١٠٢٣٤٧

دانشگاه شیراز

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

هر عملگر انتقال ابردوری دنباله‌ای ضعیف، نرم ابردوری است.

توسط

اسلام خسروی مقدم

استاد راهنما :

دکتر هدایتیان

آذرماه ۱۳۸۶

بسم الله الرحمن الرحیم

هر عملگر انتقال ابردوری دنباله‌ای ضعیف، نرم ابردوری است.

بوسیله‌ی:

اسلام خسروی مقدم

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از
فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض

از

دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه : .....عالی....

دکتر کریم هدایتیان، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته) ....

دکتر بهمن طباطبایی، دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر عبدالعزیز عبدالهی، دانشیار بخش ریاضی ....

آذرماه ۱۳۸۶

تقدیـــم به :

مادر عزیزم، برادر بزرگوارم، همسر خوبم

و خواهرزاده‌ام نایلا که خیلی دوستش دارم.

سپاسگـــزاری

سپاس و ستایش یزدان پاک را که مرا هستی بخشید و توانایی داد تا در مسیر آموختن گام بردارم.

اکنون که این رساله به پایان رسیده است بر خود فرض می‌دانـم از **استاد ارجمندم جناب آقـای دکتر هدایتیان** به خاطر زحمات دلسوزانه‌ای که برای من کشیدند صمیمانه تشکر کنم.

همچنین از جناب آقایان **دکتر طباطبایی** و **دکتر عبدالهی** که زحمت مطالعه و رفع اشـکال ایـن پایان نامه را متحمل شدند سپاسگزارم. جا دارد از تلاش و دقت سرکار خانم‌هـا **شریف‌پور، ایوبی** و **قاسمی** که کار تایپ پایان نامه را به عهده داشتند تقدیر کنم.

چکیـــده

هر عملگر انتقال ابردوری دنباله‌ای ضعیف ، نرم ابردوری است.

به وسیله‌ی:
اسلام خسروی مقــدم

فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار روی فضای باناخ مختلط X باشد. ثابت می‌کنم که اگر T فرادوری باشد و دنباله $(\|\mathrm{T}^{\mathrm{n}}\|)$ کراندار باشد آنگاه $\left(T^n x\right)$ ، به ازای هر $x \in X$ به 0 میل می‌کند.

به عنوان یک کاربرد، نشان می‌دهیم که یک عملگر ترکیبی روی فضای هاردی از قرص یکه باز U، تولید شده با یک نگاشت که دارای یک نقطه ثابت در U است، فرادوری نیست سپس به توان‌های عملگرهای دوری توجه می‌کنیم. ثابت می‌کنیم اگر برای هر عدد صحیح مثبت n ، T^{n} دوری باشد آنگاه مجموعه بردارهای دوری T در X چگال هستند. همچنین راجع به دوری بودن توأم، T و T^{-1} بحث می‌کنیم.

در ادامه نشان می‌دهیم که عملگرهای انتقال دو سویه روی $\ell^p(Z)$ ، جایی که $1 \le P < \infty$ ، ابردوری دنباله‌ای ضعیف هستند اگر و تنها اگر نرم ابردوری باشند و همین برای عملگرهای فرادوری نیز درست است.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه

۱– مقدمه

این پایان نامه بر اساس مقاله‌ی « برخی خواص عملگرهای دوری » از انصاری و مقاله‌ی « هر عملگر انتقال ابردوری دنباله‌ای ضعیف ، نرم ابردوری است » از جان بس و کیت چان نوشته شده است.

۱-۱- تعریف: فضای برداری[۱] X را یک فضای نرمدار[۲] گویند هر گاه تابع $P : X \to [0,\infty)$ موجود باشد به طوری که :

۱) به ازای هر x و y در X، $P(x+y) \leq P(x) + P(y)$

۲) به ازای هر اسکالر α، $P(\alpha x) = |\alpha| P(x)$

۳) اگر $p(x) = 0$ آنگاه $x=0$

در فضای نرمدار X ، $p(x)$ را با $\|x\|$ نشان داده و آن را نرم x نامند.

۱-۲ تعریف: فضای نرمدار X را فضای با ناخ گویند، هر گاه با متر تعریف شده به وسیله نرم، فضای تام باشد. اگر فضای X دارای یک زیرمجموعهٔ شمارای چگال باشد فضای X، فضای جدایی پذیر گفته می‌شود.

