

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

## کاربرد منحنی بزیه در ذخیره سازی تصاویر و فونت‌ها در کامپیوتر

استاد راهنما:

دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش‌گر:

علیرضا ابراهیمی

شهریور ۱۳۹۱

کلیه‌ی حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه/رساله متعلق به دانشگاه یزد است و هرگونه استفاده از نتایج علمی و عملی از این پایان‌نامه/رساله برای تولید دانش فنی، ثبت اختراع، ثبت اثر بدیع هنری، همچنین چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه و اقتباس و ارائه مقاله در سمینارها و مجلات علمی از این پایان‌نامه/رساله منوط به موافقت کتبی دانشگاه یزد است.

تقدیم به

پدر و مادرم

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

## سپاس‌گزاری

سپاس خداوند یکتای عزتمندی که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی‌نهایت سپاس می‌گویم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ی مطلوب نائل آیم. به‌راستی که همه چیز از آن اوست و همه‌چیز به خواست اوست.

از استاد گرانقدر و فرهیخته **جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی** که با راهنمایی‌های سازنده‌شان همواره در کنار من بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. ایشان در نهایت دلسوزی و همیاری با کمک‌ها و پیشنهادهای ارزشمندشان انجام این تحقیق را امکان‌پذیر نمودند.

از استاد بزرگوارم، **جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل** که استاد مشاور اینجانب بودند هم صمیمانه سپاسگزارم.

از داوران محترم **جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک قائینی** و **جناب آقای دکتر سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی** به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان‌نامه از سوی ایشان و توفیق بزرگی که نصیب اینجانب نموده‌اند، کمال تشکر را دارم.

از **خانم عابدینی و خانم عباسی‌زاده** به خاطر دلسوزی و زحمات بی‌دریغشان و تمام اساتید بزرگوار **دانشکده ریاضی** که باعث پیشرفت اینجانب بوده‌اند، سپاسگزارم.

همچنین از دوستان عزیز و همکلاسی‌های بزرگوارم، آقایان: **محمد حسین فتوحی بافقی، سید ایمان رسولی، سجاد اسکندر، جواد نادری‌زاده و مجتبی باغبان** که همواره پشتوانه محکمی برای من بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

## چکیده

استخراج پیرامون تصاویر یکی از مسائل مهم گرافیک کامپیوتری و تصویر نگاری است. مراحل مختلف ریاضی و محاسباتی در این روند مورد بحث قرار می‌گیرند. نمایش تصاویر مسطح و فونت‌ها به صورت منحنی پارامتری مزیت‌های زیادی دارد. به عنوان مثال مقیاس، انتقال، چرخش و برش می‌تواند به راحتی انجام شود. این پایان‌نامه روش‌های ساده و موثری برای طراحی منحنی‌های بهینه را ارائه می‌دهد که به ویژه برای استخراج پیرامون فونت‌ها و کاراکترهای زبان‌های غیر لاتین مانند فارسی و عربی بسیار مناسب است. فرایند یافتن پیرامون و تقریب مرز تصویر کاراکترهای دیجیتالی شامل، استخراج مرز تصویر، کشف نقاط گوشه و برازش با یک منحنی پارامتری مشخص می‌باشد. کار عمده ما برازش یک منحنی به مجموعه نقاط مرزی در فضای دو بعدی است. به این منظور از منحنی‌های بزیه و بی‌اسپلاین درجه سوم کمک گرفته و از روش‌های عددی مانند کمترین مربعات یا روش گاوس-نیوتن برای پیدا کردن نقاط کنترلی این منحنی‌ها استفاده می‌کنیم.

# فهرست مطالب

۱	مقدمه
۳	۱ مفاهیم مقدماتی
۳	۱.۱ نمایش فونت‌ها
۴	۲.۱ منحنی‌های پارامتری
۵	۳.۱ منحنی‌های چندجمله‌ای و چندجمله‌ای‌های برنشتاین
۷	۱.۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین
۹	۲.۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین به عنوان پایه‌ای برای فضای برداری چندجمله‌ای‌ها
۱۰	۳.۳.۱ ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های برنشتاین
۱۳	۴.۳.۱ مشتق چندجمله‌ای‌های برنشتاین
۱۴	۴.۱ تبدیلات مستوی
۱۶	۵.۱ منحنی‌های بزیه
۲۱	۱.۵.۱ ویژگی‌های منحنی‌های بزیه
۲۳	۲.۵.۱ مشتقات یک منحنی بزیه
۲۵	۳.۵.۱ منحنی بزیه کسری
۲۵	۴.۵.۱ معایب منحنی‌های بزیه
۲۶	۶.۱ منحنی‌های بی اسپلین
۲۶	۱.۶.۱ توابع تکه‌ای چندجمله‌ای
۲۸	۲.۶.۱ تابع اسپلین

