
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی گرایش کاربردی

عنوان:

استفاده از تکنیک مشتق‌گیری الگوریتمی برای محاسبه فرم‌های چندخطی در آنالیز انشعاب‌های سیستم‌های دینامیکی

استاد راهنما:
دکتر رضا خوش‌سیر

استاد مشاور:
دکتر مهدی قاسمی

پژوهشگر:
فاطمه محمدی

خرداد ماه ۱۳۸۹

تشکر و قدردانی

خدایا تو را سپاس که مرا در دایره امکان نهادی و نقش علم را بر دفتر اندیشه‌ام کشیدی و چشمه‌سار زلال دانش و معرفتت را ارزانی‌ام داشتی تا در برهوت نادانی سیراب‌گر وجودم باشد.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگی‌ام، پدر و مادر عزیزم، که مرا به جان پروردند و امیدرسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

صمیمانه‌ترین مراتب سپاس خود را به استاد گرامی آقای دکتر رضا خوش‌سیر تقدیم نموده، که حضور ایشان به عنوان یک پشتوانه علمی همیشه مرا در پیچ و خم‌های راه علم یاری کرده است و آنچه که در این پژوهش به‌دست آورده‌ام بی‌مدد ایشان ممکن نبود.

از آقای دکتر مهدی قاسمی به عنوان استاد مشاور که با نظرات و رهنمودهای ارزشمندشان مرا یاری نمودند سپاسگزارم.

از آقای دکتر محمد شفیع دهاقین و آقای دکتر علیرضا امینی هرندی که زحمت بازخوانی و داوری این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

مراتب قدردانی خود را ازآقای دکتر حسین منصوری مدیر گروه ریاضی کاربردی و خانم دکتر آهنجیده نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دانشکده به عمل می‌آورم.

در پایان از دوستان و همکلاسی‌های عزیزم که در این مدت مرا صمیمانه همراهی کردند، سپاسگزارم و از خداوند متعال موفقیت روز افزون آنان را خواهانم.

فاطمه محمدی نافچی

خردادماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

دو موجود مقدس،

آنان که ناتوان شدند تا من به توانایی برسم، موهایشان سپید شد تا من در اجتماع رو سپید شوم و عاشقانه سوختند تا روشنگر راهم باشند و گرمابخش وجودم.

پدرم و مادرم

و تقدیم به:

آنان که به من آموختند، بویژه استاد ارجمندم

دکتر رضا خوش‌سیر

چکیده

تئوری سیستم‌های دینامیکی یک شاخه کلاسیک از ریاضیات است که با مدل‌های ریاضی برای سیستم‌هایی که شامل زمان هستند و برحسب قاعده خاصی تغییر می‌کنند سروکار دارد.
اگر در یک سیستم دینامیکی پارامترها تغییر کنند، ممکن است تغییرات کیفی یا انشعابی در سیستم اتفاق بیافتد. با استفاده از آنالیز انشعاب‌ها می‌توان رفتارهای متفاوت یک سیستم دینامیکی را پیش‌بینی کرد.
در این پایان‌نامه، انشعاب‌های موضعی و فرم‌های توپولوژیکی متناظر آن‌ها را بررسی می‌کنیم. با استفاده از روش مشتق‌گیری الگوریتمی، فرم‌های چندخطی که در ضرایب فرم نرمال ظاهر می‌شوند را محاسبه سپس دقت و سرعت این روش را با دو روش تفاضلات متناهی و مشتق‌گیری نمادی مقایسه می‌کنیم. بنابراین در روش مشتق‌گیری الگوریتمی ضرایب فرم نرمال به‌طور دقیق محاسبه می‌شوند و زمان سپری شده با افزایش مرتبه تکرار J به‌طور خطی رشد می‌کند.

کلمات کلیدی

روش تفاضلات متناهی، روش مشتق‌گیری نمادی، روش مشتق‌گیری الگوریتمی، ضرایب فرم نرمال انشعابات، انشعابات هم‌بعد–۱، انشعابات هم‌بعد–۲.