۱-۳ تعریف: تابع $A : X \to X$ را که خطی بوده و $\sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$ متناهی باشد عملگر خطی کراندار روی X گویند و نرم آن را با $\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$ تعریف می‌کنند.

۱-۴ تعریف: عملگر خطی کراندار $T: X \to X$ روی فضای باناخ X، ابردوری[۳] گفته می‌شود هر گاه یک بردار $x \in X$ موجود باشد به طوری که مدار آن تحت T، $orb(T,X) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$، با توپولوژی نرمدار در X چگال باشد. یک چنین بردار

---

[1] - Vector Space
[2] - Normed Space
[۳]- Hypercyclic

x بردار ابردوری برای T نامیده می‌شود. اگر مجموعه ضرایب اسکالری مدار x تحت T، $orb(T,<x>)=\{\lambda T^n x : \lambda\neq 0 \text{ و } n\geq 0\}$ در X چگال باشد عملگر T، عملگر فرادوری[1] گفته می شود و x یک بردار فرادوری برای T نامیده می‌شود. همچنین اگر مجموعه ترکیبهای خطی از اعضای مدار x یعنی $orb(T,x)$ ∨ (پدید آمده‌ی خطی مدار x تحت T) در X چگال باشد عملگر T دوری[2] گفته می‌شود و بردار x یک بردار دوری برای T نامیده می‌شود.

۱-۵ تعریف: طیف[3] عملگر خطی کراندار T، $\sigma(T)$ عبارتست از مجموعه اسکالرهای α که $T-\alpha I$ عملگری معکوس ناپذیر باشد، همچنین طیف نقطه‌ای[4] عملگر T، $\sigma_p(T)$، عبارتست از مجموعهٔ اسکالرهای α که $ker(T-\alpha)\neq(0)$.

α را یک مقدار ویژه[5] و بردار ناصفر x در $ker(T-\alpha)$ را یک بردار ویژه[6] برای T گویند. اگر $\alpha\in\sigma_p(T)$ آنگاه $\ker(T-\alpha)\neq(0)$ و بنابراین $T-\alpha$ معکوس‌پذیر نیست، یعنی $\alpha\in\sigma(T)$ لذا $\sigma_p(T)\subseteq\sigma(T)$.

اگر T عملگر خطی کراندار معکوسپذیر باشد آنگاه $\sigma_p(T^{-1})=\{\frac{1}{\lambda}:\lambda\in\sigma_p(T)\}$ و همچنین $\sigma(T^{-1})=\{\frac{1}{\lambda}:\lambda\in\sigma(T)\}$.

زیرا فرض کنیم $\lambda\in\sigma_p(T)$ پس $\ker(T-\alpha)\neq(0)$ یعنی بردار ناصفر x موجود است به طوری که $Tx=\lambda x$. بنابراین $x=T^{-1}(\lambda x)$ یعنی $T^{-1}(x)=\frac{1}{\lambda}x$ و چون $x\neq 0$، $\ker\pi\left(T^{-1}-\frac{1}{\lambda}\right)\neq 0$ یعنی $\frac{1}{\lambda}\in\sigma_p(T^{-1})$. برعکس به همین طریق ثابت می‌شود.

---

[1]- Supercyclic

[2]-cyclic

[3]-Spectrum

[4]- Point spectrum

[5]- eigenvalue

[6] - eigenvector

برای اثبات نتیجه دوم به برهان خلف فرض کنیم $\lambda \in \sigma(T)$ ولی $\frac{1}{\lambda} \notin \sigma(T^{-1})$ بنابراین عملگر $T^{-1} - \frac{1}{\lambda}$ عملگر معکوسپذیری است. لذا عملگر خطی S موجود است به طوری که $S(T^{-1} - \frac{1}{\lambda}) = I$ یعنی $S - \frac{1}{\lambda}ST = T$ بنابراین $\lambda S - ST = \lambda T$. پس:

$$ST - \lambda S = -\lambda T$$

بنابراین :

$$S(T-\lambda) = -\lambda T \Rightarrow (T-\lambda) = -\lambda S^{-1}T$$

از آنجا که S و T هر دو عملکردهای معکوسپذیری هستند $T\text{-}\lambda$ معکوسپذیر است و این تناقض است. بر عکس دقیقاً مشابه با همین ثابت می‌شود.□

۱-۶ تعریف: برای فضای باناخ X، فضای دوگان X^* متشکل از همه تابعکهای خطی کراندار $x^* : X \to F$ تعریف می‌شود و عملگر خطی $T^*: X^* \to X^*$ که $T^*(x^*)(x) = x^*(T(x))$ عملگر الحاقی[۱] T گفته می‌شود.