۲۸	پایه بی اسپلین	۳.۶.۱
۳۴	خصوصیات پایه‌های بی اسپلین	۴.۶.۱
۳۴	تعریف منحنی‌های بی اسپلین	۵.۶.۱
۳۶	خصوصیات منحنی‌های بی اسپلین	۶.۶.۱
۳۸	دنباله گره‌ها	۷.۶.۱
۴۱	بی اسپلین‌های کسری غیر یکنواخت	۷.۱
۴۴	خصوصیات توابع پایه‌ای کسری	۱.۷.۱
۴۴	خصوصیات منحنی‌های بی اسپلین کسری غیر یکنواخت	۲.۷.۱
۴۵	شبه معکوس	۸.۱

## ۲ الگوریتم طراحی فونت‌ها

۴۷		
۴۸	داشتن تصویر دیجیتالی	۱.۲
۴۹	استخراج مرز	۲.۲
۵۰	کشف نقاط گوشه	۳.۲
۵۱	برازش با منحنی بزیه درجه سوم	۴.۲
۵۳	پرمایش طولی	۱.۴.۲
۵۴	پیدا کردن نقاط کنترل میانی	۲.۴.۲
۵۸	نقاط شکستگی	۳.۴.۲

## ۳ برازش منحنی بزیه با روش گاوس-نیوتن

۶۱	تعریف مسئله	۱.۳
۶۲	مسئله کمترین مربعات جدایی‌پذیر	۲.۳
۶۳	پرمایش داده‌ها	۳.۳
۶۵	الگوریتم اصلی	۴.۳
۶۵	روش گاوس-نیوتن	۱.۴.۳
۶۶	حل مسئله کمترین مربعات غیرخطی	۲.۴.۳
۶۹	معیار توقف	۳.۴.۳



۷۰	استفاده از الگوریتم برای تقریب مرز	۵.۳
۷۳	برازش با منحنی‌های بی‌اسپلاین	۴
۷۴	روش کمترین مربعات و نقاط کنترل	۱.۴
۷۷	نکات محاسباتی	۲.۴
۸۱	نتیجه‌گیری کلی و چشم‌انداز مطالعات آتی	
۸۳	برخی برنامه‌های کامپیوتری بکار رفته در پایان‌نامه	
۹۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۹۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۱۰۱	مراجع	

# لیست تصاویر

۴	مقایسه روش ذخیره سازی طرح بیتی و پیرامون	۱.۱
۵	دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱	۲.۱
۷	سرگی نتانویچ برنشتاین	۳.۱
۸	چند جمله‌ای‌های برنشتاین برای $n = ۲, ۳$	۴.۱
۱۵	تبدیلات مستوی پایه‌ای	۵.۱
۱۷	پییر اتین بزیه	۶.۱
۱۷	پائول دی کاستلجا	۷.۱
۱۸	الگوریتم کاستلجا	۸.۱
۲۰	الگوریتم کاستلجا برای منحنی بزیه درجه سوم	۹.۱
۲۱	منحنی بزیه مثال ۴.۵.۱	۱۰.۱
۲۲	ویژگی سرتاسری بودن منحنی بزیه	۱۱.۱
۲۴	خطوط مماس بر منحنی بزیه در نقاط کنترل انتهایی	۱۲.۱
۲۴	خطوط مماس بر منحنی بزیه در نقاط کنترل انتهایی	۱۳.۱
۲۷	توابع تکه‌ای چند جمله‌ای	۱۴.۱
۲۷	توابع تکه‌ای چند جمله‌ای	۱۵.۱
۲۸	یک تابع اسپلاین	۱۶.۱
۲۹	یک دنباله گره یکنواخت	۱۷.۱
۳۰	بی‌اسپلاین مرتبه اول	۱۸.۱
۳۱	بی‌اسپلاین مرتبه دوم	۱۹.۱

