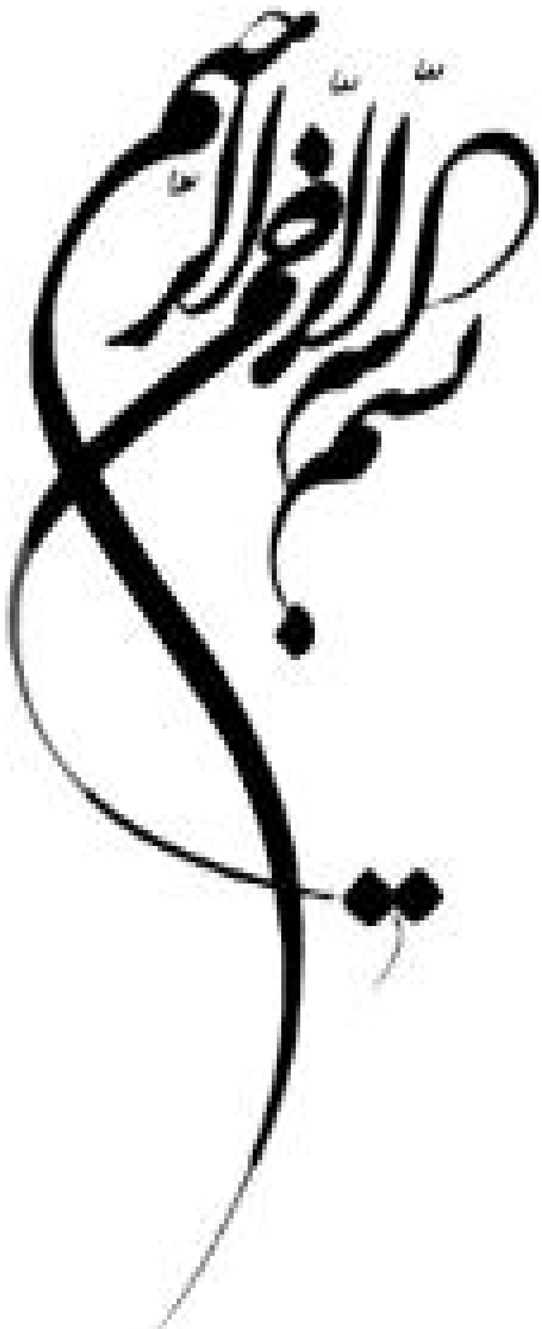
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکدهٔ علوم ریاضی

رسالهٔ ارائه شده

جهت اخذ درجهٔ دکتری در رشتهٔ ریاضی محض

عنوان :

آنالیز هارمونیک مجرد روی گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی

استاد راهنما :

آقای دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی

استاد مشاور :

آقای دکتر مجید میرزاوزیری

به نگارش :

محمد رمضانپور

۱۶ شهریور ۱۳۸۸

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز،

همسر مهربان و

فرزند دلبندم آقا عرفان

قدردانی

حمد و سپاس خداوندی را که زبان از عنایت شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش عاجز. پروردگار متعال را شاکرم که عنایت پیدا و نهانش در تمام زندگی یاریگرم بوده است. از هشتمین بارقهٔ نور، به پاس گرمای نویدبخش حرم امنش که در سردترین ایام زندگی، گرمابخشم بوده است متشکرم.

اکنون که با عنایت خداوند بزرگ مرحلهٔ دیگری از تحصیلاتم را به پایان میرسانم بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از همهٔ اساتید اخلاقی و علمی خود بالاخص جناب آقای دکتر ابراهیمی ویشکی که از خرمن دانششان خوشه‌ها چیده و نکته‌ها آموخته‌ام و افتخار نگارش این مجموعه را مدیون راهنمائیها و نظرات ارزشمند ایشان هستم، ابراز نمایم. از خداوند تبارک و تعالی برای ایشان موفقیت و بهروزی تمنا دارم. همچنین از استاد ارجمند جناب آقای دکتر میرزاوزیری که مشاور من در نگارش این مجموعه بوده‌اند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار سرکار خانم دکتر حجازیان، جناب آقای دکتر صال مصلحیان، جناب آقای دکتر اسحاقی گرجی و جناب آقای دکتر نصر اصفهانی که زحمت مطالعه و داوری این مجموعه را تقبل کرده‌اند بسیار متشکرم.

از تمامی مسئولین محترم کتابخانه، واحد انتشارات، واحد رایانه، ادارهٔ آموزش و تمامی دوستانی که به نحوی از همکاریشان برخوردار بوده‌ام سپاسگزارم.

در پایان از حوصله، همدلی و سعهٔ صدر خانوادهٔ عزیزم مخصوصاً پدر و مادر دلسوز و همسر مهربانم که هر چه دارم از یاری و مساعدت آنهاست قلباً سپاسگزارم.

