های توپولوژیکی

استاد راهنما

دکتر عبدالمحمد فروزانفر

استاد مشاور

دکتر عبدالمحمد امین پور

پژوهشگر

اقدس فرجیان

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: فرجیان   نام: اقدس

عنوان: میانگین پذیری جانسون برای نیم‌گروه‌های توپولوژیکی

استاد راهنما: دکتر عبدالمحمد فروزانفر

استاد مشاور: دکتر عبدالمحمد امین پور

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد   رشته: ریاضی محض   گرایش: آنالیز

دانشگاه: شهید چمران اهواز   دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۱۳۹۲   تعداد صفحات: ۸۹

واژگان کلیدی: میانگین‌پذیری، همریختی متقاطع، نیم‌گروه توپولوژیک

چکیده

در این رساله مفهومی از میانگین‌پذیری را برای نیم‌گروه توپولوژیک تعریف می‌کنیم. نیم‌گروه توپولوژیکی S میانگین‌پذیر جانسون نامیده می‌شود، اگر برای هر $S-$مدول باناخ دوطرفه‌ی E، هر همریختی متقاطع کراندار از S به E^* اصلی باشد. در این رساله نشان می‌دهیم که نیم‌گروه گسسته‌ی S میانگین‌پذیر جانسون است، اگر و فقط اگر $\ell^1(S)$ یک جبر باناخ میانگین‌پذیر باشد. همچنین نشان می‌دهیم که اگر نیم‌گروه توپولوژیکی S، میانگین‌پذیر جانسون باشد، آن‌گاه میانگین‌پذیر است، اما عکس آن درست نیست.

تقدیم به

پدر بزرگوار

و

مادر مهربانم

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند و سلام و دورد بر محمّد و خاندان پاك او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان وامدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...
بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجّل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.
اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر اللّه عزّ و جلّ»
ازپدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند؛
از استاد با کمالات و شایسته؛ جناب آقای دکتر عبدالمحمد فروزانفر که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛
همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر عبدالمحمد امین پور که زحمت مشاوره این رساله را به عهده داشتند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.
باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

اقدس فرجیان
۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۱۹۰۴ برای اولین بار میانگین‌پذیری توسط لبگ [۱] مطرح شد. وی ابتدا این مفهوم را با سوال زیر مطرح کرد.

« آیا تابع مجموعه‌ای و به طور متناهی جمعی که تحت عمل گروه خاصی پایا باشد، وجود دارد؟ »

سپس میانگین‌پذیری را برای گروه‌ها توسعه داد. فون‌نویمان [۲] رده‌ای از گروه‌های میانگین‌پذیر را معرفی کرد. مفهوم میانگین‌پذیری از سال ۱۹۴۰ میلادی به بعد به یکی از مفاهیم مهم آنالیز هارمونیک تبدیل شد. مفهوم میانگین‌پذیری در زمینه‌ی گروه‌های توپولوژی نخستین بار توسط دی تعریف شد. جانسون [۳] در سال ۱۹۷۲ به نتایج مهمی در این زمینه دست یافت.

قضیه جانسون در [۱۲] ثابت می‌کند که گروه موضعاً فشرده هاسدورف G میانگین‌پذیر است اگر و فقط اگر جبر باناخ $L^1(G)$ میانگین‌پذیر باشد. این گزاره برای نیم‌گروه‌های گسسته درست نیست.

دانکن و نامیوکا [۴] در [۸] نشان می‌دهند که اگر $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر باشد، آن‌گاه S میانگین‌پذیر است و برای کلاس وسیعی از نیم‌گروه‌های معکوس S، آن‌ها نشان می‌دهند که $\ell^1(S)$