۱-۷ تعریف: یک عملگر خطی کراندار $T: X \to X$ روی یک فضای باناخ X، عملگر ابردوری[۲] دنباله‌ای ضعیف گفته می‌شود اگر بردار $x \in X$ موجود باشد به طوری که مدار آن تحت T، $orb(T,x) = \{x, Tx, T^2x, \ldots\}$ به طور دنباله‌ای ضعیف در X چگال باشد یعنی به ازای هر بردار y در X، یک دنباله $(T^{n_k}x)$ در $orb(T,x)$ موجود باشد که به طور ضعیف به y همگرا باشد، یا به طور معادل، به ازای هر x^* در فضای دوگان X^* :

$$\lim < T^{n_k}x - y, x^* > = \lim x^*\left(T^{n_k}x - y\right) = 0$$

یک چنین بردار x بردار ابردوری دنباله‌ای ضعیف برای T نامیده می‌شود.

۱-۸ تعریف: یک عملگر خطی کراندار $T : X \to X$ روی یک فضای باناخ X، عملگر ابردوری ضعیف گفته می‌شود اگر بردار $x \in X$ موجود باشد به طوری که مدار آن تحت T، با

[۱]- adjoint

[۲]- weakly sequentially hypercyclic

توپولوژی ضعیف[1] در X چگال باشد. چنین بردار x ی بردار ابردوری ضعیف برای T نامیده می‌شود.

بطور مشابه عملگر خطی کراندار $T:X\to X$

فرادوری دنباله‌ای ضعیف گفته می‌شود هر گاه بردار $x\in X$ موجود باشد به طوری که مجموعه ضرایب اسکالری مدار ان تحت T، $orb(T,<x>)=\{\lambda T^n x,\ \lambda\neq 0,\ n\geq 0\}$ به طور دنباله‌ای ضعیف چگال در X باشد.

۱-۹ تعریف: یک عملگر خطی کراندار $T: X \to X$، عملگر فرادوری ضعیف گفته می‌شود هر گاه بردار $x \in X$ موجود باشد به طوری که مجموعه ضرایب اسکالری مدار آن تحت T ، $orb(T,<x>)=\{\lambda T^n x;\lambda\neq 0\ ,\ n\geq 0\}$ به طور ضعیف در X چگال باشد.

توضیح آنکه اگر U یک همسایگی x در توپولوژی ضعیف باشد آنگاه تابعکهای خطی $x_1^*,\ldots,x_n^*$ و اعداد مثبت $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$ موجودند به طوری که: $U=\{y \mid |x_i^*(x-y)|<\varepsilon_i\}$.

در این پایان‌نامه هر جا بیم اشتباه وجود داشته باشد به جای عملگرهای ابردوری (به ترتیب فرادوری) عملگرهای نرم ابردوری (به ترتیب نرم فرادوری) بکار می‌رود.

دقت کنیم که هر عملگر ابردوری T یک عملگر فرادوری است و هرعملگر فرادوری یک عملگر دوری است زیرا

$$orb(T,x)=\{x,Tx,T^2x,\ldots\}\subseteq orb(T,<x>)=$$
$$\{\lambda T^n x:\lambda\neq 0\ ,\ n\geq 0\}\subseteq \vee orb(T,x)$$

لذا وقتی T عملگر ابردوری باشد بردار $x\in X$ وجود دارد که $orb(T,x)$ در X چگال است یعنی $\overline{orb(T,x)}=X$ و بنابراین :

$$\overline{orb(T,<x>)}=X$$

نتیجه اخیر برای عملگرهای ضعیف و دنباله‌ای ضعیف نیز برقرار است.