محمد رمضانپور

شهریور ۱۳۸۸

بسمه تعالی

مشخصات رسالهٔ تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

نام و نام خانوادگی دانشجو : محمد رمضانپور	مقطع تحصیلی : دکتری
استاد راهنما : آقای دکتر حمید رضا ابراهیمی ویشکی	استاد مشاور : آقای دکتر مجید میرزاوزیری
دانشکده : علوم ریاضی و آمار	رشته : ریاضی محض (آنالیز هارمونیک)
تاریخ دفاع : ۱۶ شهریور ۱۳۸۸	تعداد صفحات : ۱۲۳

عنوان رساله :

آنالیز هارمونیک مجرد روی گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی

واژه های کلیدی: *گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی، جبر فون نویمان هاف، عمل، همنمایش یکانی، میانگین پذیری، خاصیت رایتر ، همریختی مدولی، قضیهٔ وندل، ضربگر، مرکز توپولوژیک*

چکیده:

برای یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ دارای همانی تقریبی کراندار، همریختی‌های $\mathcal{A}$-مدولی روی زیر فضاهای درونگرای $\mathcal{A}^*$ را مورد مطالعه قرار داده و نشان می‌دهیم که تمام همریختی‌های $\mathcal{A}$-مدولی روی $\mathcal{A}^*$ نرمالند اگر و فقط اگر $\mathcal{A}$ یک ایده‌آل $\mathcal{A}^{**}$ باشد. چند مشخصه‌سازی برای فشردگی و گسستگی گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ را نیز بدست می‌آوریم. بعلاوه در حالتی که گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ هم‌میانگین پذیر باشد نشان می‌دهیم جبر ضربگرهای $\mathrm{L}^1(\mathbb{G})$ با $\mathrm{M}(\mathbb{G})$ به طور جبری یکریخت یکمتری است. به عنوان یک نتیجه ثابت می‌کنیم $\mathbb{G}$ فشرده است اگر و فقط اگر $\mathrm{LUC}(\mathbb{G}) = \mathrm{WAP}(\mathbb{G})$ و $\mathrm{M}(\mathbb{G}) = \mathcal{Z}(\mathrm{LUC}(\mathbb{G})^*)$ که جواب مثبتی است به سوألی که توسط رونده مطرح شده است.

همچنین فرض کنید α یک عمل چپ گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ روی جبر فون نویمان $\mathfrak{N}$ و U_α یک همنمایش یکانی از $\mathbb{G}$ باشد که $\alpha = \alpha_U$. خواص رایتر P_1 و P_2 را برای دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ معرفی نموده و نشان می‌دهیم دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ میانگین پذیر چپ است اگر و فقط اگر دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ دارای خاصیت رایتر P_1 باشد و دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ دارای خاصیت رایتر P_2 است اگر و فقط اگر همنمایش یکانی U_α دارای خاصیت WCP باشد. حالت خاصی از این احکام اثباتهای نتایج اصلی مقالهٔ داوز و رونده را کوتاهتر می‌کند. به عنوان یک نتیجه داریم؛ همنمایش یکانی U از گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ روی فضای هیلبرت $\mathfrak{H}_U$ میانگن پذیر چپ است اگر و فقط اگر دوتایی $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}_U), \alpha_U)$ دارای خاصیت رایتر P_1 باشد و U دارای خاصیت WCP است اگر و فقط اگر دوتایی $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}_U), \alpha_U)$ دارای خاصیت رایتر P_2 باشد.

امضاء استاد راهنما

فهرست مطالب

پیشگفتار

در راستای گسترش قضیهٔ دوگانی پونتراگن [۱] از حالت گروههای فشردهٔ موضعی جابجایی به گروههای فشردهٔ موضعی دلخواه اولین بار در سال ۱۹۷۳ نظریهٔ جبرهای کک[۲] که به گونه‌ای نضریهٔ گروههای فشردهٔ موضعی را در بردارد توسط ریاضی دانانی چون کک[۳]، ایناک[۴] و شوارتز[۵] مطرح شد، [۱۱].

در حدود سالهای ۱۹۸۵ و ۱۹۸۷ مثالهایی توسط درینفلد[۶] و ورونویچ[۷] ارائه شد که در شرایط یک جبر کک صدق نمی‌کردند ولی خواصی بسیار مشابه جبرهای کک از خود نشان می‌دادند که منجر به تعریف مفاهیمی مانند گروههای کوانتومی جبری و گروههای کوانتومی فشرده شدند.

سرانجام در سال ۲۰۰۰ ویس[۸] و کسترمنز[۹]، [۲۳]، موفق به تعریف مفهوم گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی شدند که هم جبرهای کک و هم گروههای کوانتومی فشرده را در بر داشت.

در [۴۴] و [۴۶] رونده[۱۰] بعضی از نتایج موجود در آنالیز هارمونیک مجرد در مورد جبر گروهی $\mathrm{L}^1(G)$ و

[۱] Pontrjagin duality

[۲] Kac algebra

[۳] G. L. Kac

[۴] M. Enock

[۵] J. M. Schwartz

[۶] V. G. Drinfeld

[۷] S. L. Woronowicz

[۸] S. Vaes

[۹] J. Kustermans

[۱۰] V. Runde

جبر فوریهٔ $\mathrm{A}(G)$ را به گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی گسترش داد. به عنوان مثال او نشان داد که برای هر گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ جبر باناخ $\mathrm{L}^1(\mathbb{G})$ یک ایده‌آل $\mathrm{L}^1(\mathbb{G})^{**}$ است اگر و فقط اگر $\mathbb{G}$ فشرده باشد. این حکم در حالتهای خاص $\mathbb{G}_a = (\mathrm{L}^\infty(G), \Gamma_a, \varphi_a, \psi_a)$ و $\mathbb{G}_s = (\mathrm{VN}(G), \Gamma_s, \varphi_s, \psi_s)$ به ترتیب به این صورت قابل بیان است که $\mathrm{L}^1(G)$ یک ایده‌آل $\mathrm{L}^1(G)^{**}$ است اگر و فقط اگر $\mathbb{G}$ فشرده باشد، [۱۵]، و $\mathrm{A}(G)$ یک ایده‌آل $\mathrm{A}(G)^{**}$ است اگر و فقط اگر G گسسته باشد، [۲۷، قضیهٔ ۳.۷].

