بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

کاربرد منحنی بزیه در ذخیره سازی تصاویر و فونت‌ها درکامپیوتر

استاد راهنما:

دکتر قاسم برید لقمانی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا هوشمند اصل

پژوهش‌گر:

علیرضا ابراهیمی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر و مادرم

و همه کسانی که درست اندیشیدن را به من آموختند.

سپاس‌گزاری

سپاس خداوند یکتای عزتمندی که رحمت و دانش او در سراسر گیتی گسترده شده، آسمان‌ها و زمین همه از آن اوست و علم و دانش حقیقی را بر هر که بخواهد موهبت می‌فرماید. رحمت و لطف او را بی‌نهایت سپاس می‌گویم چرا که فهم و درک مطالب این پژوهش را بر من ارزانی داشت و مرا به این اصل رساند که علم و ایمان دو بال یک پروازند. توفیق تلاش به من داد و هر بار که خطا کردم فرصتی دوباره، تا با امید، تلاشی تازه را آغاز کنم و به خواست او به نتیجه‌ی مطلوب نائل آیم. به‌راستی که همه چیز از آن اوست و همه‌چیز به خواست اوست.

از استاد گرانقدر و فرهیخته **جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی** که با راهنمایی‌های سازنده‌شان همواره در کنار من بودند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نمایم. ایشان در نهایت دلسوزی و همیاری با کمک‌ها و پیشنهادهای ارزشمندشان انجام این تحقیق را امکان‌پذیر نمودند.

از استاد بزرگوارم، **جناب آقای دکتر محمدرضا هوشمند اصل** که استاد مشاور اینجانب بودند هم صمیمانه سپاسگزارم.

از داوران محترم **جناب آقای دکتر فرید (محمد) مالک قائینی** و **جناب آقای دکتر سید ابوالفضل شاهزاده فاضلی** به خاطر پذیرش مسئولیت داوری این پایان‌نامه از سوی ایشان و توفیق بزرگی که نصیب اینجانب نموده‌اند، کمال تشکر را دارم.

از خانم عابدینی و خانم عباسی‌زاده به خاطر دلسوزی و زحمات بی‌دریغشان و **تمام اساتید بزرگوار دانشکده ریاضی** که باعث پیشرفت اینجانب بوده‌اند، سپاسگزارم.

همچنین از دوستان عزیز و همکلاسی‌های بزرگوارم، آقایان: **محمد حسین فتوحی بافقی، سید ایمان رسولی، سجاد اسکندر، جواد نادری‌زاده و مجتبی باغبان** که همواره پشتوانه محکمی برای من بوده‌اند تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

استخراج پیرامون تصاویر یکی از مسائل مهم گرافیک کامپیوتری و تصویر نگاری است. مراحل مختلف ریاضی و محاسباتی در این روند مورد بحث قرار می‌گیرند. نمایش تصاویر مسطح و فونت‌ها به صورت منحنی پارامتری مزیّت‌های زیادی دارد. به عنوان مثال مقیاس، انتقال، چرخش و برش می‌تواند به راحتی انجام شود.

این پایان‌نامه روش‌های ساده و موثری برای طراحی منحنی‌های بهینه را ارائه می‌دهد که به ویژه برای استخراج پیرامون فونت‌ها و کاراکترهای زبان‌های غیر لاتین مانند فارسی و عربی بسیار مناسب است. فرایند یافتن پیرامون و تقریب مرز تصویر کاراکترهای دیجیتالی شامل، اسخراج مرز تصویر، کشف نقاط گوشه و برازش با یک منحنی پارامتری مشخص می‌باشد. کار عمده ما برازش یک منحنی به مجموعه نقاط مرزی در فضای دو بعدی است. به این منظور از منحنی‌های بزیه و بی‌اسپلاین درجه سوم کمک گرفته و از روش‌های عددی مانند کمترین مربعات یا روش گاوس-نیوتن برای پیدا کردن نقاط کنترلی این منحنی‌ها استفاده می‌کنیم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

با استفاده فراوان کامپیوتر در جنبه‌های مختلف زندگی، مدل‌های کامپیوتری به ما این امکان را داده‌اند که زندگی واقعی خود را بر مبنای مدل‌های کامپیوتری طراحی کنیم. یک مدل کامپیوتری کار را سریع‌تر و جذاب‌تر می‌کند. مدل‌سازی هندسی [1] منحنی‌ها و سطوح کاربردهای فراوانی در مهندسی، پردازش تصویر، پزشکی، صنعت سرگرمی و طراحی فونت و حروف دارد.

