بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران

دانشکده فنی و مهندسی

موضوع:

تهیه نرم افزاری بر پایه المانهای محدود و انجام مطالعات موردی در ارتباط با تجهیزات قدرت توسط این نرم افزار

جهت اخذ درجه کارشناس ارشد
رشته برق قدرت

استاد راهنما: دکتر عبدالحسین طحانی
استاد مشاور: دکتر کرمی

نگارش : ابراهیم شعرباف موثق پور

تیرماه ۱۳۷۹

فهرست

عنوان	صفحه

چکیده

پایان‌نامه حاضر مروری بر تئوری روشهای المان محدود و تکنیکهای کامپیوتری کردن آن می‌باشد. در این پایان‌نامه ضمن معرفی مزایای روشهای المان محدود نسبت سایر روشهای عـددی، نـحوه ساخت فرم ضعیف شده ماتریس سختی تشریح شده است.

بعد از محاسبه ماتریس سختی که فقط معرف هندسه مساله می‌باشد، می‌توان با اعمال شرایط مرزی، دستگاه معادلات حاکم را ایجاد و حل نمود. حل این دستگاه معادلات جواب مساله در نقاط گرهی می‌باشد. از طریق روشهای درون یابی دوبعدی، جواب تقریبی برای کل نقاط داخل مثلثها بدست می‌آید. وجود چنین تقریبی بخصوص در ناحیه‌هایی که گرادیان پتانسیل بالا می‌باشد، از دقت مساله می‌کاهد ولی بهر حال با انتخاب المانهای مثلثی کوچکتر به جواب دقیقتر می‌توان رسید.

در فصل سوم تکنیکهای کامپیوتری کردن و تهیه نرم‌افزار برای روشهای المان محدود آورده شـده است. در این فصل از نتایج فصل دوم استفاده شده و نحوه تهیه ماتریس سختی از مختصات رئوس گرهها و تشکیل دستگاه معادلات آورده شده است و فصل چهارم اختصاص به توضیح مختصری راجع به نرم‌افزار تهیه شده می‌باشد. در این فصل سعی شده علاوه بر توضیح نحوه اجرا شدن برنامه، طریقه استفاده از نرم‌افزار نیز توضیح داده شود.

فصل پنجم اختصاص به کاربرد و مقایسه دارد. در این فصل سه مثال کاربردی ارائه شده و تـوسط نرم‌افزار نوشته شده و یک نرم‌افزار کاربردی دیگر بنام Qfield حل شده است. با مقایسه نتایج مثالها ، صحت محاسبات و پردازش نرم‌افزار نوشته شده مشاهده می‌شود. سادگی مثالهای انـتخاب شـده بدلیل راحتی مقایسه می‌باشد.

مقدمه و تاریخچه

هر چند که فرمولهای انتگرالی روشهای المان محدود از زمانهای نسبتا دوری شناخته شده‌اند ولی این روشها حداقل از نظر مفهوم از ۵۰ سال پیش شناخته شده است. از آنجائیکه این روشها شامل حل تعداد زیادی از معادلات جبری خطی و غیر خطی می‌شد، در مسائل کاربردی قابل اعمال نبود.

امروزه با پیشرفت علوم کامپیوتری، حل هزاران معادله خطی و غیر خطی در زمانی اندک امکان‌پذیر گشته است و علاوه بر آن در اکثر دانشکده‌های مهندسی روشهای عددی و تکنیکهای برنامه‌نویسی بعنوان یک قسمت ضروری از تحصیلات بحساب می‌آید.

مهندسین عمران و مکانیک که با مسائل سازه‌ای بسیار پیچیده مواجه می‌شدند، اولین کسانی بودند که از روشهای محاسباتی پیشرفته برای تبدیل مدلهای مکانیکی و ساختمانی به معادلات جبری بهره بردند. در سال ۱۹۶۰ روشهای المان محدود توسط ریاضیدانان کاربردی مطالعه شد و این روش تبدیل به بخشی از دانش معادلات دیفرانسیل جزئی شد و تدریجا روشهای المان محدود بعنوان ابزار عمومی برای حل انواع مسائل در نظر گرفته شد.

از سال ۱۹۷۰ تا بحال تعداد زیادی مهندس و محقق و ریاضیدان (زینگوییچ، گالاگر، سیلوستر و غیره) روی این روشها کار کرده است و این روش تبدیل به مبحث بسیار عمومی برای تمام رشته‌های مهندسی گردیده است و برنامه‌های کامپیوتری متعددی در این زمینه تهیه شده است. از جمله این برنامه، برنامه ASKA برای مکانیک، برنامه TITUS برای ترمودینامیک و برنامه FLUX برای الکترومغناطیس می‌باشد.