در این رساله، که مطالب اصلی آن بر گرفته از [۴۰] و [۴۱] است، نتایج دیگری از آنالیز هارمونیک مجرد روی گروههای فشردهٔ موضعی را به گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی گسترش می‌دهیم.

این رساله مشتمل بر چهار فصل است که در **فصل اول** سعی نمودیم مقدمات مورد نیاز در فصول بعد را جمع آوری کنیم.

در **فصل دوم** به معرفی گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی می‌پردازیم. این فصل را با تعریف جبرهای فون نویمان هاف آغاز می‌کنیم و در بخش دوم این فصل، که از [۴۱] گرفته شده است، عملهای جبرهای فون نویمان هاف روی جبرهای فون نویمان را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و شرایطی معادل میانگین‌پذیری این عملها را ثابت می‌کنیم. سرانجام در بخش سوم این فصل گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در **فصل سوم** ابتدا همریختی‌های مدولی یک جبر باناخ $\mathcal{A}$ دارای همانی تقریبی، با کران یک را مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عنوان مثال برای یک زیر فضای درونگرای $\mathcal{X}$ از $\mathcal{A}^*$ که $\mathcal{A}^* \cdot \mathcal{A} \subseteq \mathcal{X}$ نشان می‌دهیم جبر همهٔ همریختی‌های $\mathcal{A}$-مدولی راست روی $\mathcal{X}$ با $\mathcal{X}^*$ یکریخت جبری یکمتری است. با استفاده از این حکم همریختی های $\mathcal{A}$-مدولی نرمال روی $\mathcal{A}^*$ را مشخص می‌کنیم. در حالت خاص نشان می‌دهیم که یک گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی هم‌میانگین پذیر $\mathbb{G}$ فشرده است اگر و فقط اگر تمام همریختی‌های $\mathrm{L}^1(\mathbb{G})$-مدولی روی $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{G})$ نرمال باشند. همچنین نشان می‌دهیم که یک گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ گسسته است اگر و فقط اگر تمام همریختی‌های $\mathrm{C}_0(\mathbb{G})$-مدولی روی $\mathrm{M}(\mathbb{G})$ نرمال باشند. نتایج این بخش بسیاری از نتایج [۲۵] و [۲۶] را در بردارد.

در بخش دوم این فصل برای گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی هم‌میانگین پذیر $\mathbb{G}$ نشان می‌دهیم که جبر ضربگرهای $\mathrm{L}^1(\mathbb{G})$ با $\mathrm{M}(\mathbb{G})$ بطور جبری یکریخت یکمتری است. این حکم دو نتیجهٔ وندل[۱۱]، [۵۳]، و دریجتی

[۱۱] J. G. Wendel

[۱۲]، [۹]، در مورد جبر ضربگرهای $\mathrm{L}^{1}(G)$ و $\mathrm{A}(G)$ را در بردارد. بعضی روابط بین ضربگرها و عملگرهائی که با انتقالات جابجا می‌شوند را نیز در حالت گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی در این بخش مورد بحث قرار داده‌ایم.

سرانجام در بخش سوم این فصل نشان می‌دهیم که اگر $\mathbb{G}$ یک گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی هم‌میانگین پذیر باشد آنگاه یک همریختی جبری یکمتری مانند Θ از $\mathrm{M}(\mathbb{G})$ به $\mathrm{LUC}(\mathbb{G})^*$ وجود دارد که Θ پوشاست اگر و فقط اگر $\mathbb{G}$ فشرده باشد. از این حکم استفاده کرده و یک پاسخ مثبت به مسئله‌ای که توسط رونده مطرح شده است می‌دهیم. در واقع نشان می‌دهیم اگر $\mathbb{G}$ یک گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی هم‌میانگین پذیر باشد آنگاه $\mathbb{G}$ فشرده است اگر و فقط اگر $\mathrm{LUC}(\mathbb{G}) = \mathrm{WAP}(\mathbb{G})$ و $\Theta(\mathrm{M}(\mathbb{G})) = \mathcal{Z}(\mathrm{LUC}(\mathbb{G})^*)$. بسیاری از نتایج [۲۸] و [۲۹] حالات خاصی از نتایج این بخش هستند.