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

انشعاب Flip	PD
انشعاب Fold-Flip	$LPPD$
انشعاب Niemark-Sacker	NS
انشعاب نقطه‌حدی	LP
به ازای هر	$\forall$
ترانهاده ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$	A^T
تفاضلات متناهی	FD
حد	$\lim$
خطای قطع‌کردن	e_t
خطای گردکردن	e_r
زیر مجموعه	$\subset$
ضرب اسکالر	$< . , . >$
عملگر همانی	I
فضای برداری اقلیدسی n بعدی	R^n
گرادیان	∇
مرتبه x	$O(x)$
متعلق است به	$\in$
مجموع	$\sum$
مجموعه اعداد مختلط	$\mathbb{C}$

مجموعه اعداد حقیقی	$\mathbb{R}$
مشتقات جزئی	∂
مشتق‌گیری الگوریتمی	AD
مشتق‌گیری نمادی	SD
مینیمم	Min
نرم	$\|\|.\|\|$
وجود دارد	$\exists$

پیشگفتار

آنالیز انشعاب‌ها روشی برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی گسسته و پیوسته است که این تحلیل انشعابی معمولاً از نقاط ثابت یک سیستم به صورت

$$f^{(J)}(x,\alpha) = \underbrace{f(f(f(\cdots f}_{J\ \text{بار}}(x,\alpha)\cdots,\alpha),\alpha),\alpha).$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $\alpha \in \mathbb{R}^p$ شروع می‌شود. با تغییر یک پارامتر، کنترل یک پارامتر، ممکن است یک انشعاب هم‌بعد–۱ از نقاط ثابت روی خم نقاط ثابت ایجاد شود. این نقاط انشعابی متناظر با مقدار ویژه‌های ماتریس ژاکوبین $A = f^{(J)}$ با اندازه ۱ ($|\mu| = 1$) می‌باشند.

سه انشعاب هم‌بعد–۱ از نقاط ثابت وجود دارد:

۱) انشعاب $Fold$، ۲) انشعاب $Flip$ و ۳) انشعاب $Niemark - Sacker$.

در صورت پیدا شدن نقطه انشعابی هم‌بعد–۱، می‌توانیم با تغییر ۲ پارامتر به‌طور همزمان یک خم را محاسبه کنیم که نقاط انشعابی روی این خم را انشعاب هم‌بعد–۲ از نقاط ثابت می‌نامیم. نقاط انشعابی هم‌بعد–۲ در حالات زیر اتفاق می‌افتند:

۱) ضرایب فرم نرمال بحرانی از انشعابات هم‌بعد–۱ صفر شوند.

۲) مقدار ویژه‌های بیشتری روی دایره یکه قرار گیرند.

۳) حالت‌های $Resonance$ برای انشعاب $Niemark - Sacker$ رخ دهد.

در همسایگی نقاط انشعاب می‌توانیم سیستم را با تحویل روی منیفلد مرکزی به سیستم ساده‌تری تبدیل کنیم. سیستم‌های دینامیکی تحویل شده وابسته به ضرایبی موسوم به ضرایب فرم نرمال بحرانی می‌باشند. فرم‌های نرمال و ضرایب بحرانی این فرم‌ها در [۳،۴،۵،۱۰،۱۲،۳۰،۳۲،۳۴] شرح داده شده

است. برای محاسبه ضرایب فرم نرمال روی منیفلد مرکزی سه روش مشتق‌گیری الگوریتمی، مشتق‌گیری نمادی و تفاضلات متناهی ارائه داده شده است، که روش مشتق‌گیری الگوریتمی روشی بسیار مؤثر، با سرعت و دقت بالا برای محاسبه چنین ضرایب نرمال می‌باشد. از این پس به جای مشتق‌گیری الگوریتمی، مشتق‌گیری نمادی و تفاضلات متناهی به ترتیب از نمادهای AD، SD و FD استفاده می‌کنیم.