۳۲	بی‌اسپلین مرتبه سوم	۲۰.۱
۳۳	بی‌اسپلین مرتبه چهارم	۲۱.۱
۳۵	فضای منحنی برای بی‌اسپلین مرتبه سوم	۲۲.۱
۳۶	قطعه‌ای از منحنی متناظر به تابع پایه‌ای $N_{i,k}$	۲۳.۱
۳۶	خاصیت ناوردایی مستوی منحنی بی‌اسپلین	۲۴.۱
۳۸	مجموعه محدب و غیر محدب	۲۵.۱
۳۸	پوسته محدب شکل ۱۲.۲	۲۶.۱
۳۹	خاصیت پوسته محدب منحنی بی‌اسپلین	۲۷.۱
۴۰	خاصیت کنترل‌پذیری موضعی منحنی بی‌اسپلین	۲۸.۱
۴۱	دنباله گره‌های چندگانه. اعداد داخل پرانتز مرتبه تکرار گره را نشان می‌دهد	۲۹.۱
۴۲	توابع پایه‌ای برای دنباله گره‌ها مثال ۸.۶.۱	۳۰.۱
۴۳	دایره تولید شده توسط یک منحنی بی‌اسپلین کسری غیر یکنواخت	۳۱.۱
۴۴	تغییر منحنی با تغییر وزن‌ها	۳۲.۱
۴۸	تصویر دیجیتالی از کلمه "علی"	۱.۲
۴۹	تصویر دیجیتالی از کلمه "یزد"	۲.۲
۵۱	استخراج مرز از شکل ۱.۲	۳.۲
۵۲	استخراج مرز از شکل ۲.۲	۴.۲
۵۳	کشف نقاط گوشه شکل ۳.۲	۵.۲
۵۴	کشف نقاط گوشه شکل ۴.۲	۶.۲
۵۸	برازش منحنی بزیه (خط کامل) روی منحنی دیجیتالی (خط چین)	۷.۲
۵۹	برازش منحنی بزیه (خط کامل) روی منحنی دیجیتالی (خط چین)	۸.۲
۶۰	برازش منحنی بزیه با نقاط اساسی	۹.۲
۶۰	برازش منحنی بزیه با نقاط اساسی	۱۰.۲
۷۱	برازش منحنی بزیه با روش گاوس - نیوتن	۱.۳
۷۲	برازش منحنی بزیه با روش گاوس - نیوتن	۲.۳

۷۸	.....	برازش با منحنی بی‌اسپلاین مکعبی	۱.۴
۷۹	.....	برازش با منحنی بی‌اسپلاین مکعبی	۲.۴

## مقدمه

با استفاده فراوان کامپیوتر در جنبه‌های مختلف زندگی، مدل‌های کامپیوتری به ما این امکان را داده‌اند که زندگی واقعی خود را بر مبنای مدل‌های کامپیوتری طراحی کنیم. یک مدل کامپیوتری کار را سریع‌تر و جذاب‌تر می‌کند. مدل‌سازی هندسی<sup>۱</sup> منحنی‌ها و سطوح کاربردهای فراوانی در مهندسی، پردازش تصویر، پزشکی، صنعت سرگرمی و طراحی فونت و حروف دارد.

این پایان‌نامه از مدل‌سازی هندسی برای نمایش فشرده فونت‌ها و کاراکترهای فارسی استفاده می‌کند. در فصل اول پایان‌نامه منحنی‌های پارامتری را معرفی کرده و خصوصیات و ویژگی‌های منحنی بزیه و منحنی بی‌اسپلین را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل دوم سیستم طراحی فونت معرفی شده و جزئیات برازش با منحنی بزیه درجه سه شرح داده شده است. در فصل سوم الگوریتمی را برای برازش نقاط با منحنی‌های بزیه به کمک روش گاوس - نیوتن ارائه می‌دهیم. فصل چهارم را به برازش نقاط با منحنی بی‌اسپلین اختصاص داده‌ایم.

---

<sup>۱</sup>Geometric modeling

# فصل ۱

## مفاهیم مقدماتی

### ۱.۱ نمایش فونت‌ها

پارامتری‌سازی نقاط دو بعدی و سه بعدی یک گام اساسی در طراحی هندسی به وسیله کامپیوتر<sup>۱</sup> است. با استفاده از پارامتری‌سازی می‌توان نقاط مرزی یک حرف یا کاراکتر را بر حسب یک منحنی پارامتری مشخص توصیف کرد. در حالت کلی دو روش اساسی برای ذخیره فونت‌ها در کامپیوتر وجود دارد.