فرض کنید $\mathfrak{N}$ یک جبر فون نویمان و α یک عمل چپ از گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ روی $\mathfrak{N}$ باشد. در بخش اول **فصل چهارم** خاصیت رایتر P_1 را برای دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ تعریف نموده و نشان می‌دهیم این خاصیت با میانگین پذیری چپ $(\mathfrak{N}, \alpha)$ معادل است. این حکم، احکام [۴، قضیهٔ ۴.۳]، [۳۱، گزارهٔ ۳.۲]، [۸، قضیهٔ ۴.۵] و [۴۸، گزارهٔ ۱.۱۳] را در حالتهای خاص در بردارد. بعنوان نتیجه‌ای از این حکم نشان می‌دهیم هم‌نمایش یکانی U از گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ روی فضای هیلبرت $\mathfrak{H}_U$ میانگین پذیر چپ است اگر و فقط اگر دوتایی $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}_U), \alpha_U)$ دارای خاصیت رایتر P_1 باشد.

برای دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ فرض کنید U_α یک هم‌نمایش یکانی باشد که $\alpha = \alpha_{U_\alpha}$ در بخش دوم این فصل خاصیت رایتر P_2 را برای دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم دوتایی $(\mathfrak{N}, \alpha)$ دارای خاصیت رایتر P_2 است اگر و فقط اگر U_α دارای خاصیت WCP باشد. بعنوان نتیجه‌ای از این حکم نشان می‌دهیم هم‌نمایش یکانی U از گروه کوانتومی فشردهٔ موضعی $\mathbb{G}$ روی فضای هیلبرت $\mathfrak{H}_U$ دارای خاصیت WCP است اگر و فقط اگر دوتایی $(\mathcal{B}(\mathfrak{H}_U), \alpha_U)$ دارای خاصیت رایتر P_2 باشد.

سرانجام در بخش سوم این فصل به بررسی عملهای راست گروههای کوانتومی فشردهٔ موضعی و جبرهای فون نویمان هاف روی جبرهای فون نویمان می‌پردازیم.

[۱۲] A. Derighetti

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازها

در این فصل به بیان مطالبی می‌پردازیم که در فصلهای بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. در طول رساله سعی کرده ایم که تمامی نتایج مورد نیاز در همین مجموعه آورده شود تا خواننده بدون مراجعه به مراجع دیگر بتواند برهان قضایای اصلی را دنبال کند. همچنین برای پرهیز از تکرار و اطالهٔ کلام از ارایهٔ برهان این احکام خودداری کرده و تنها به ذکر مراجع بسنده نموده‌ایم.

۱.۱ جبرهای باناخ

در این بخش بعد از معرفی فضاهای باناخ و عملگرهای از رتبهٔ متناهی، به بررسی خواص زیر فضاهای درونگرای دوگان یک جبر باناخ پرداخته‌ایم. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توانید به مراجع [۵]، [۳۷] و [۴۳] مراجعه نمایید.

۱.۱.۱ فضاهای باناخ

فرض کنید $(\mathcal{X}, \|.\|)$ یک فضای نرمدار [۱] روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. $S \subseteq \mathcal{X}$ را محدب [۲] گوییم هرگاه برای هر $t \in [۰, ۱]$ داشته باشیم $tS + (۱ - t)S \subseteq S$. پوستهٔ محدب [۳] S را با $co(S)$ نمایش داده و به صورت

$$co(S) = \{\sum_{i=۱}^{n} t_i x_i \; ; \; \sum_{i=۱}^{n} t_i = ۱, t_i \geq ۰, x_i \in S\}$$

تعریف می‌کنیم. توپولوژی روی $\mathcal{X}$ را با توپولوژی نرم می‌شناسیم و برای هر $k \in \mathbb{R}^+$ فرض می‌کنیم

$$\mathcal{X}_{[k]} = \{x \in \mathcal{X}; \; \|x\| \leq k\} \quad \text{و} \quad \mathcal{X}_{(k)} = \{x \in \mathcal{X}; \; \|x\| < k\}.$$

اگر $S \subseteq \mathcal{X}$ آنگاه بستار S در این توپولوژی را با $\overline{S}$، زیر فضای تولید شده توسط S، یعنی مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی عناصر S، را با $< S >$ و زیر فضای بستهٔ تولید شده توسط S را با $[S]$ نمایش می‌دهیم پس $[S] = \overline{< S >}$. همچنین همگرایی تور $\{x_i\} \subseteq \mathcal{X}$ به $x \in \mathcal{X}$ در این توپولوژی را به صورت $x_i \to x$ نمایش می‌دهیم.

فرض کنید $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشد تبدیل خطی $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ را کراندار [۴] گوییم هرگاه $C \in \mathbb{R}^+$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $\|T(x)\| \leq C\|x\|$. اگر $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ یک تبدیل خطی کراندار باشد آنگاه نرم عملگری [۵] T را به صورت

$$\|T\| = \inf\{C; \; \forall x \in \mathcal{X}, \; \|T(x)\| \leq C\|x\|\}$$

تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ مجموعهٔ همهٔ تبدیلات خطی و کراندار از $\mathcal{X}$ به $\mathcal{Y}$ باشد. در این صورت $\mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ به همراه نرم عملگری همواره یک فضای نرمدار است و داریم

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|; \; x \in \mathcal{X}_{[۱]}\}.$$

---

[۱] Normed space

[۲] Convex

[۳] Convex hull

[۴] Bounded

[۵] Operator norm

برای راحتی بیشتر در این رساله $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{X})$ را با $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ نمایش می‌دهیم. هر تبدیل خطی از فضای نرمدار $\mathcal{X}$ به $\mathbb{C}$ را یک تابعک خطی روی $\mathcal{X}$ نامیده و مجموعهٔ تمام تابعکهای خطی و کراندار روی $\mathcal{X}$ را دوگان[۶] $\mathcal{X}$ گوییم و آن را با $\mathcal{X}^*$ نمایش می‌دهیم. به عبارت ساده‌تر $\mathcal{X}^* = \mathcal{B}(\mathcal{X},\mathbb{C})$. بنابراین $\mathcal{X}^*$ به همراه نرم عملگری یک فضای نرمدار است.