این پایان‌نامه از مدل‌سازی هندسی برای نمایش فشرده فونت‌ها و کاراکترهای فارسی استفاده می‌کند. در فصل اول پایان‌نامه منحنی‌های پارامتری را معرفی کرده و خصوصیات و ویژگی‌های منحنی بزیه و منحنی بی‌اسپلاین را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل دوم سیستم طراحی فونت معرفی شده و جزییات برازش با منحنی بزیه درجه سه شرح داده شده است . در فصل سوم الگوریتمی را برای برازش نقاط با منحنی‌های بزیه به کمک روش گاوس - نیوتن ارائه می‌دهیم . فصل چهارم را به برازش نقاط با منحنی بی‌اسپلاین اختصاص داده‌ایم.

[1] Geometric modeling

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نمایش فونت‌ها

پارامتری‌سازی نقاط دو بعدی و سه بعدی یک گام اساسی در طراحی هندسی به وسیله کامپیوتر [۱] است. با استفاده از پارامتری‌سازی می‌توان نقاط مرزی یک حرف یا کاراکتر را بر حسب یک منحنی پارامتری مشخص توصیف کرد. در حالت کلی دو روش اساسی برای ذخیره فونت‌ها در کامپیوتر وجود دارد.

۱. **روش طرح‌بیتی** [۲]

۲. **روش پیرامون** [۳]

درذخیره سازی فونت‌ها به روش طرح بیتی هر کاراکتر به عنوان یک آرایه از پیکسل‌ها [۴] ذخیره می‌شود. ولی در روش پیرامون با ترکیب نقاط کنترل و منحنی، کاراکتر توصیف می‌شود. نمایش پیرامون فونت مزیت‌های زیادی نسبت به طرح بیتی مانند مقیاس گذاری، برش، انتقال و چرخش دارد(شکل ۱.۱). بنابراین در بسیاری از سیستم‌های نشر رومیزی [۵] شکل حروف در حافظه بر حسب پیرامون آن حرف ذخیره و آن پیرامون بر حسب منحنی‌های بزیه بیان می‌گردد. کاراکترهای فارسی از کاراکترهای زبان‌های دیگر مانند انگلیسی و لاتین متفاوت

[۱] Computer Aided Geometric Design(CAGD)