نخستین بار گریوانک[۱] [۲۵] پایه‌ای اساسی از مشتق‌گیری الگوریتمی را با استفاده از کدگذاری روی تابع f و قاعده زنجیره‌ای معرفی کرد. ریچ و هیل[۲] [۳۶] یک روش محدود در $MATLAB$ را که قادر است مشتق‌گیری الگوریتمی را از یک بیان ساده به‌وسیله یک رشته کاراکترها تعریف کند، فراهم کردند. کُلمن و ورما[۳] [۱۵،۱۶] مشتق‌گیری الگوریتمی در نرم‌افزار $ADMAT$ را برای روش‌های پسرو و پیشرو مشتق‌گیری برای مشتقات مرتبه اول، دوم و ژاکوبین معرفی کردند. این افراد با توسعه نرم افزار $ADMAT$ به صورت گرافیکی آن را با نام جدید $ADMIT$ [۱۷] ارائه کردند و اخیراً نرم‌افزار $ADiMat$ با ترکیبی از دو روش اجرائی $transformation/operator - overloding$ [۳۷] برای اجرای روش مشتق‌گیری الگوریتمی ارائه کردند. برای محاسبه مشتقات مرتبه اول با استفاده از مشتق‌گیری الگوریتمی، کاملترین و مؤثرترین نرم‌افزار داده شده نرم افزار MAD [۲۳] است. اما روش بسیار مؤثر، روشی است که مشتقات مرتبه اول تا پنجم را با استفاده از ضرایب سری تیلر در نرم‌افزار $CL\_MATCONT$ [۲۱] در $MATLAB$ محاسبه می‌کند که ما این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این پایان‌نامه در چهار فصل تدوین شده است و در آن روش‌های مشتق‌گیری عددی برای محاسبه ضرایب فرم نرمال نقاط انشعابی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند. در فصل اول سیستم‌های

---

[۱] Griewank

[۲] Rich and Hill

[۳] Coleman and Verma

دینامیکی گسسته و پیوسته را معرفی و ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصل دوم نقاط انشعابی هم‌بعد-1 و هم‌بعد-2 و فرم‌های نرمال این نقاط را در سیستم‌های دینامیکی گسسته بررسی می‌کنیم. در فصل سوم سه روش مشتق‌گیری تفاضلات متناهی، نمادی و الگوریتمی شامل مشتقات مرتبه اول تا پنجم را برای نگاشت تکراری f معرفی و ضرایب فرم نرمال نقاط انشعابی را با استفاده از این سه روش محاسبه می‌کنیم. در فصل چهارم دقت و سرعت سه روش FD، SD و AD را در محاسبه ضرایب فرم نرمال انشعاب‌ها با ذکر چند مدل دینامیکی مقایسه می‌کنیم.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر سیستم‌های دینامیکی گسسته و پیوسته

در این فصل ابتدا یک سیستم دینامیکی را تعریف می‌کنیم سپس مدارها، مجموعه‌های پایا، پایداری و هم‌ارزی توپولوژیکی سیستم‌های دینامیکی را بیان می‌کنیم. عمده مطالب این فصل از منابع [۳۸،۳۲] گردآوری شده است.

۱.۱ جواب‌های تعادلی، نقاط ثابت، پایداری و خطی سازی سیستم‌های دینامیکی

تعریف ۱.۱.۱ یک سیستم دینامیکی متشکل از یک مجموعه سه‌تایی $\{T, X, \varphi^t\}$ است که $T \subset \mathbb{R}^{۱}$ مجموعه زمان، $X \subset \mathbb{R}^n$ فضای متغیرها و $\varphi^t : X \to X$ یک نگاشت[۱] با خواص زیر می‌باشد:

[۱] Map

۱) $\varphi^{\circ} = I$

۲) $\varphi^{s+t}(x) = \varphi^{s}(\varphi^{t}(x))$

به‌طورکلی سیستم‌های دینامیکی به دو دسته‌ی پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۱ معادله

$$\dot{x} = f(x,t;\eta) \quad (۱)$$

را یک معادله دیفرانسیل معمولی یا سیستم دینامیکی پیوسته و معادله

$$x \to g(x;\eta) \quad (۲)$$

را یک معادله تفاضلی، سیستم دینامیکی گسسته یا یک نگاشت می‌نامیم. که $x \in U \subset \mathbb{R}^n$، $t \in R^{۱}$ و $\eta \in V \subset \mathbb{R}^p$، U و V به ترتیب مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}^n$ و $\mathbb{R}^p$ هستند.

نگاشت x به عنوان یک جواب از معادله (۱) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x : I \subset \mathbb{R}^{۱} \to \mathbb{R}^n$$
$$t \mapsto x(t)$$

به‌طوری‌که $\dot{x}(t) = f(x(t),t;\eta)$.

تعبیر هندسی از یک نگاشت x یک منحنی در $\mathbb{R}^n$ و تعبیر هندسی از یک معادله دیفرانسیل معمولی یک بردار مماس در هر نقطه از منحنی است.

تعریف ۳.۱.۱ معادله دیفرانسیل معمولی $\dot{x} = f(x,t;\eta)$ را یک سیستم وابسته به زمان و $\dot{x} = f(x;\eta)$ را یک سیستم مستقل از زمان می‌نامیم.