[۱] Lobesgue
[۲] Von neumann
[۳] B. E. Johnson
[۴] J. Duncan and I. Namioka

میانگین‌پذیر نیست، اگر E_s (مجموعه عناصر خودتوان S) نامتناهی باشد.
امینی در [۲] اخیراً مفهومی از میانگین‌پذیری مدولی را برای جبرهای باناخ تعریف می‌کند و نشان می‌دهد که تحت اعمالی برای نیم‌گروه معکوس S، $\ell^1(S)$ میانگین‌پذیر مدولی است، اگر و فقط اگر S میانگین‌پذیر باشد.
این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌ی میثمی صدر و پورعباس که در سال ۲۰۱۰ به چاپ رسیده، تنظیم و تدوین شده است که در آن مفهومی از میانگین‌پذیری جانسون را برای نیم‌گروه‌های توپولوژیکی تعریف می‌کنیم. خصوصاً نشان می‌دهیم که نیم‌گروه گسسته‌ی S میانگین‌پذیر جانسون است، اگر و فقط اگر $\ell^1(S)$ جبر باناخ میانگین‌پذیر باشد.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

مقدمه

در این فصل به بیان مفاهیم اساسی مورد نیاز و بعضی از قضیه‌ها که در فصل‌های بعد به کار می‌روند می‌پردازیم. تعاریف به منظور معرفی علائم و اصطلاحات و صورت قضایا برای رفع نیاز از مراجعه به منابع مختلف بیان می‌شود. اثبات قضایای معروف اغلب به کتب مربوطه ارجاع داده شده است.

۱.۱ آنالیز تابعی

تعریف ۱.۱.۱. (فضای متری)
یک متر (یا فاصله‌ی) d بر مجموعه‌ی ناتهی X، تابعی است مانند $d : X \times X \to \mathbb{R}$ که از سه خاصیت زیر برخوردار است:

الف) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) \geq 0$ و $x = y \Leftrightarrow d(x,y) = 0$؛

ب) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x,y) = d(y,x)$؛

پ) به ازای هر $x, y, z \in X$، $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (نامساوی مثلثی).

در این صورت، جفت (X, d) یک فضای متری نام دارد.

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. در این صورت، تابع d با تعریف $d(x,y) = 1$، هرگاه $x \neq y$ و $d(x,x) = 0$ یک فاصله بر X است. این فاصله را فاصله‌ی گسسته بر X می‌نامیم. X را با این فاصله یک فضای متری گسسته می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. فضای متری (X, d) را ثابت می‌گیریم. هرگاه $x \in X$، آن‌گاه گوی باز به مرکز x و شعاع $r > 0$ مساوی مجموعه‌ی $B(x,r) = \{y \in X : \ d(x,y) < r\}$ تعریف می‌شود. زیرمجموعه‌ی A از X را باز می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in A$، عددی مانند $r > 0$ چنان باشد که $B(x,r) \subseteq A$.

تعریف ۴.۱.۱. نقطه حدی

نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی حدی مجموعه‌ی A می‌نامیم، هرگاه هر گوی باز $B(x,r)$ شامل عنصری از A، متمایز با x باشد؛ یعنی، برای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$B(x,r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \varnothing.$$

تعریف ۵.۱.۱. در فضای متری (X,d)، مجموعه‌ی $A \subseteq X$ بسته است، اگر و فقط اگر متمم A باز باشد؛ مجموعه‌ی نقاط بسته‌ی A را با $\overline{A}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه چگال

زیرمجموعه A از فضای متری (X,d)، چگال در X نامیده می‌شود، هرگاه $\overline{A} = X$.

قرارداد. منظور از میدان $\mathbb{K}$ مجموعه اعداد مختلط یا میدان اعداد حقیقی است.

تعریف ۷.۱.۱. فضای خطی (برداری)

فرض کنیم $(X,+)$ یک گروه آبلی باشد. X را فضای خطی روی میدان $\mathbb{K}$ گوییم، هرگاه نگاشت $\mathbb{K} \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ دارای ویژگی‌های زیر باشد:

الف) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in X)$؛

ب) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y \quad (\alpha \in \mathbb{K}, x, y \in X)$؛

پ) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{K}, x \in X)$؛

ت) $1x = x \quad (x \in X)$.