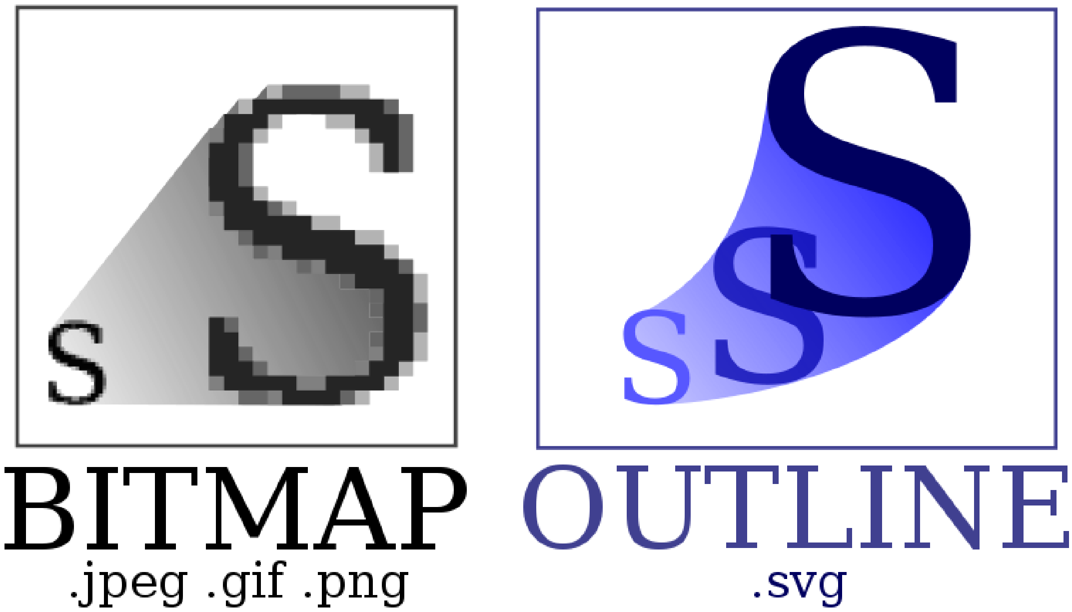
[۲] Bitmap

[۳] Outline

[۴] Pixels

[۵] Desktop publishing systems

هستند، زیرا بر خلاف آن‌ها به‌طور پیوسته از راست به چپ نوشته می‌شوند و هر کاراکتر دو تا چهار شکل مختلف نسبت به موقعیت‌های آن در کلمه دارد. زبان فارسی در فرمت‌های مختلف فونت و شکستگی‌های طبیعی بسیار غنی است که لازم است بیشتر مورد توجه قرار گیرد.



شکل ۱.۱: مقایسه روش ذخیره سازی طرح بیتی و پیرامون

۲.۱ منحنی‌های پارامتری

دو روش رایج نمایش منحنی‌ها و سطوح در مدل‌سازی هندسی، معادلات ضمنی و توابع پارامتری هستند. معادله ضمنی یک منحنی در صفحه xy به‌صورت $f(x,y)=0$ است. این معادله یک رابطه ضمنی بین مختصات x و y از نقاطی که روی منحنی قرار می‌گیرند را توصیف می‌کند. برای یک منحنی، معادله ضمنی با یک مضرب ثابت منحصر بفرد است. به عنوان مثال دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱ دارای معادله‌ای به صورت $f(x,y)=x^2+y^2-1=0$ است (شکل ۲.۱). در توابع پارامتری مختصات نقاط روی منحنی به‌طور جداگانه توسط یک تابع صریح از متغیر مستقل نشان داده می‌شوند.

$$C(u)=(x(u),y(u)),\quad a\leq u\leq b, \tag{۱-۱}$$

بنابراین $C(u)$ یک تابع برداری از متغیر مستقل u است.

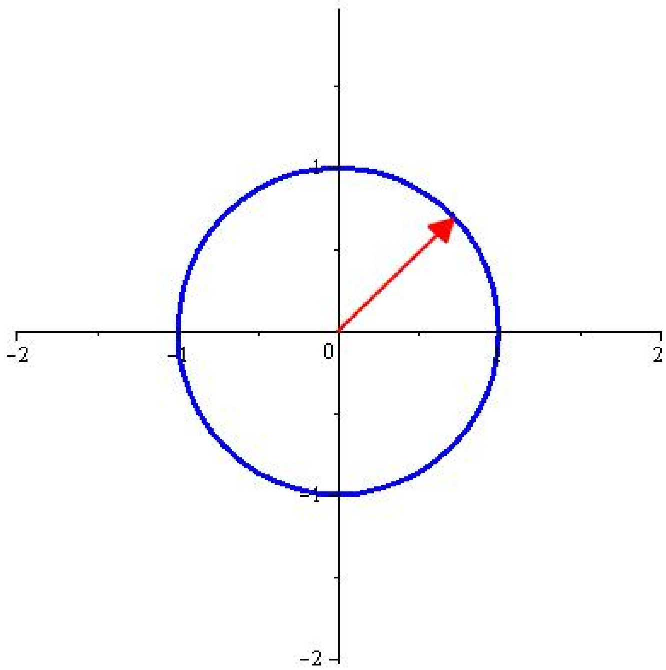
ربع اول دایره نشان داده شده در شکل ۲.۱ به‌صورت تابع پارامتری زیر تعریف می‌شود.

$$x(u) = cos(u),$$
$$y(u) = sin(u), \quad ۰ \leq u \leq \frac{\pi}{۲}.$$

از طرف دیگر با قرار دادن $t = \tan(\frac{u}{۲})$ به نمایش پارامتری زیر می‌رسیم.

$$x(t) = \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲},$$
$$y(t) = \frac{۲t}{۱ + t^۲}, \quad ۰ \leq t \leq ۱.$$

بنابراین نمایش پارامتری یک منحنی یگانه نیست.