---

[1]-weak Topology

اگر A مجموعهٔ بسته‌ای با توپولوژی ضعیف باشد آنگاه مجموعهٔ بسته‌ای با توپولوژی نرمدار نیز خواهد بود، زیرا فرض کنیم $\{x_n\}$ یک دنباله از اعضای A باشد که با توپولوژی نرمدار به x میل کند.

می‌دانیم وقتی $x_n \to x$ آنگاه به ازای هر $x^* \in X^*$ $x^*(x_n) \to x^*(x)$. لذا x_n بطور ضعیف به x میل می‌کند و چون A با توپولوژی ضعیف بسته است، $x \in A$.

۱–۱۰ نتیجه: هر عملگر نرم ابردوری T ابردوری ضعیف است:

اثبات : فرض کنیم x یک بردار نرم ابردوری برای T باشد. می‌دانیم $\overline{orb(T,x)}^{wk}$ در توپولوژی ضعیف بسته است لذا طبق نتیجهٔ اخیر در توپولوژی نرمدار بسته است و داریم

$$orb(T,x) \subseteq \overline{orb(T,x)}^{wk}$$

اما چون بستار یک مجموعه، کوچکترین مجموعه بسته شامل آن مجموعه است $X = \overline{orb(T,x)}^{norm} \subseteq \overline{orb(T,x)}^{wk}$ لذا x یک بردار ابردوری ضعیف برای T است.□

نتیجه مشابه برای عملگرهای فرادوری نیز برقرار است.

۱–۱۱ قضیه: اگر $A \subseteq X$ یک مجموعه محدب باشد آنگاه $\overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{norm}} = \overline{\mathrm{A}}^{\mathrm{wk}}$ [11].

با توجه به این نکته که $\vee orb(T,x)$ مجموعه‌ای محدب است، نتیجه زیر را بیان می‌کنیم :

۱–۱۲ نتیجه: اگر $T:X \to X$ یک عملگر خطی کراندار باشد آنگاه هر بردار ابردوری ضعیف یک بردار دوری برای T است.

اثبات : اگر x یک بردار ابردوری ضعیف برای T باشد آنگاه $orb(T,x)$ به طور ضعیف در X چگال است و بنابراین $\vee\, orb(T,x)$ نیز به طور ضعیف در X چگال است. چون $\vee\, orb(T,x)$ مجموعه‌ای محدب است بستار آن در توپولوژی ضعیف و توپولوژی نرمدار یکی است لذا x یک بردار دوری برای T است.□

اینکه یک عملگر خطی روی یک فضا با بعد متناهی نمی‌تواند فرادوری باشد (و بنابراین نمی‌تواند ابردوری باشد) توسط هیلدن[1] و والن[2] اثبات شده است:

۱-۱۳ قضیه: اگر $1<dimX<\infty$ ، هیچ عملگری روی X بردار فرادوری ندارد [15، صفحه 564].

یادآوری می‌کنیم که $\ell^p(Z)$ (که $1\leq P<\infty$) فضای متشکل از همهٔ دنباله‌های $(x_n)_{n\in z}$ از اعداد مختلط است به طوری که $\sum_{n\in z} |x_n|^p$ متناهی باشد و

$$\|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$$

در واقع یک عضو $\ell^p(Z)$ به شکل $x=(\ldots, x_{-2},x_{-1}, x_0, x_1, x_2,\ldots)$ که $\hat{x}(j) = x_j$ jـ امین جمله از دنباله است.

همچنین $\ell^p(Z^+)$ فضای متشکل از همه دنباله‌های $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ از اعداد مختلط است به طوری که $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p$ متناهی باشد و $\|(x_n)\| = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{1/p}$. در این پایان نامه گاهی $\ell^p(Z^+)$ را با ℓ^p نشان می‌دهیم.

عملگرهای انتقال دو سویه[3] وزن دار(پسرو[4] و پیشرو[5]) :

عملگر انتقال $T:\ell^P(Z) \to \ell^P(Z)$ ، که $Te_j= w_je_{j-1}$ یک عملگر انتقال دو سویه پسرو گفته می‌شود جایی که $e_j=(\ldots,0,0,1,0,0,\ldots)$ در $\ell^P(z)$ که مختصات 1 در jـ امین مکان و 0 را در بقیه جاها دارد و دنباله دو سویه وزنی $(w_j)_{j\in z}$ یک دنباله کراندار از اسکالرهاست. اگر $Te_j=w_je_{j+1}$ آنگاه عملگر انتقال دوسویه وزن دار پیشرو گفته می‌شود.