تعریف ۸.۱.۱. برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی $A \subseteq X$، مجموعه‌ی همه‌ی ترکیب‌های خطی از بردارهای A را فضای تولید شده توسط A می‌نامیم و با $spanA$ نمایش می‌دهیم.

$$spanA = \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : \ \alpha_i \in \mathbb{C}, \ x_i \in A, \ n \in \mathbb{N}\} \subseteq X.$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد. نرم‌های $\|.\|_1$ و $\|.\|_2$ را معادل می‌نامیم، هرگاه اعداد حقیقی مانند a و b یافت شوند که برای هر $x \in X$،

$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فضای نرم‌دار

تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X را یک نرم نامیم، هرگاه در سه خاصیت زیر صدق نماید:

الف) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$، اگر و تنها اگر $x = 0$؛

ب) به ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$؛

پ) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

فضای برداری X، مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم و با $(X, \|.\|)$ نمایش می‌دهیم. همچنین نرم $\|.\|$ روی X یک متر مانند d به صورت زیر القا می‌کند. برای هر $x, y \in X$،

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

این متر را متر تولید شده به وسیله نرم X می‌نامیم. در نتیجه هر فضای نرم‌دار، یک فضای متری است.

تعریف ۱۱.۱.۱. دنباله‌ی کشی

دنباله (x_n) در فضای متری (X,d) را کشی می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ **عدد طبیعی** $N = N(\varepsilon)$ موجود باشد که برای هر $m,n \in \mathbb{N}$ و $m,n \geq N$ داشته باشیم، $d(x_m,x_n) < \varepsilon$

تعریف ۱۲.۱.۱. فضای کامل

فضای متری (X,d) را کامل گوییم، هرگاه هر دنباله کشی در X، همگرا به نقطه‌ای در X شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. فضاهای باناخ

فضای نرم‌دار $(X,\|.\|)$ را فضای باناخ گوییم، هرگاه تحت متر القایی توسط نرم، کامل باشد.

مثال ۱۴.۱.۱. فضای $C([a,b])$ (فضای تمام توابع پیوسته و حقیقی مقدار روی $[a,b]$) همراه با نرم

$$\|f\| = \sup\{|f(t)| : \ a \leq t \leq b\} \qquad \big(f \in C([a,b])\big)$$

یک فضای باناخ است.

برهان. به [۱۳] قضیه‌ی (۵-۱.۵) مراجعه شود. □

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم $1 \leq p < \infty$، مجموعه ℓ^p را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ell^p = \{(x_n)_1^\infty \subseteq \mathbb{C} : \ \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}.$$

به سادگی ثابت می‌شود که ℓ^p تحت عمل جمع معمولی یک فضای برداری است. نرم روی ℓ^p به صورت زیر است:

$$\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (x = (x_n) \in \ell^p).$$

همچنین ℓ^∞ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ell^\infty = \{(x_n) \subseteq \mathbb{C};\ \exists K \geq 0 : \quad |x_n| \leq K, \quad \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

به سادگی ثابت می‌شود که این فضا یک فضای برداری است. در واقع ℓ^∞ فضای همه‌ی دنباله‌های کراندار از اعداد مختلط است و این فضا با نرم تعریف شده زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_n| : \quad n \in \mathbb{N}\} \qquad (x = (x_n) \in \ell^\infty).$$

قضیه ۱۶.۱.۱. *برای $1 \leq p \leq \infty$، ℓ^p فضایی باناخ است.*

برهان. به [۱۳] قضیه‌ی (۳-۲.۲) مراجعه شود. □

تعریف ۱۷.۱.۱. تابع تصویر

فرض کنیم $\{A_i\}_{i=1}^n$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های ناتهی باشد. در این صورت به ازای هر $1 \leq i \leq n$،

$$\pi_i : A_1 \times A_2 \ldots \times A_n \longrightarrow A_i,$$

$$\pi_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) \ = \ a_i.$$

را تابع تصویری $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ روی مولفه iام می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۸. فضای توپولوژی

فرض کنیم X یک مجموعه و τ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X باشد؛ یعنی، $\tau \subseteq P(X)$. τ را یک توپولوژی روی X خوانیم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\emptyset, X \in \tau$؛

ب) اگر $A, B \in \tau$، آن‌گاه $A \cap B \in \tau$؛

پ) اگر $\{A_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از اعضای τ باشد، آن‌گاه $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

در این صورت گوییم (X, τ) یک فضای توپولوژی یا به اختصار X یک فضای توپولوژی است. همچنین هر عضو از τ مجموعه‌ای باز است.