شکل ۲.۱: دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع ۱

۳.۱ منحنی‌های چندجمله‌ای و چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌ها یک ابزار مناسب و پرکاربرد در ریاضی می‌باشند، زیرا ساده تعریف می‌شوند و می‌توانند پس از محاسبه سریع توسط سیستم‌های کامپیوتری، یک نمایش تقریبی خوب برای انواع توابع باشند. از آن‌ها به راحتی می‌توان مشتق و انتگرال گرفت و در ضمن می‌توانند جهت تشکیل منحنی‌های اسپلاین که هر تابع را

با هر دقت دلخواه تقریب می‌زنند، بکار گرفته شوند. می‌توان فرم کلی چندجمله‌ای‌ها را به‌صورت زیر در نظر گرفت.

$$P(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + ... + a_1 u + a_0, \quad a_n \neq 0$$

مثال ۱.۳.۱ نمایش توابع پارامتری چندجمله‌ای از درجه یک (یک خط راست) به صورت زیر است.

$$Q(u) = (a_0 + a_1 u, b_0 + b_1 u), \quad u_0 \leq u \leq u_1,$$

و چندجمله‌ای از درجه دو را می‌توان به‌صورت

$$Q(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 \\ b_0 + b_1 u + b_2 u^2 \end{bmatrix},$$

یا

$$Q(u) = P_0 + P_1 u + P_2 u^2,$$

که

$$P_0 = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1, \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

نشان داد.

و چندجمله‌ای از درجه سه به صورت زیر نشان داده می‌شود.

$$Q(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 \\ b_0 + b_1 u + b_2 u^2 + b_3 u^3 \end{bmatrix} = P_0 + P_1 u + P_2 u^2 + P_3 u^3.$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود چندجمله‌ای‌ها، ترکیبات خطی از چندجمله‌ای‌های مقدماتی $\{1, u, u^2, ...u^n\}$ می‌باشند. در واقع هر چند جمله‌ای با درجه کمتر یا مساوی n، می‌تواند به‌صورت فوق نشان داده شود و دلایل آن نیز ساده و به شرح زیر است.

۱-مجموعه چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر یا مساوی n، یک فضای برداری $n+1$ بعدی تشکیل می‌دهند.

۲-مجموعه توابع $\{1, u, u^2, ...u^n\}$ تشکیل یک پایه برای این فضای‌برداری می‌دهند یعنی هر چندجمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی n می‌تواند به صورت یگانه از ترکیب‌خطی این توابع به‌دست آید. این پایه به طور معمول، پایه استاندارد نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱ بستار مجموعه پارامترهایی را که تابع پایه‌ای به ازای آن‌ها غیر صفر است، محمل [۶] تابع گویند.

هدف از بیان مطالب فوق این است که به معرفی یکی دیگر از پایه‌های استفاده شده برای فضای چندجمله‌ای‌ها به نام پایه برنشتاین پرداخته و خواص آن را بررسی کنیم.

۱.۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین

چندجمله‌ای‌های برنشتاین در سال ۱۹۱۲ به وسیله ریاضی‌دان روسی سرگی نتانویچ برنشتاین [۷] معرفی شدند. وی در جریان کار خود روی قضیه تقریب وایرشتراس [۸] به آن‌ها رسید[۶] .

شکل ۳.۱: سرگی نتانویچ برنشتاین

تعریف ۳.۳.۱ $i-$ امین چند جمله‌ای برنشتاین درجه n به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B_i^n(u) = \binom{n}{i} u^i (۱-u)^{n-i},$$

که در آن

$$\binom{n}{i} = \begin{cases} \dfrac{n!}{i!(n-i)!}, & ۰ \le i \le n, \\ ۰, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

[۶] Support

[۷] Sergei Natanovich Berenstein–(March 5,1880 – October 26,1968)

[۸] Weierstrass approximation theorem

مثال ۴.۳.۱ برای حالت $n = ۰$ خواهیم داشت:

$$B_۰^۰(u) = ۱.$$

برای حالت $n = ۱$ خواهیم داشت:

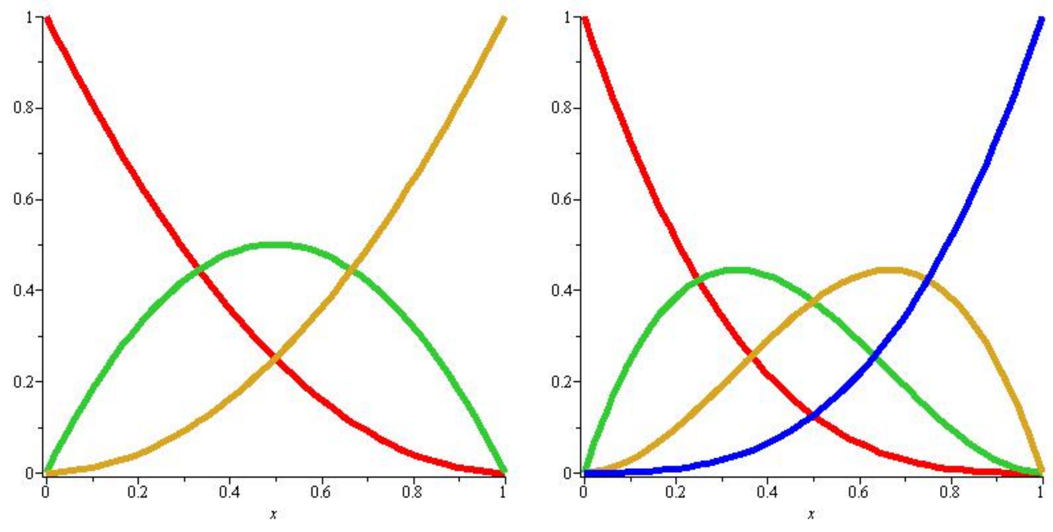
$$B_۰^۱(u) = ۱ - u, B_۱^۱(u) = u.$$

برای حالت $n = ۲$ خواهیم داشت:

$$B_۰^۲(u) = (۱ - u)^۲, B_۱^۲(u) = ۲u(۱ - u), B_۲^۲(u) = u^۲.$$

برای حالت $n = ۳$ خواهیم داشت:

$$B_۰^۳(u) = (۱ - u)^۳, B_۱^۳(u) = ۳u(۱ - u)^۲, B_۲^۳(u) = ۳u^۲(۱ - u), B_۳^۳(u) = u^۳.$$



شکل ۴.۱: چندجمله‌ای‌های برنشتاین برای $n = ۲, ۳$

چندجمله‌ای‌های برنشتاین در گرافیک کامپیوتری نقش مهمی را ایفا می‌کنند و شکل ساده نمایش گرافیکی آن‌ها یک دلیل اهمیت آن‌ها می‌باشد (شکل ۴.۱).

۲.۳.۱ چندجمله‌ای‌های برنشتاین به عنوان پایه‌ای برای فضای برداری چندجمله‌ای‌ها

پایه مرتب استاندارد $\{1, u, u^2, \ldots u^n\}$ یک پایه برای $\mathbb{P}_n$ فضای برداری چندجمله‌ای‌های از درجه حداکثر n می‌باشد. در این قسمت نشان می‌دهیم که چندجمله‌ای‌های برنشتاین درجه n نیزتشکیل یک پایه مرتب برای $\mathbb{P}_n$ می‌دهند. به این منظور کافی است نشان دهیم هر عنصر پایه استاندارد $\{1, u, u^2, \ldots u^n\}$ می‌تواند به صورت ترکیب خطی از چندجمله‌ای‌های برنشتاین نوشته شود.

لم ۵.۳.۱ تبدیل از پایه برنشتاین به پایه استاندارد، برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$ داریم:

$$B_i^n(u) = \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} u^k.$$

اثبات. با توجه به قضیه دوجمله‌ای برای بسط $(1-u)^{n-i}$ داریم:

$$\begin{aligned}
B_i^n(u) &= \binom{n}{i} u^i (1-u)^{n-i} \\
&= \binom{n}{i} u^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (-u)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-i} (-1)^k \binom{n}{i} \binom{n-i}{k} u^{i+k} \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i} u^k \\
&= \sum_{k=i}^{n} (-1)^{k-i} \binom{n}{k} \binom{k}{i} u^k.
\end{aligned}$$

□

لم ۶.۳.۱ تبدیل از پایه استاندارد به پایه برنشتاین، برای هر $i = 0, 1, \ldots, n$ داریم:

$$u^i = \sum_{k=i}^{n} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{n}{i}} B_k^n(u).$$

اثبات.

با استفاده از روش استقرای ریاضی حکم را ثابت می‌کنیم.

(الف) پایه استقراء: حکم برای $i = 0$ به صورت زیر در می‌آید.

$$u^0 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{k}{0}}{\binom{n}{0}} B_k^n(u) = \sum_{k=0}^{n} B_k^n(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k (1-u)^{n-k} = (u + (1-u))^n = 1^n = 1$$