---

[1]-Hilden

[2]- wallen

[3]- bilateral weighted shift

[4]- backward

[5]- forward

عملگرهای انتقال یک سویه[1] (پسرو و پیشرو) :

عملگـر انتقـال $T: \ell^{P}(Z^+)\to\ell^{P}(Z^+)$ ، کـه $Te_j=w_je_{j-1}$ بـرای $j>1$ و $Te_1=0$

عملگر انتقال یک سویه وزن دار پسرو گفته می‌شـود جـایی کـه $e_j=(0,0,...,0,1,0,...)$ در $\ell^{P}(Z^+)$ که مختصات 1 در $j-$امین مکان و 0 در بقیه جاها دارد.

اگر $Te_j=w_je_{j+1}$ آنگاه عملگر انتقال T، عملگر وزن‌دار پیشرو گفته می‌شود.

اگر دنباله وزنی (w_j) دنباله ثابت 1 باشد عملگرم هـای انتقـال دو سـویه (یـک سـویه) پسرو (پیشرو) گفته می‌شوند.

در ادامه به معرفی فضاهای ℓ^∞ ، $C_0(Z)$ و H^2 می‌پردازیم.

۱-۱۴ **تعریـــف** ℓ^∞: فـضای متـشکل از دنبالـه‌هـای $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ بـه طـوری کـه $\|(x_n)\|=\sup_n|x_n|<\infty$ می‌باشد.

۱-۱۵ **تعریف** $C_0(Z)$: فضای متشکل از دنباله‌های $(x_n)_{n\in z}$ به طوری کـه $\lim_{|n|\to\infty} x_n=0$ می‌باشد.

۱-۱۶ **تعریف** قرص یکه U : زیر مجموعه از اعداد مختلط می‌باشد که اندازه آنها از یـک کمتر است :

$$U=\{z\in C, |z|<1\}$$
$$\overline{U}=\{z\in C, |z|\leq 1\}$$

۱-۱۷ **تعریف** H^2 (فضای هاردی[2]): فضای همهٔ توابع مختلط تحلیلی از قـرص یکـه U بـه طـوری کـه اگـر $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ بـسط تیلـور تـابع f حـول مبـدأ باشـد، $\|f\|=(\sum|a_n|^2)^{\frac{1}{2}}<\infty$.

۱-۱۸ **تعریف عملگر ضربی** [3] $M_f: H^2\to H^2$: اگر f یک تابع تحلیلی کراندار روی U باشد عملگر که $M_f(g)=fg$ را عملگر ضربی گویند.

---

[1]-unilateral weighted shift

[2]- Hardy space

[3]-multiplication operator

۱-۱۹ تعریف عملگر ترکیبی[1] : اگر φ یک تابع تحلیلی از قرص بازیکه به تـوی خـودش باشد، عملگر $C_\varphi : H^2 \to H^2$ تعریف شده با $C_\varphi(f) = fo\varphi$ را عملگر ترکیبی گویند.

۱-۲۰ قضیه لیتل وود[2] : اگر φ تابع تحلیلی از قرص یکه U به خودش باشـد و C_φ عملگر ترکیبی روی H^2 باشد آنگـاه C_φ کرانـدار اسـت و $\|C_\varphi\| \le \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$ [12]. بـرای سادگی $\varphi o \varphi o \ldots o \varphi$، n بار را φ_n نمایش می‌دهیم.

۱-۲۱ قضیه دنجوی ولف[3] : اگر $\varphi : U \to U$ تابع تحلیلـی کـه همـانی و همچنـین خودریختی نباشد در این صورت نقطه‌ای مانند a در $\overline{U}$ وجود دارد به طوری که φ_n به طـور یکنواخت روی زیر مجموعه‌های فشرده U به a میل می‌کند.

از طرفی دیگر ، φ خودریختی نباشد و یک نقطه ثابت a در D داشته باشـد طبـق لـم شوارتز a یکتاست و $|\varphi'(a)| < 1$ نقطه ثابت روی مرز ندارد. در این مورد φ_n به نقطه ثابـت a همگراست [12].