۱.۱.۱ سیستم‌های دینامیکی پیوسته

سه مفهوم هندسی سیستم‌های دینامیکی را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

۱) جواب $x(t,t_{\circ},x_{\circ})$ از معادله (۱) که در زمان $t = t_{\circ}$ از نقطه $x_{\circ}$ می‌گذرد را یک مسیر[۲] می‌نامیم.

[۲] Trajectory

۲) نمودار $x(t, t_\circ, x_\circ)$ نسبت به t یک منحنی انتگرال[۳] نامیده می‌شود و فرم ریاضی آن به صورت

$$x(t, t_\circ, x_\circ) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \mid x = x(t, t_\circ, x_\circ), t \in I\},$$

است که I بازه زمانی موجود است.

۳) مجموعه‌ی تمام نقاط x در فضای $\mathbb{R}^n$ که روی یک مسیر گذرنده‌از نقطه $x_\circ$ واقع می‌شوند را مدار $x_\circ$ می‌نامیم و با $\mathbb{O}(x_\circ)$ نشان می‌دهیم.

$$\mathbb{O}(x_\circ) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x(t, t_\circ, x_\circ), t \in I\}$$

تعریف ۴.۱.۱ سیستم دینامیکی پیوسته مستقل از زمان

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^p, \tag{۳}$$

را در نظر بگیرید. $x = \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ یک جواب تعادلی[۴] از سیستم (۳) است هرگاه $f(\bar{x}, \alpha) = \circ$.

تعریف ۵.۱.۱ $\bar{x}(t)$ یک جواب پایدار گفته می‌شود اگر برای هر $\epsilon > \circ$، $\delta = \delta(\epsilon) > \circ$ موجود باشد به‌طوری‌که برای هر جواب دیگر $y(t)$ از سیستم (۳) اگر رابطه

$$|\bar{x}(t_\circ) - y(t_\circ)| < \delta,$$

به ازاء $t_\circ \in \mathbb{R}$ برقرار باشد آن‌گاه برای هر $t > t_\circ$ رابطه

$$|\bar{x}(t) - y(t)| < \epsilon,$$

برقرار باشد.

تعریف ۶.۱.۱ $\bar{x}(t)$ یک جواب به‌طور مجانبی پایدار گفته می‌شود اگر جواب پایدار باشد و برای هر جواب دیگر $y(t)$ از سیستم (۳) یک ثابت $b > \circ$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که اگر

---
[۳] Integral curve
[۴] Equilibrium

$$|\bar{x}(t_\circ) - y(t_\circ)| < b$$

آن‌گاه

$$\lim_{t\to\infty} |\bar{x}(t) - y(t)| = \circ.$$

برای بررسی پایداری جواب $\bar{x}(t)$ باید یک جواب نزدیک آن را به‌دست آوریم. فرض کنیم

$$x = \bar{x}(t) + y \tag{۴}$$

با جانشین‌سازی (۴) در (۳) و بسط تیلر در نقطه $\bar{x}(t)$ داریم:

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t), \alpha) + \dot{y},$$

$$\dot{x} = f(x, \alpha) = f(\bar{x}(t) + y, \alpha) = f(\bar{x}(t), \alpha) + Df(\bar{x}(t), \alpha)y + O(|y|^۲),$$

در نتیجه:

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t), \alpha)y + O(|y|^۲). \tag{۵}$$

تعریف ۷.۱.۱ سیستم

$$\dot{y} = Ay, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{۶}$$

را فرم خطی سازی سیستم (۳) می گوییم. ماتریس $A \equiv Df(\bar{x}(t), \alpha)$ ژاکوبین f در نقطه $\bar{x}(t)$ است.

بررسی پایداری جواب $\bar{x}(t)$ شامل دو مرحله زیر است:

۱) اگر جواب $y = \circ$ از فرم خطی‌سازی پایدار باشد آن‌گاه جواب $\bar{x}(t)$ پایدار است.

۲) نشان می‌دهیم پایداری (ناپایداری) جواب $y = \circ$، پایداری (ناپایداری) جواب $\bar{x}(t)$ را نتیجه می‌دهد.