به عنوان مثال، هرگاه (X, d) یک فضای متری باشد، آن‌گاه خانواده‌ی تمام مجموعه‌های باز در X، یک توپولوژی روی X می‌سازد که آن را توپولوژی تولید شده به وسیله‌ی متر d (یا توپولوژی متری) خوانیم. از این رو هر فضای متری یک فضای توپولوژی است.

تعریف ۱.۱.۱۹. یک فضای توپولوژی را متری پذیر گوییم، هرگاه توپولوژی آن به وسیله یک متر القا شود. برای مثال به توپولوژی القا شده به وسیله متر گسسته روی مجموعه‌ی $P(X)$، توپولوژی گسسته روی X می‌گوییم.

تعریف ۱.۱.۲۰. فضای توپولوژی X را فشرده گوییم، هرگاه هر پوشش باز آن دارای یک زیرپوشش متناهی باشد.

تعریف ۱.۱.۲۱. فضای توپولوژی هاسدورف

فضای توپولوژی (X, τ) رایک فضای هاسدورف می‌نامیم، هرگاه به ازای هر دو نقطه‌ی متمایز x و y متعلق به X، یک همسایگی V برای x و یک همسایگی U برای y، وجود داشته

باشد که $V \cap U = \phi$؛ یعنی، فضای توپولوژی هاسدورف فضایی است که در آن می‌توان هر دو نقطه متمایز را با دو همسایگی مجزا، از هم جدا کرد.

قضیه ۲۲.۱.۱. *فرض کنیم X, Y فضاهای توپولوژی باشند. نگاشت $f : X \longrightarrow Y$ بر X پیوسته است، اگر و تنها اگر به ازای هر زیرمجموعه‌ی باز Y مانند V، $f^{-1}(V)$ یک زیرمجموعه‌ی باز X باشد.*

برهان. به [۱۳] قضیه‌ی (۴-۱.۳) مراجعه شود. □

تعریف ۲۳.۱.۱. جداگانه پیوسته

فرض کنیم $X_1, ..., X_n, Y$ فضاهای توپولوژی باشند. نگاشت $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \longrightarrow Y$ را جداگانه پیوسته گوییم، هرگاه برای هر $i \in \mathbb{N}$ نگاشت $x \longmapsto f(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n)$ از $X_i \longrightarrow Y$، برای هر $(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in \{\prod_{j=1}^{n} X_j \ : \ j \neq i\}$، پیوسته باشد.

تعریف ۲۴.۱.۱. نگاشت خطی

اگر X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، آن‌گاه $T : X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت خطی گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in X$ و هر $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$،

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

مجموعه‌ی تمام نگاشت‌های خطی از X به Y را با نماد $\mathcal{L}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۵.۱.۱. نگاشت دوخطی

اگر X و Y و Z فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند، آن‌گاه نگاشت $T : X \times Y \longrightarrow Z$ را دوخطی گویند، هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ داشته باشیم:

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha T(x_1, y) + \beta T(x_2, y), \qquad (x_1, x_2 \in X, y \in Y);$$

$$T(x, \alpha y_۱ + \beta y_۲) = \alpha T(x, y_۱) + \beta T(x, y_۲), \qquad (x \in X, y_۱, y_۲ \in Y).$$

تعریف ۲۶.۱.۱. نگاشت خطی کراندار

فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌داری باشند. نگاشت خطی $T : X \longrightarrow Y$ را کراندار گوییم، هرگاه $M > ۰$ای موجود باشد که برای هر $x \in X$،