#### ۱. روش طرح‌بیتی<sup>۲</sup>

#### ۲. روش پیرامون<sup>۳</sup>

در ذخیره‌سازی فونت‌ها به روش طرح‌بیتی هر کاراکتر به عنوان یک آرایه از پیکسل‌ها<sup>۴</sup> ذخیره می‌شود. ولی در روش پیرامون با ترکیب نقاط کنترل و منحنی، کاراکتر توصیف می‌شود. نمایش پیرامون فونت مزیت‌های زیادی نسبت به طرح‌بیتی مانند مقیاس‌گذاری، برش، انتقال و چرخش دارد (شکل ۱.۱). بنابراین در بسیاری از سیستم‌های نشر رومیزی<sup>۵</sup> شکل حروف در حافظه بر حسب پیرامون آن حرف ذخیره و آن پیرامون بر حسب منحنی‌های بزه بیان می‌گردد. کاراکترهای فارسی از کاراکترهای زبان‌های دیگر مانند انگلیسی و لاتین متفاوت

---

<sup>۱</sup> Computer Aided Geometric Design(CAGD)

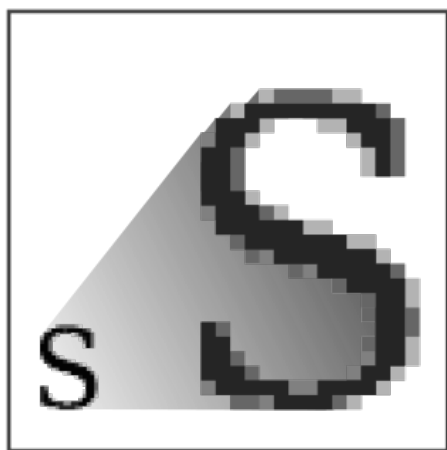
<sup>۲</sup> Bitmap

<sup>۳</sup> Outline

<sup>۴</sup> Pixels

<sup>۵</sup> Desktop publishing systems

هستند، زیرا بر خلاف آن‌ها به‌طور پیوسته از راست به چپ نوشته می‌شوند و هر کاراکتر دو تا چهار شکل مختلف نسبت به موقعیت‌های آن در کلمه دارد. زبان فارسی در فرمت‌های مختلف فونت و شکستگی‌های طبیعی بسیار غنی است که لازم است بیشتر مورد توجه قرار گیرد.



**BITMAP**  
.jpeg .gif .png



**OUTLINE**  
.svg

شکل ۱.۱: مقایسه روش ذخیره سازی طرح بیتی و پیرامون

## ۲.۱ منحنی‌های پارامتری

دو روش رایج نمایش منحنی‌ها و سطوح در مدل‌سازی هندسی، معادلات ضمنی و توابع پارامتری هستند. معادله ضمنی یک منحنی در صفحه  $xy$  به صورت  $f(x, y) = 0$  است. این معادله یک رابطه ضمنی بین مختصات  $x$  و  $y$  از نقاطی که روی منحنی قرار می‌گیرند را توصیف می‌کند. برای یک منحنی، معادله ضمنی با یک مضرب ثابت منحصر بفرده است. به عنوان مثال دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ دارای معادله‌ای به صورت  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$  است (شکل ۲.۱). در توابع پارامتری مختصات نقاط روی منحنی به‌طور جداگانه توسط یک تابع صریح از متغیر مستقل نشان داده می‌شوند.

$$C(u) = (x(u), y(u)), \quad a \leq u \leq b, \quad (1-1)$$

بنابراین  $C(u)$  یک تابع برداری از متغیر مستقل  $u$  است.

ربع اول دایره نشان داده شده در شکل ۲.۱ به صورت تابع پارامتری زیر تعریف می‌شود.

$$x(u) = \cos(u),$$

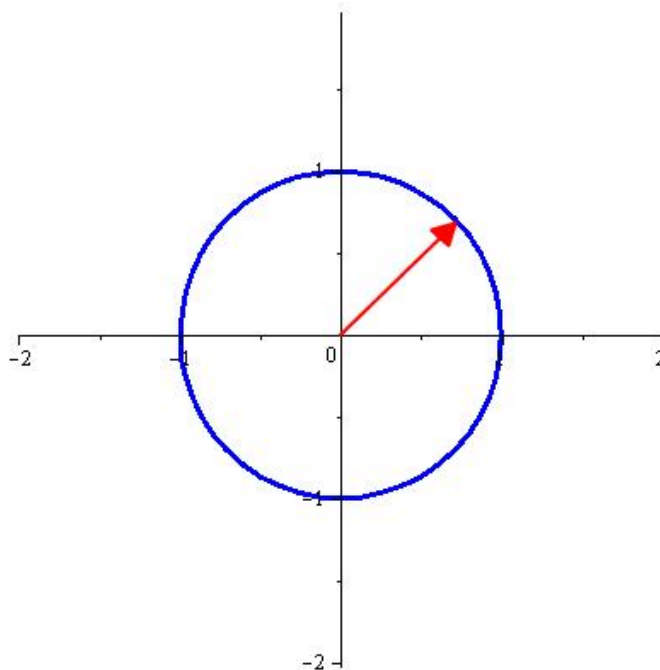
$$y(u) = \sin(u), \quad 0 \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