هر گاه $(\mathcal{X}, \|.\|)$ یک فضای نرمدار باشد آنکاه تابع

$$d : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}^+, \quad d(x,y) = \|x-y\|$$

یک متر روی $\mathcal{X}$ است. هرگاه $(\mathcal{X}, d)$ یک فضای متریک کامل باشد آنگاه $(\mathcal{X}, \|.\|)$ را یک فضای باناخ[۷] گوییم.

فرض کنید $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ سه فضای نرمدار باشند نگاشت $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ را دو خطی گوییم هر گاه نسبت به هر یک از مؤلفه‌ها خطی باشد. تبدیل دو خطی $T : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ را کراندار[۸] گوییم هرگاه $C \in \mathbb{R}^+$ چنان موجود باشد که برای هر $x \in \mathcal{X}$ و هر $y \in \mathcal{Y}$ داشته باشیم $\|T(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|$. در این صورت نرم عملگری T را به صورت

$$\|T\| = \inf\{C;\ \ \forall x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y},\ \ \|T(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\|\}$$

تعریف می‌کنیم و فرض می‌کنیم $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{Z})$ مجموعهٔ همهٔ تبدیلات دو خطی و کراندار از $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ به $\mathcal{Z}$ باشد در این صورت $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{Z})$ به همراه نرم عملگری همواره یک فضای نرمدار است و داریم

$$\|T\| = \sup\{\|T(x,y)\|;\ x \in \mathcal{X}_{[۱]}, y \in \mathcal{Y}_{[۱]}\}.$$

گزاره ۱.۱.۱. (]۴۳، قضایای ۴.۱ و ۴.۳[) *فرض کنید $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ سه فضای نرمدار باشند در این صورت*

- *اگر $\mathcal{Y}$ فضایی باناخ باشد آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ نیز فضایی باناخ است؛*
- *اگر $\mathcal{Z}$ فضایی باناخ باشد آنگاه $\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y};\mathcal{Z})$ نیز فضایی باناخ است؛*
- *$\mathcal{X}^*$ فضایی باناخ است و برای هر $x \in \mathcal{X}$ داریم $\|x\| = \sup\{|f(x)|;\ f \in \mathcal{X}^*_{[۱]}\}$.*

[۶] Dual

[۷] Banach space

[۸] Bounded

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ و $\mathcal{M}$ یک زیر فضای $\mathcal{X}$ باشد قرار دهید:

$$\mathcal{M}^{\perp} = \{f \in \mathcal{X}^* \; ; \;\; f|_{\mathcal{M}} = ۰\},$$

$$\mathcal{X}/\mathcal{M} = \{x + \mathcal{M} \; ; \;\; x \in \mathcal{X}\},$$

$$\|x + \mathcal{M}\| = \inf\{\|x + m\| \; ; \;\; m \in \mathcal{M}\}.$$

هرگاه $\mathcal{M}$ بسته نیز باشد آنگاه $\mathcal{X}/\mathcal{M}$ با نرم فوق یک فضای باناخ خواهد بود.

فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند و $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. گوییم

۱. T یکمتری[۹] است هرگاه برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $\|Tx\| = \|x\|$؛

۲. T انقباضی[۱۰] است هرگاه برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $\|Tx\| \leq \|x\|$؛

۳. T یکریختی[۱۱] است هرگاه T یک به یک و پوشا باشد؛

۴. T نگاشت خارج قسمتی[۱۲] است هرگاه نگاشت $\bar{T} : \mathcal{X}/\ker T \to \mathcal{Y}$ یکمتری باشد.

به عنوان مثالی از فضاهای باناخ و یکریختی‌های بین آنها به معرفی فضاهای L^p می‌پردازیم .

فرض کنید $(X, \mathscr{M}, \mu)$ یک فضای اندازه باشد اندازهٔ μ را σ-متناهی گوییم هرگاه X اجتماع حداکثر شمارش پذیری از مجموعه‌های با اندازهٔ متناهی باشد. گوییم خاصیت $P(x)$ روی X تقریباً همه جا برقرار است و می نویسیم $P(x)\;\; a.e$ هرگاه

$$\mu(\{x \in X \; ; \; \sim P(x)\}) = ۰.$$

تابع $f : X \to \mathbb{C}$ را اندازه‌پذیر گوییم هرگاه برای هر مجموعهٔ باز A در $\mathbb{C}$ داشته باشیم $f^{-۱}(A) \in \mathscr{M}$.