در این پایان‌نامه مزایای روشهای المان محدود نسبت به سایر روشهای عددی به اختصار در فصل اول آورده شده است. در فصل دوم تئوری روشهای المان محدود به تفضیل بیان

شده و در فصل سوم تکنیکهای عملی کامپیوتری کردن روشهای المان محدود و روش تفاضلهای محدود آورده شده است. در فصل چهارم توضیحاتی از نحوه کار نرم‌افزار تهیه شده برای FEM ارائه گردیده است. و در فصل پنجم سه مثال ساده از کاربردهای FEM آورده شده است که توسط برنامه تهیه شده XYFEM و نرم‌افزار کاربردی Qfield (جهت مقایسه دقت کار نرم‌افزار XYFEM) حل شده است.

بمنظور توسعه آتی نرم‌افزار، سورس کد برنامه به همراه شکلکها در دیسک ضمیمه موجود است.

فصل ۱

مشخصات و قابلیتهای روشهای المان محدود

مقدمه

روش‌های سنتی رآلیه-رایتس[1]، گالرکین[2] و حداقل مربعات[3] مشکلات فراوانی در ایجاد توابع تقریب[4] دارند. توابع تقریب، جدای از آن که باید پیوسته باشند، باید شرایط استقلال خطی را کاملاً برآورد کنند. انتخاب این چنین توابعی وقتی که مسأله هندسهٔ پیچیده‌ای داشته باشد، کاملاً مشکل می‌باشد. زمانی که کیفیت تقریب مستقیماً متاثر از توابع تقریب انتخاب شده باشد، در آنصورت نقش توابع تقریب زیاد شده و هر گونه اشتباه در انتخاب این توابع، نتایج کم دقتی را موجب می شود در نتیجه این روشها ارزش

1 - Raulieyh-Ritz
2 - Galerkin
3 - Least Squares
4 - Approximation Functions

چندانی ندارند و اغلب در محاسبات دقیق به خصوص مسائلی با هندسهٔ پیچیده، بکار نمی‌روند.

می‌توان مشخصات یک روش حل ایده‌ال را به صورت زیر گفت:

۱ ـ باید یک پایه ریاضی محکم و استواری داشته باشد.

۲ ـ نباید محدودیت‌هایی به واسطه شکل هندسی، ترکیب فیزیکی ناحیه و یا طبیعت بار داشته باشد.

۳ ـ مراحل فرموله کردن باید مستقل از شکل ناحیه[1] و شرایط مرزی[2] مشخص شده باشد.

۴ ـ روش حل باید بدون عوض کردن فرمول‌ها، قابلیت حل مسائل را با هر دقتی داشته باشد.

۵ ـ روش حل باید طوری باشد که بتوان با تعریف آن بر روی یک کامپیوتر، پردازش دیجیتال روی آن انجام داد.

روش المان محدود تکنیکی است که اساس کار آن بر پایه تقسیم کل ناحیه به

1 - Domain 2 - Boundery Condition

زیرناحیه‌هایی بنام المان محدود[1] می‌باشد. به طوری که این روش را قادر می‌سازد در تمام هندسه‌های پیچیده عملکرد مناسب داشته باشد. بنابراین روش المان محدود از روش‌های سنتی رآلیه - رایتس و گالرکین‌که در آن‌ها توابع تقریب برای کل ناحیه درست می‌کردیم فرق دارد. ولی مهمترین تفاوت این روش نسبت به سایر روش‌های قدیمی به دلایل زیر می‌باشد:

۱ ـ تقسیم کل به جزء[2] که معرفی یک هندسه پیچیده به صورت مجموعه‌ای از نواحی کوچک را امکان‌پذیر می‌سازد، موجب استخراج سیستماتیک توابع تقریب می‌شود.

۲ ـ توابع تقریب روی هر المان، معمولاً توابع جبری هستند که از طریق درون یابی[3] استخراج می‌شوند.

۳ ـ سوار کردن المان‌ها[4]، بر اساس پیوستگی و بالانس فلوهای داخلی می‌باشد، بنابراین عملکرد مناسبتری نسبت به سایر روشها بخصوص در گرادیانهای بالای مسائل دارد.

---

1 - Finite Element

2 - Division of whole into parts

3 - Interpolation

4 - Assembly of Elements

این سه امکانات فوق، که سه مرحلهٔ اصلی روش‌های المان محدود را نیز تشکیل می‌دهند، به طور کامل به هم مرتبط‌اند. هندسه المان‌های محدود به کار رفته باید چنان باشد که توابع تقریب بتوانند به طور مشابه و یکسان استخراج شوند. توابع تقریب در المانهای محدود نه تنها به هندسه مسالهٔ به کار رفته بستگی دارند، بلکه به تعداد و موقعیت نقاط گره‌ها نیز بستگی دارند.

روش‌های المان محدود نه تنها بر کمبودهای روش‌های سنتی عددی فارغ می‌آید، بلکه امکان کامپیوتری کردن روش حل را نیز ایجاد می‌کند.