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|.$$

توجه. نگاشت خطی کراندار از X به Y را عملگر خطی کراندار از X به Y نیز می‌گوییم. فضای تمام عملگرهای خطی و کراندار از X به Y را با نماد $\mathcal{B}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. این فضا با عمل جمع و ضرب اسکالر تعریف شده در زیر فضای برداری است.

$$(T_۱ + T_۲)(x) = T_۱(x) + T_۲(x);$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha(T(x)).$$

همچنین، هرگاه $T \in \mathcal{B}(X, Y)$، آن‌گاه نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \ x \in X, \|x\| = ۱\}.$$

از طرفی نرم فوق با نرم‌های زیر معادل است.

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(x)\| : \ x \in X \ , \ \|x\| \leq ۱\} \\ &= \sup\{\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : \ x \in X \ , \ x \neq ۰\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{B}(X, Y)$ با نرم بالا یک فضای نرم‌دار است. در صورتی که $X = Y$ به جای $\mathcal{B}(X, X)$ می‌نویسیم $\mathcal{B}(X)$.

قضیه ۲۷.۱.۱. *اگر Y فضای باناخ باشد، آن‌گاه $\mathcal{B}(X, Y)$ با سوپریمم نرم تعریف شده در تعریف (۲۶.۱.۱) تشکیل یک فضای باناخ می‌دهد.*

برهان. به [۱۳] قضیه‌ی (۲-۲.۱۰) مراجعه شود. □

مثال ۲۸.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. عملگر همانی $I : X \longrightarrow X$ با ضابطه‌ی $I(x) = x$ یک عملگر خطی کراندار است و

$$\|I\| = \sup\{\|I(x)\| : \ x \in X, \quad \|x\| = 1\} = 1.$$

مثال ۲۹.۱.۱. فرض کنیم $X = C[0,1]$ با نرم $\| f \|= \sup\{|f(x)| : \quad 0 \leq x \leq 1\}$ باشد. عملگر $T : X \longrightarrow X$ را با ضابطه‌ی $T(f)(x) = xf(x)$ به ازای هر $f \in C[0,1]$ و $x \in [0,1]$ تعریف می‌کنیم. T یک عملگر خطی است، زیرا به ازای هر $\alpha \in \mathbb{K}$ و $f, g \in X$ داریم:

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g)(x) &= x(\alpha f + g)(x) \\ &= x(\alpha f(x) + g(x)) \\ &= \alpha x f(x) + x g(x) \\ &= \alpha T(f)(x) + T(g)(x) \\ &= (\alpha T(f) + T(g))(x). \qquad (x \in [0,1]) \end{aligned}$$

همچنین به ازای هر $f \in X$ بنا به تعریف سوپریمم نرم داریم:

$$\begin{aligned} |T(f)(x)| &= |xf(x)| \\ &= |x||f(x)| \\ &\leq \| x \| \| f \| \end{aligned}$$

در نتیجه $\| T \| \leq 1$. (۱)

از طرفی، هرگاه $f = I$ قرار دهیم، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\| Tf \| &= \sup\{|xf(x)| : \circ \leq x \leq ۱\}\\ &= \sup\{x^{۲} : \circ \leq x \leq ۱\}\\ &= ۱.\end{aligned}$$

بنابراین $\| T \| = \| T \| \| f \| \geq \| Tf \| = ۱$. (۲)

حال از روابط (۱) و (۲) می‌توان نتیجه گرفت، $\| T \| = ۱$.

قضیه ۳۰.۱.۱. *احکام زیر به ازای عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ بین دو فضای نرم‌دار هم‌ارزند:*

الف) T یک عملگر کراندار است.

ب) T در صفر پیوسته است.

پ) T پیوسته است.

برهان. به [۱] قضیه‌ی (۱۴.۲۳) مراجعه شود. □

تعریف ۳۱.۱.۱. زیرفضای پایا

فرض کنیم $T : X \longrightarrow X$ عملگر خطی و کراندار باشد، آن‌گاه زیرفضای $Y \subset X$ تحت T پایا نامیده می‌شود، هرگاه $T(Y) \subset Y$.