فرض کنید f یک تابع اندازه‌پذیر روی X باشد و $p \in [۱, \infty)$ قرار دهید

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{۱}{p}}$$

$$\|f\|_\infty = \inf\{c \geq ۰ \; ; \;\; |f(x)| \leq c \quad a.e\}.$$

[۹] Isometry

[۱۰] Contractive

[۱۱] Isomorphism

[۱۲] Quetient map

فرض کنید $[f]=\{g\,;\ f(x)=g(x)\ \ a.e\}$ و فضای $\mathrm{L}^p(X,\mu)$ را برای هر $p\in[۱,\infty]$ به صورت

$$\mathrm{L}^p(X,\mu)=\{[f];\ f:X\to\mathbb{C},\ \text{تابعی اندازه‌پذیر است}\ f,\ \|f\|_p<\infty\}$$

تعریف کنید. در این صورت $\mathrm{L}^p(X,\mu)$ فضایی باناخ خواهد بود، [۱۴، قضایای ۶.۶ و ۶.۸].

گزاره ۲.۱.۱. ([۱۴، قضایای ۶.۱۴ و ۶.۱۵]) *فرض کنید* $(X,\mathscr{M},\mu)$ *یک فضای اندازه باشد در این صورت*

- *اگر* $p,q\in(۱,\infty)$ *و* $\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}=۱$ *آنگاه* $\mathrm{L}^p(X,\mu)^*=\mathrm{L}^q(X,\mu)$؛
- *اگر* μ *یک اندازهٔ* σ*-متناهی باشد آنگاه* $\mathrm{L}^{۱}(X,\mu)^*=\mathrm{L}^\infty(X,\mu)$.

فرض کنید X یک مجموعه و $\mathfrak{F}$ یک خانوادهٔ ناتهی از نگاشتهای $f:X\to Y_f$ باشد، که هر Y_f یک فضای توپولوژیک است. توپولوژی ضعیف تولید شده توسط خانوادهٔ $\mathfrak{F}$ روی X کوچکترین توپولوژی روی X است که نسبت به آن همهٔ اعضای $\mathfrak{F}$ پیوسته‌اند. توپولوژی فوق را برای سادگی با نام $\mathfrak{F}$-توپولوژی می‌شناسیم.

اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد $\mathcal{X}^*$-توپولوژی روی $\mathcal{X}$ را توپولوژی ضعیف روی $\mathcal{X}$ گوییم. در این رساله $\mathcal{X}$ مجهز به توپولوژی ضعیف را به صورت $(\mathcal{X},\mathrm{w})$ نمایش می‌دهیم. بستار $S\subseteq\mathcal{X}$ در این توپولوژی را به صورت $\overline{S}^{\mathrm{w}}$ نمایش داده و همگرایی در این توپولوژی را همگرایی ضعیف گوییم. اگر تور $\{x_i\}\subseteq\mathcal{X}$ در $\mathcal{X}$ همگرای ضعیف به $x\in\mathcal{X}$ باشد، آنرا با نماد $x_i\xrightarrow{\mathrm{w}}x$ نشان می‌دهیم. پس $x_i\xrightarrow{\mathrm{w}}x$ اگر و فقط اگر برای هر $f\in\mathcal{X}^*$ داشته باشیم $f(x_i)\to f(x)$. توپولوژی ضعیف روی $\mathcal{X}$ همواره از توپولوژی نرم ضعیفتر است.

گزاره ۳.۱.۱. ([۴۳، قضیهٔ ۳.۱۲]) *فرض کنید* $\mathcal{X}$ *یک فضای نرمدار و* $E\subseteq\mathcal{X}$ *محدب باشد آنگاه* $\overline{E}^{\mathrm{w}}=\overline{E}$.

قضیه ۴.۱.۱. (هان- باناخ[۱۳])([۱۴، قضیهٔ ۵.۸]) *فرض کنید* $\mathcal{X}$ *یک فضای نرمدار،* $\mathcal{M}$ *یک زیرفضای* $\mathcal{X}$ *و* $f\in\mathcal{M}^*$ *در این صورت* $F\in\mathcal{X}^*$ *وجود دارد که* $F|_{\mathcal{M}}=f$ *و* $\|F\|=\|f\|$.

فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد و برای هر $x\in\mathcal{X}$ عنصر $\hat{x}\in\mathcal{X}^{**}$ را برای هر $f\in\mathcal{X}^*$ به صورت $\hat{x}(f)=f(x)$ تعریف کنید. در این صورت نگاشت $x\mapsto\hat{x}:\mathcal{X}\to\mathcal{X}^{**}$ یک یکمتری خطی است، [۱۴، قضیهٔ ۵.۸]. قرار دهید

$$\widehat{\mathcal{X}}=\{\hat{x};\ x\in\mathcal{X}\}.$$

---

[۱۳] Hahn - Banach

چون $\mathcal{X}^{**}$ یک فضای باناخ است لذا $\overline{\widehat{\mathcal{X}}}$ یک زیرفضای باناخ $\mathcal{X}^{**}$ خواهد بود و نگاشت$\widehat{\ }$، $\mathcal{X}$ را به عنوان یک زیر فضای چگال در $\overline{\widehat{\mathcal{X}}}$ می‌نشاند. $\overline{\widehat{\mathcal{X}}}$ را تتمیم[۱۴] $\mathcal{X}$ گوییم. در حالت خاص اگر $\mathcal{X}$ خود فضایی باناخ باشد خواهیم داشت $\overline{\widehat{\mathcal{X}}} = \mathcal{X}$. فضای باناخ $\mathcal{X}$ را بازتابی[۱۵] گوییم هرگاه نگاشت$\widehat{\ }$پوشا باشد. به عبارت ساده‌تر $\widehat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}^{**}$. از این به بعد $x \in \mathcal{X}$ را با $\hat{x} \in \mathcal{X}^{**}$ و لذا $\mathcal{X}$ را با $\widehat{\mathcal{X}}$ یکی می‌گیریم.

اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد $\mathcal{X}$-توپولوژی روی $\mathcal{X}^*$ را توپولوژی ضعیف* روی $\mathcal{X}^*$ گوییم. در این رساله $\mathcal{X}^*$ مجهز به توپولوژی ضعیف* را به صورت $(\mathcal{X}^*, \mathrm{w}^*)$ نمایش می‌دهیم. بستار $S \subseteq \mathcal{X}^*$ در این توپولوژی را به صورت $\overline{S}^{\mathrm{w}^*}$ نمایش داده و همگرایی در این توپولوژی را همگرایی ضعیف* گوییم. اگر تور $\{f_i\} \subseteq \mathcal{X}^*$ در $\mathcal{X}^*$ همگرای ضعیف* به $f \in \mathcal{X}^*$ باشد، آنرا با نماد $f_i \xrightarrow{\mathrm{w}^*} f$ نشان می‌دهیم. پس $f_i \xrightarrow{\mathrm{w}^*} f$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathcal{X}$ داشته باشیم $f_i(x) \to f(x)$. توپولوژی ضعیف* روی $\mathcal{X}^*$ همواره از توپولوژی ضعیف روی آن ضعیفتر است.

قضیه ۵.۱.۱. (باناخ - آلاقلو[۱۶])([۱۴، قضیهٔ ۵.۱۸]) *اگر $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد آنگاه $\mathcal{X}^*_{[1]}$، فشردهٔ ضعیف* است.*

قضیه ۶.۱.۱. (گلدشتاین[۱۷])([۷، گزارهٔ ۵.۴.۱]) *فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرمدار باشد در این صورت*

- *برای هر $k \in \mathbb{R}^+$ داریم $\overline{\mathcal{X}_{[k]}}^{\mathrm{w}^*} = \mathcal{X}^{**}_{[k]}$؛*
- $\overline{\mathcal{X}}^{\mathrm{w}^*} = \mathcal{X}^{**}$.

فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهایی نرمدار باشند. عملگر منحصربفرد $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ وجود دارد که $\|T^*\| = \|T\|$ و برای هر $f \in \mathcal{Y}^*$ داریم $T^*(f) = f \circ T$، [۴۳، قضیهٔ ۴.۱۰]. T^* را الحاق[۱۸] T گوییم. واضح است که T^* همواره نرمال است یعنی $T^* : (\mathcal{Y}^*, \mathrm{w}^*) \to (\mathcal{X}^*, \mathrm{w}^*)$ پیوسته است.

---

[۱۴] Completion

[۱۵] Reflexive

[۱۶] Banach - Alaoglu

[۱۷] Goldestein

[۱۸] Adjoint

گزاره ۷.۱.۱. ([۴۳، قضیهٔ ۴.۱۴]) *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهایی باناخ باشند و $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. در این صورت موارد زیر با هم معادلند:*

- $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$ *بسته است؛*
- $T^*(\mathcal{Y}^*) \subseteq \mathcal{X}^*$ *بستهٔ ضعیف* است؛*
- $T^*(\mathcal{Y}^*) \subseteq \mathcal{X}^*$ *بسته است.*

گزارهٔ زیر نتیجهٔ قضیه هان - باناخ ۴.۱.۱ است.

گزاره ۸.۱.۱. ([۱۰، رابطهٔ A.۲.۱]) *اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند و $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ آنگاه موارد زیر با هم معادلند:*

- T *یکمتری است؛*
- T^* *یک نگاشت خارج قسمتی است.*

گزاره ۹.۱.۱. ([۱۰، روابط A.۲.۳ و A.۲.۲]) *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای نرمدار باشند و $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. موارد زیر را در نظر بگیرید:*

(الف) T *یک نگاشت خارج قسمتی است؛*

(ب) T^* *یکمتری است.*

در این صورت (الف) $\Leftarrow$ (ب). اگر $\mathcal{X}$ یک فضای باناخ باشد دو مورد با هم معادلند.

فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهایی باناخ باشند در این صورت گوییم $T \in \mathcal{B}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$

۱. از رتبه متناهی[۱۹] است هرگاه $T(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$ دارای بعد متناهی باشد؛

[۱۹] Finite rank

۲. فشرده[۲۰] است هرگاه بستار $T(\mathcal{X}_{[1]})$ در $\mathcal{Y}$ فشرده باشد؛

۳. فشردهٔ ضعیف[۲۱] است هرگاه بستار $T(\mathcal{X}_{[1]})$ در $\mathcal{Y}$ فشردهٔ ضعیف باشد.

مجموعهٔ همهٔ عملگرهای فشرده و از رتبهٔ متناهی از فضای باناخ $\mathcal{X}$ به فضای باناخ $\mathcal{Y}$ را به ترتیب با $\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ و $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ نمایش می‌دهیم و هرگاه $\mathcal{X}=\mathcal{Y}$ برای سادگی می‌نویسیم $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ و $\mathcal{F}(\mathcal{X})$.