نکته ۸.۱.۱ اگر $\bar{x}(t) = \bar{x}$ یک جواب تعادلی باشد آن‌گاه $Df(\bar{x}(t), \alpha) = Df(\bar{x}, \alpha)$ یک ماتریس با درایه‌های ثابت است و جوابی از (۶) که در زمان $t = \circ$ از $y_\circ$ می‌گذرد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(t) = e^{Df(\bar{x},\ \alpha)t} y_\circ.$$

بنابراین جواب $y(t)$ به‌طور مجانبی پایدار است اگر همه‌ی مقدارویژه‌های $Df(\bar{x})$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند.

قضیه ۹.۱.۱. فرض کنیم همه‌ی مقدارویژه‌های $Df(\bar{x}, \alpha)$ دارای قسمت حقیقی منفی باشند، آن‌گاه جواب تعادلی $x = \bar{x}$ از سیستم غیرخطی (۳) به‌طور مجانبی پایدار است.

برهان. به فصل دوم [۳۸] مراجعه کنید. □

مثال ۱۰.۱.۱ سیستم دینامیکی پیوسته زیر که ماتریس ضرایب آن وابسته به زمان می‌باشد را در نظر بگیرید:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

که در آن

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{3}{2}\cos^2 t & 1 - \frac{3}{2}\cos t \sin t \\ -1 - \frac{3}{2}\cos t \sin t & -1 + \frac{3}{2}\sin^2 t \end{pmatrix}.$$

مقدارویژه‌های $A(t)$ مستقل از t می‌باشند و به صورت زیر به‌دست می آیند:

$$\lambda_1(t) = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, \qquad \lambda_2(t) = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4}.$$

برای هرمقدار t مقدارویژه‌ها دارای قسمت حقیقی منفی هستند بنابراین طبق قضیه (۹.۱.۱) سیستم پایدار است اما دو جواب مستقل خطی

$$v_1(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{\frac{t}{2}}, \qquad v_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

از این سیستم ناپایدار هستند. زیرا جواب‌ها وقتی $t \to \infty$ نزدیک به هم باقی نمی‌مانند.

۲.۱.۱ سیستم‌های دینامیکی گسسته

اگر $g(x;\eta)$ یک تابع C^r $(r \geq ۱)$ نسبت به x و η باشد آن‌گاه جواب‌های این نگاشت که از نقطه $x_\circ \in \mathbb{R}^n$ می‌گذرند موجود و روی بازه زمانی I یکتا هستند. این جواب‌ها نیز نسبت به $x_\circ$ و η توابع C^r هستند. (توابع C^r $(r \geq ۱)$ یعنی توابعی که تا مرتبه r ام مشتق‌پذیر و دارای مشتقات پیوسته باشند.)
اگر نگاشت $g(x;\eta)$ نسبت به x و ثابت η معکوس داشته باشد آن را یک نگاشت دفومورفیسم[۵] C^r می‌نامیم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\{\ldots, g^{-n}(x_\circ;\eta), \ldots, g^{-۱}(x_\circ;\eta), x_\circ, g(x_\circ;\eta), \ldots, g^n(x_\circ;\eta), \ldots\}$$

(نگاشت دفومورفیسم نگاشت معکوس‌پذیری است که خودش و معکوسش هر دو پیوسته و مشتق‌پذیر هستند.) و اگر نگاشت $g(x;\eta)$ یک تابع C^r $(r \geq ۱)$ باشد و نسبت به x و ثابت η معکوس نداشته باشد آن را نگاشت معکوس‌ناپذیر می‌نامیم و به صورت

$$\{x_\circ, g(x_\circ;\eta), \ldots, g^n(x_\circ;\eta), \ldots\}$$

نمایش می‌دهیم که $x_\circ \in U$، g^n و g^{-n} هم به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$g^n(x_\circ;\eta) \equiv g(g^{n-۱}(x_\circ;\eta)), \qquad n \geq ۲,$$

$$g^{-n}(x_\circ;\eta) \equiv g^{-۱}(g^{-n+۱}(x_\circ;\eta)), \qquad n \geq ۲,$$

تعریف ۱۱.۱.۱ فرض کنیم f یک نگاشت C^r $(r \geq ۱)$ به صورت زیر باشد:

$$x \mapsto f(x,\alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^p, \qquad (۷)$$

$x = \bar{x}$ را یک نقطه ثابت[۶] سیستم (۷) می‌گوییم هرگاه $f(\bar{x},\alpha) = \bar{x}$، و نقطه ثابت را یک دور از مرتبه k گوییم هرگاه $f^k(\bar{x},\alpha) = \bar{x}$.

[۵] diffeomorphism
[۶] Fixed point