تعریف ۳۲.۱.۱. یکریختی

فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. هرگاه عملگر خطی $T : X \longrightarrow Y$ دوسویی باشد، آن‌گاه T را یکریختی از X به Y می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۱.۱. نگاشت طولپا

فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار باشند. عملگر خطی $T: X \longrightarrow Y$ را یک نگاشت طولپا می‌نامیم، هرگاه یکریختی باشد و برای هر $x \in X$،

$$\|T(x)\| = \|x\|.$$

تعریف ۳۴.۱.۱. هسته

فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌داری باشند و $T \in \mathcal{B}(X,Y)$. در این صورت هسته T را با $Ker(T)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ker(T) = \{x \in X : \ T(x) = \circ\}.$$

برای هر عملگر خطی و کراندار T، $Ker(T)$ یک زیرفضای بسته از فضای نرم‌دار X است.

تعریف ۳۵.۱.۱. تابعك خطی

اگر X فضای نرم‌داری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، آن‌گاه عملگر خطی $f: X \longrightarrow \mathbb{K}$ را یک تابعك خطی می‌نامیم. همچنین f را تابعك خطی کراندار می‌نامیم، هرگاه $M > \circ$ای وجود داشته باشد که برای هر $x \in X$, $|f(x)| \leq M\|x\|$.

تعریف ۳۶.۱.۱. دوگان فضای نرم‌دار

اگر X یك فضای نرم‌دار روی میدان $\mathbb{K}$ باشد، آن‌گاه مجموعه تمام تابعك‌های خطی و کراندار روی X؛ یعنی، $\mathcal{B}(X,\mathbb{K})$ را با X^* نمایش می‌دهیم و آن را فضای دوگان X می‌نامیم. X^* با جمع و ضرب اسکالر و نرم تعریف شده در (۲۶.۱.۱) وقتی که $Y = \mathbb{K}$ باشد، یك فضای نرمدار است.

به همین ترتیب می‌توان فضای دوگان X^*؛ یعنی، $(X^*)^*$ را تعریف کرد که آن را با X^{**} نشان می‌دهیم.

قضیه ۳۷.۱.۱. *اگر X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان X باشد، آن‌گاه X^* یک فضای باناخ است.*

برهان. چون $\mathbb{K}$، کامل است و با توجه به قضیه‌ی (۲۷.۱.۱) می‌توان نتیجه گرفت X^* یک فضای باناخ است. □

قضیه ۳۸.۱.۱. *فضای دوگان $\ell^1(X)$ برابر $\ell^\infty(X)$ است؛ یعنی، $\ell^1(X)^* = \ell^\infty(X)$ است.*

برهان. به [۱۳] قضیه‌ی (۶-۲.۱۰) مراجعه شود. □

قضیه ۳۹.۱.۱. *(هان - باناخ)*
فرض کنیم X فضای نرم‌دار و Z زیرفضایی از آن باشد. اگر f تابعک خطی کرانداری بر Z باشد، آن‌گاه f دارای توسیع خطی کراندار $\tilde{f}$ از Z به X است که $\| \tilde{f} \|_X = \| f \|_Z$

برهان. به [۱۳] قضیه‌ی (۲-۴.۳) مراجعه شود. □

قضیه ۴۰.۱.۱. *اگر X یک فضای نرم‌دار و $x_0 \neq 0$ عضو دلخواهی در X باشد، آن‌گاه تابعک خطی کراندار $\tilde{f}$ روی X وجود دارد که*

$$\|\tilde{f}\| = 1 \quad \text{و} \quad \tilde{f}(x_0) = \|x_0\|.$$

برهان. فرض کنیم $Z = \{\alpha x_0 ; \alpha \in \mathbb{C}\}$. آشکار است که Z یک زیرفضای خطی X است. تابعک خطی f را روی Z به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha \|x_0\| \quad (x \in Z). \qquad (*)$$