گزاره ۱۰.۱.۱. ([۴۳، قضیهٔ ۴.۱۸ و ۴.۱۹]) *فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهایی باناخ باشند در این صورت*

- $\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})\subseteq\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$؛
- *اگر* $T\in\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *و* $T(\mathcal{X})\subseteq\mathcal{Y}$ *بسته باشد آنگاه* $T\in\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$؛
- $T\in\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ *اگر و فقط اگر* $T^*\in\mathcal{K}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$.

حکم زیر نتیجه‌ای از دو گزارهٔ قبل است که در فصلهای بعدی به آن نیاز داریم به همین خاطر اثبات آن را ذکر می‌کنیم.

نتیجه ۱۱.۱.۱. *اگر $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ فضاهایی باناخ باشند آنگاه $T\in\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ اگر و فقط اگر $T^*\in\mathcal{F}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$.*

برهان. فرض کنید $T\in\mathcal{F}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ بنابراین $T\in\mathcal{K}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ و چون $T(\mathcal{X})\subseteq\mathcal{Y}$ دارای بعد متناهی است پس بسته است. بنابراین از گزاره‌های ۱۰.۱.۱ و ۷.۱.۱ نتیجه می‌شود که $T^*\in\mathcal{K}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$ و $T^*(\mathcal{Y}^*)\subseteq\mathcal{X}^*$ بسته است. بنابراین گزارهٔ ۱۰.۱.۱ نتیجه می‌دهد که $T^*\in\mathcal{F}(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)$. عکس مطلب از اینکه $T^{**}\in\mathcal{F}(\mathcal{X}^{**},\mathcal{Y}^{**})$، T^{**} نرمال است و $T^{**}|_{\mathcal{X}}=T$ نتیجه می‌شود. □

فرض کنید $\mathcal{X}$ و $\mathcal{Y}$ دو فضای باناخ، $y\in\mathcal{Y}$ و $f\in\mathcal{X}^*$. در این صورت $T_{y,f}\in\mathcal{B}(\mathcal{X},\mathcal{Y})$ را برای هر $x\in\mathcal{X}$ به صورت

$$T_{y,f}(x)=f(x)y$$

[۲۰] Compact

[۲۱] Weakly compact

تعریف می‌کنیم واضح است که $T_{y,f} \in \mathcal{F}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$ از رتبهٔ **یک** است. می‌توان نشان داد که

$$\mathcal{F}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y}) =< T_{y,f}\ ;\ \ f \in \mathfrak{X}^*, y \in \mathcal{Y} > \quad \text{و} \quad \overline{\mathcal{F}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})} \subseteq \mathcal{K}(\mathfrak{X}, \mathcal{Y})$$

که تساوی در حالت کلی برقرار نیست؛ بعنوان مثال [۳۳، صفحهٔ ۲۱] را ببینید. تساوی برای فضاهای هیلبرت برقرار است که به آن اشاره خواهد شد.

۲.۱.۱ جبرهای باناخ

فرض کنید $\mathcal{A}$ یک جبر روی میدان $\mathbb{C}$ باشد. فضای برداری $\mathcal{A}$ به همراه ضرب

$$a.b = ba \quad (a, b \in \mathcal{A})$$

نیز یک جبر است که آن را با $\mathcal{A}^{op}$ نمایش می‌دهیم. جبر $\mathcal{A}$ را جابجایی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $xy = yx$. جبر $\mathcal{A}$ را یکدار[۲۲] گوییم هرگاه عنصر ناصفری که آن را با ۱ نمایش می‌دهیم موجود باشد که برای هر $x \in \mathcal{A}$ داشته باشیم $x۱ = ۱x = x$. جبر $\mathcal{A}$ را وفادار[۲۳] چپ گوییم هرگاه برای هر $a \in \mathcal{A}$

$$a\mathcal{A} = \{ab;\ b \in \mathcal{A}\} = \{۰\}$$

ایجاب کند $a = ۰$. بطور مشابه می‌توان وفادار راست را تعریف کرد. جبر $\mathcal{A}$ را وفادار گوییم هرگاه وفادار چپ و وفادار راست باشد.

زیرفضای $\mathcal{X}$ از جبر $\mathcal{A}$ را یک زیر جبر $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه $\mathcal{X}$ تحت ضرب بسته باشد. زیر جبر $\mathcal{I}$ از $\mathcal{A}$ را یک ایده آل[۲۴] چپ $\mathcal{A}$ گوییم هرگاه برای هر $x \in \mathcal{A}$ و هر $a \in \mathcal{I}$ داشته باشیم $xa \in \mathcal{I}$. ایده‌آل راست به طور مشابه تعریف می‌شود. $\mathcal{I}$ را یک ایده‌آل $\mathcal{A}$ گوییم اگر یک ایده‌آل راست و یک ایده‌آل چپ $\mathcal{A}$ باشد.

فضای نرمدار $(\mathcal{A}, \|.\|)$ را یک جبر نرمدار[۲۵] گوییم هرگاه $\mathcal{A}$ یک جبر بوده و برای هر $x, y \in \mathcal{A}$ داشته باشیم

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\|.$$

[۲۲] Unital

[۲۳] Faithful

[۲۴] Ideal

[۲۵] Normed algebra