اگر S عملگر انتقال پسرو روی $\ell^2(Z^+)$ باشد آنگاه $2S$ عملگـر ابـردوری اسـت [16] و بنابراین به وضوح S فرادوری خواهد بود، زیرا اگر x بردار ابردوری برای $2S$ باشد آنگاه x بـردار فرادوری برای S خواهدبود. ولی عملگر S نمی‌تواند ابردوری باشـد زیـرا مـدار اعـضای $l^2(Z^+)$ تحت S به سمت صفر میل می‌کنند:

اگر $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ در $\ell^2(Z^+)$ باشـد آنگـاه $S^n(\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots)$

چون $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell^2(Z^+)$ آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$

لذا به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد صحیح مثبت N موجود است بـه طـوری کـه بـه ازای هـر $k \ge N$

[1]-composition operator

[2] - Little wood

[3] - Denjoy wolf

$$\left|\sum_{n=1}^{k+1}\left|\alpha_n\right|^2-\sum_{n=1}^{\infty}\left|\alpha_n\right|^2\right|<\varepsilon$$

یعنی

$$\left|\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\alpha_n\right|^2\right|<\varepsilon$$

یعنی $\left|s^k\alpha\right|<\varepsilon$

بنابراین $S^n\alpha\to 0$ به ازای هر $\alpha\in\ell^2(Z^+)$.□

در فصل دوم این پایان نامه نشان داده خواهد شد که رفتار مدارهای عملگر انتقال پسرو که اخیرا بحث کردیم متعارف است :

اگر T فرادوری روی فضای با ناخ X باشد و دنباله ($\|T^n\|$) کراندار باشد آنگاه به ازای هر $x\in X$ ، $\lim_{n\to\infty}T^nx=0$.

این نتیجه نشان خواهد داد که عملگرهای ترکیبی که توسط یک تابع با نقطه ثابت در U تولید می‌شوند هرگز نمی توانند فرادروی باشند .

در فصل‌های سوم و چهارم به توان‌های عملگرهای دوری توجه خواهد شد . در اینجا قضایایی راجع به توان‌های عملگرهای ابر دوری و فرادوری می آوریم :

۱-۲۲ قضیه: اگر یک بردار x در X برای یک عملگر خطی کراندار $T:X\to X$ ابردوری باشد آنگاه به ازای هر $n\geq 1$ ، x یک بردار ابردوری برای T^n خواهد بود [3 قضیه 1].

۱-۲۳ قضیه: اگر یک بر دار x در X برای عملگر خطی کراندار $T:X\to X$ فرادوری باشد آنگاه به ازای هر $n\geq 1$ ، x یک بردار فرادوری برای T^n خواهد بود .[3 قضیه 2].

نکته اینکه اگر x یک بردار ابردوری (فرادوری) برای عملگر T^n ($n>1$) باشد آنگاه x یک بردار ابردوری (فرادوری) برای T خواهد بود زیرا

$$orb(T^n,x)\subseteq orb(T,x) \qquad \text{و} \qquad orb(T^n,<x>)\subseteq orb(T,<x>)$$

اگر x یک بردار ابردوری برای T باشد آنگاه به ازای هر $n\geq 1$ ، T^nx نیز یک بردار ابرروی برای T خواهد بود. همچنین اگر x یک بردار فرادوری برای T باشد آنگاه به ازای هر $n\geq 1$ و هر واسکالر ناصفر c ، cT^nx نیز یک بردار فرادوری برای T است، زیرا اگر x یک بردار

ابردوری برای T باشد آنگاه مجموعه $\{x,Tx,T^2x,...\}$ در X چگال خواهد بود و لذا به ازای هر $y \in X$ دنباله (n_k) از اعداد طبیعی موجود است به طوری که $T^{n_k}x \to y$.

اما هر زیر دنباله از دنباله ($T^{n_k}x$)نیز به y همگراست لذا با حذف تعداد متناهی از جملات ($T^{n_k}x$) که $n_k < n$، زیر دنباله بدست آمده در ($orb\ (T,T^n x$ خواهد بود که به y همگراست .

همچنین اگر x یک بردار فرادوری برای T باشد $y \in X$ و دنباله $c_k T^{n_k}x \to y$ آنگاه چون $c \neq 0$ دنباله $\frac{c_k}{c} T^{n_k}(cx) \to y$ و لذا هر زیر دنباله از آن نیز به y همگراست .