مراحل اساسی روش‌های المان محدود بصورت زیر است:

۱ - معرفی هندسه مساله بصورت مجموعه‌ای از المانهای محدود.

۲ - اعمال معادله حاکم بر کلیه المانها و بدست آوردن معادله المانها.

۳ - سوار نمودن کلیه معادلات المانها بصورت ماتریس

۴ - اعمال شرایط مرزی مساله

۵ - حل معادلات المانهای سوار شده.

۶ - پردازش نتایج.

فصل ۲

تئوری روشهای المان محدود

۲.۱. مدل مقادیر مرزی

مسأله زیر را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم تابع $u(x)$ را طوری پیدا کنیم که در معادله‌دیفرانسیل (۱ - ۲) و شرایط مرزی (۲ - ۲) صدق کند.

$$-\frac{d}{dx}\left(a\frac{du}{dx}\right) + cu - q = 0 \quad 0 < x < L \qquad (۲ - ۱)$$

$$u(0) = u_0 \quad , \quad \left(a\frac{du}{dx}\right)_{x=L} = Q_0 \qquad (۲ - ۲)$$

به طوری که $a= a(x)$ و $c = c(x)$ و $q = q(x)$ و a_0 و q_0 بنام داده‌های[1] مسأله معروف می‌باشند. معادله دیفرانسیل فوق در حل اغلب مسائل فیزیک ناشی می‌شود. برای مثال، هدایت حرارت در طول یک میله، شار گذرنده از میان کانال و لوله، انحناء کابل، خمش محوری میله، و....

معمولاً ساختار ریاضی مشترک برای پدیده‌های مختلف ایجاد می‌شود. بنابراین، اگر بتوانیم روش حل عددی برای معادله دیفرانسیل حاکم (۱ - ۲) پیدا کنیم بطوریکه بتواند شرایط اولیه آن را نیز برآورد کند، خواهیم توانست تمام مسائل با معادله دیفرانسیل حاکم (۱ - ۲) را حل کنیم.

مراحل حل معادله (۱ - ۲) به صورت روش المان محدود به تفضیل در زیر توضیح داده خواهد شد.

۲.۲. تقسیم کردن ناحیه

فرض می‌کنیم ناحیهٔ مسأله‌ای شامل تمام نقاط بین $x = 0$ و $x= L$ از $\Omega(0, L)$ می‌باشد. ناحیه به مجموعه‌ای از المان‌های خطی[2] تقسیم می‌شود (یک المان نمونه به

1 - Data

2 - Linear Element

طول he بین نقاط A و B قرار دارد). اجتماع این چنین المان‌هایی به نام مش[۱] المان محدود ناحیه خوانده می‌شود. علت تقسیم ناحیه به المانهای محدود چنانچه قبلاً" نیز در بالا به آن اشاره شد دو تا می‌باشد.

الف ـ معرفی هندسه مسأله

ب ـ حل تقریبی روی هر المان مش دقیق‌تر خواهد بود.

چگونگی تقریب ناحیه در این حالت اهمیتی ندارد. زیرا تقسیم کردن به صورت خطی می‌باشد. اگر ناحیه به صورت منحنی باشد، در آن صورت تقریب به وسیله مجموعه‌ای از خطوط یا منحنی‌ها باید صورت گیرد.

تقریب حل بر روی هر المان، از تقریب حل بر روی کل ناحیه ساده‌تر است و هر قدر این نواحی کوچکتر باشند دقت نیز بالاتر خواهد بود.

برای اهمیت دادن به المان‌ها و اعمال پیوستگی در گره‌های[۲] مشترک المان‌ها، گره‌های انتهای المان‌های خطی را به نام گره‌های المانی[۳] می‌نامیم.

در ساختار توابع تقریب بر روی یک المان، گره‌ها نقش نقاط درون‌یابی را بازی می‌کنند.

---

1 - Mesh
2 - Node
3 - Element Node

تعداد المان‌های به کار رفته در مسائل به نوع المان و دقت مورد نظر در مسائل بستگی دارد.

اگر بخواهیم مسأله‌ای را به روش المان محدود برای اولین بار حل کنیم، باید همگرائی مسأله امتحان شود. زیرا احتمال واگرائی در حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل متعدد وجود دارد.

۲.۳. استخراج معادلات المان‌ها[۱]

استخراج معادلات المان‌های محدود، شامل سه مرحله می‌باشد:

الف ـ ایجاد باقیمانده‌های وزنی[۲] یا فرم ضعیف شده[۳] از معادلات دیفرانسیل حاکم.

ب ـ فرض فرم تقریب در روی المان محدود نمونه.

ج ـ استخراج معادلات المان‌های محدود به وسیلهٔ قرار دادن حل تقریبی در باقیمانده‌های وزنی یا فرم ضعیف شده.

1 - Derivation of Element Equations
2 - Weighted Residual
3 - Weak Form