از طرف دیگر با قرار دادن  $t = \tan(\frac{u}{2})$  به نمایش پارامتری زیر می‌رسیم.

$$x(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$y(t) = \frac{2t}{1+t^2}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

بنابراین نمایش پارامتری یک منحنی یگانه نیست.



شکل ۲.۱: دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱

### ۳.۱ منحنی‌های چندجمله‌ای و چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌ها یک ابزار مناسب و پرکاربرد در ریاضی می‌باشند، زیرا ساده تعریف می‌شوند و می‌توانند پس از محاسبه سریع توسط سیستم‌های کامپیوتری، یک نمایش تقریبی خوب برای انواع توابع باشند. از آن‌ها به راحتی می‌توان مشتق و انتگرال گرفت و در ضمن می‌توانند جهت تشکیل منحنی‌های اسپلاین که هر تابع را



با هر دقت دلخواه تقریب می‌زنند، بکار گرفته شوند. می‌توان فرم کلی چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$P(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0, \quad a_n \neq 0$$

**مثال ۱.۳.۱** نمایش توابع پارامتری چندجمله‌ای از درجه یک (یک خط راست) به صورت زیر است.

$$Q(u) = (a_0 + a_1 u, b_0 + b_1 u), \quad u_0 \leq u \leq u_1,$$

و چندجمله‌ای از درجه دو را می‌توان به صورت

$$Q(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \\ b_0 + b_1 u + b_2 u^2 \end{bmatrix},$$

یا

$$Q(u) = P_0 + P_1 u + P_2 u^2,$$

که

$$P_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

نشان داد.

و چندجمله‌ای از درجه سه به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$Q(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \\ b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 \end{bmatrix} = P_0 + P_1 u + P_2 u^2 + P_3 u^3.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود چندجمله‌ای‌ها، ترکیبات خطی از چندجمله‌ای‌های مقدماتی  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$

می‌باشند. در واقع هر چند جمله‌ای با درجه کمتر یا مساوی  $n$ ، می‌تواند به صورت فوق نشان داده شود و دلایل

آن نیز ساده و به شرح زیر است.

۱- مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی  $n$ ، یک فضای برداری  $n + 1$  بعدی تشکیل می‌دهند.

۲- مجموعه توابع  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$  تشکیل یک پایه برای این فضای برداری می‌دهند یعنی هر چندجمله‌ای از

درجه کمتر یا مساوی  $n$  می‌تواند به صورت یگانه از ترکیب خطی این توابع به دست آید. این پایه به طور معمول،

پایه استاندارد نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱ بستار مجموعه پارامترهایی را که تابع پایه‌ای به ازای آن‌ها غیر صفر است، محمل<sup>۶</sup> تابع گویند.

هدف از بیان مطالب فوق این است که به معرفی یکی دیگر از پایه‌های استفاده شده برای فضای چندجمله‌ای‌ها به نام پایه برنشتاین پرداخته و خواص آن را بررسی کنیم.

### ۱.۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌های برنشتاین در سال ۱۹۱۲ به وسیله ریاضی‌دان روسی سرگی نتانویچ برنشتاین<sup>۷</sup> معرفی شدند. وی در جریان کار خود روی قضیه تقریب وایرستراس<sup>۸</sup> به آن‌ها رسید [۶].



شکل ۳.۱: سرگی نتانویچ برنشتاین

تعریف ۳.۳.۱  $i$ -امین چندجمله‌ای برنشتاین درجه  $n$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i},$$

که در آن

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \frac{n!}{i!(n-i)!}, & 0 \leq i \leq n, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

<sup>۶</sup>Support

<sup>۷</sup>Sergei Natanovich Berenstein–(March 5,1880 – October 26,1968)

<sup>۸</sup>Weierstrass approximation theorem

مثال ۴.۳.۱ برای حالت  $n = 0$  خواهیم داشت:

$$B_0^0(u) = 1.$$

برای حالت  $n = 1$  خواهیم داشت:

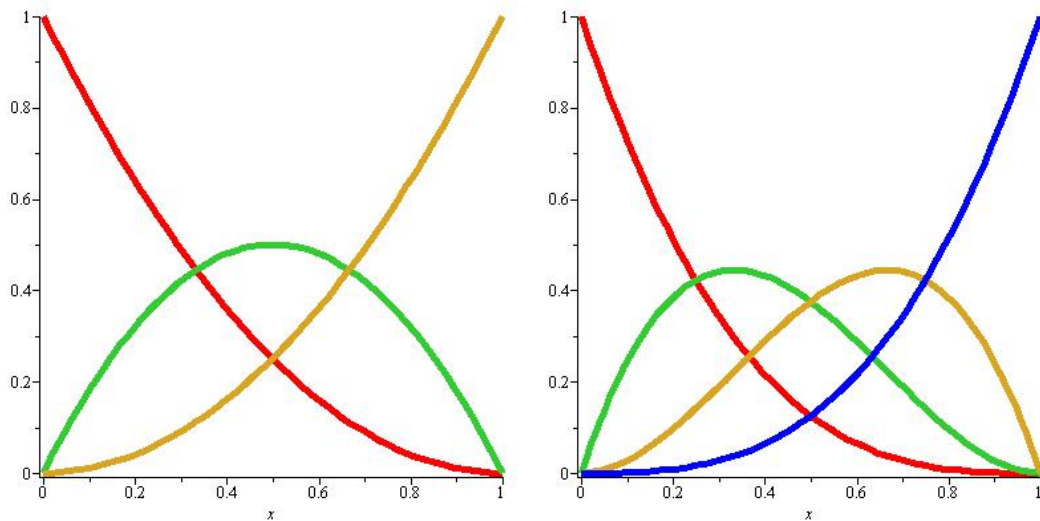
$$B_0^1(u) = 1 - u, B_1^1(u) = u.$$

برای حالت  $n = 2$  خواهیم داشت:

$$B_0^2(u) = (1 - u)^2, B_1^2(u) = 2u(1 - u), B_2^2(u) = u^2.$$

برای حالت  $n = 3$  خواهیم داشت:

$$B_0^3(u) = (1 - u)^3, B_1^3(u) = 3u(1 - u)^2, B_2^3(u) = 3u^2(1 - u), B_3^3(u) = u^3.$$



شکل ۴.۱: چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای  $n = 2, 3$

چندجمله‌ای‌های برنشتاین در گرافیک کامپیوتری نقش مهمی را ایفا می‌کنند و شکل ساده نمایش گرافیکی آن‌ها یک دلیل اهمیت آن‌ها می‌باشد (شکل ۴.۱).

### ۲.۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین به عنوان پایه‌ای برای فضای برداری چندجمله‌ای‌ها

پایه مرتب استاندارد  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$  یک پایه برای  $\mathbb{P}_n$  فضای برداری چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر  $n$  می‌باشد. در این قسمت نشان می‌دهیم که چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجه  $n$  نیز تشکیل یک پایه مرتب برای  $\mathbb{P}_n$  می‌دهند. به این منظور کافی است نشان دهیم هر عنصر پایه استاندارد  $\{1, u, u^2, \dots, u^n\}$  می‌تواند به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های برنشتاین نوشته شود.

لم ۵.۳.۱ تبدیل از پایه برنشتاین به پایه استاندارد، برای هر  $i = 0, 1, \dots, n$  داریم:

$$B_i^n(u) = \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} u^k.$$

اثبات. با توجه به قضیه دوجمله‌ای برای بسط  $(1-u)^{n-i}$  داریم:

$$\begin{aligned} B_i^n(u) &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\ &= \binom{n}{i} u^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-u)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} u^{i+k} \\ &= \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} u^k \\ &= \sum_{k=i}^n (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} u^k. \end{aligned}$$

□

لم ۶.۳.۱ تبدیل از پایه استاندارد به پایه برنشتاین، برای هر  $i = 0, 1, \dots, n$  داریم:

$$u^i = \sum_{k=i}^n \frac{\binom{k}{i}}{\binom{n}{i}} B_k^n(u).$$

اثبات.

با استفاده از روش استقرای ریاضی حکم را ثابت می‌کنیم.

(الف) پایه استقراء: حکم برای  $i = 0$  به صورت زیر در می‌آید.

$$u^0 = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{k}{0}}{\binom{n}{0}} B_k^n(u) = \sum_{k=0}^n B_k^n(u) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} = (u + (1-u))^n = 1^n = 1$$