۲۴-۱ نتیجه : اگر $T: X \to X$ یک عملگر ابردوری باشد آنگاه مجموعه بردارهای ابردوری T ، در X چگال هستند .

اثبات : اگر x یک بردار ابردوری برای T باشد آنگاه $T^n x$ (به ازای هر $n \geq 1$) یک بردار ابردوری برای T است . فرض کنیم $y \in X$ و $\varepsilon > 0$ دلخواه باشند می دانیم عدد طبیعی n_k وجود دارد به طوری که $\| T^{n_k}x - y \| < \varepsilon$.

چون $T^{n_k}x$ در مجموعه بردارهای ابردوری T قرار دارد لذا مجموعه بردارهای ابردوری T در X چگال است .

۲۵-۱ نتیجه: اگر T عملگر فرادوری باشد ، مجموعه بردارهای فرادوری T ، در X چگال است.

همچنین فرض کنیم $T: X \to X$ عملگر خطی کراندار باشد و T فرادوری ضعیف باشد در این صورت مجموعه بردارهای فرادوری ضعیف T ، در X نرم چگال است [21، قضیه 2-1].

۲۶-۱ لم : فرض کنیم T یک عملگر خطی کراندار روی یک فضای برداری توپولوژیک X باشد به طوری که دارای یک بردار با مدار چگال در X باشد. در این صورت برای هر چند جمله‌ای ناصفر P، عملگر $P(T)$ دارای برد چگال است. البته وقتی X فضای برداری توپولوژیک حقیقی باشد ضرایب چند جمله‌ای حقیقی هستند [23].

توضیح آنکه اگر مجموعه بردارهای دوری T شامل مجموعه بازی باشد آنگاه مجموعه بردارهای دوری T خود مجموعه بازی است و همچنین اگر مجموعه بردارهای ابردوری (فرادوری) برای T شامل مجموعه بازی باشد آنگاه مجموعه بردارهای ابردوری (فرادوری) برای T خود مجموعه بازی است.

برای اثبات فرض کنیم مجموعه بردارهای دوری T شامل مجموعه باز U باشد در این صورت

$\cup P(T)^{-1}U=$مجموعه بردارهای دوری برای T

جایی که اجتماع روی همه چند جمله‌ای‌های $P(T)$ گرفته می‌شود زیرا فرض کنیم $x \in \cup P(T)^{-1}U$ یعنی یک چند جمله‌ای $P(T)$ وجود دارد به طوری که $P(T)x \in U$. چون هر بردار در U دوری است پس $P(T)x$ یک بردار دوری برای T است لذا از آنجا که

$$\vee\, orb\,(T, P(T)x) \subseteq \vee\, orb\,(T, x)$$

x یک بردار دوری برای T است برای اثبات عکس فرض کنیم y بردار دوری برای T باشد چون U مجموعه بازی است چند جمله‌ای $P(T)$ وجود دارد به طوری که $P(T)y$ در U باشد . یعنی $y \in \cup P(T)^{-1}U$.

اثبات برای عملگرهای ابردوری و فرادوری به صورت مشابه است با استفاده از اینکه وقتی T ابردوری است ومجموعه بردارهای ابردوری T شامل مجموعه باز U است آنگاه

$$\bigcup_{n\geq 0}(T^n)^{-1}U=\text{مجموعه ابردوری } T$$

و وقتی T فرادوری است و مجموعه بردارهای فرادوری T شامل مجموعه باز U است آنگاه

$$\bigcup_{c\neq 0}\bigcup_{n\geq 0}(cT^n)^{-1}U=\text{مجموعه بردارهای فرادوری } T\,. \;\square$$

حال به بیان قضیه مهمی راجع به عملگرهای ابردوری ضعیف می‌پردازیم که در فصل پنجم آن را برای عملگرهای ابردوری دنباله ای ضعیف ثابت می کنیم .

۱-۲۷ قضیه : اگر X $T:X\rightarrow X$ یک عملگر خطی کراندار باشد آنگاه T ابردوری ضعیف است اگر و تنها اگر یک زیر فضای خطی نرم چگال پایا از X موجود باشد به طوری که هر بردار نا صفر آن یک بردار ابردوری ضعیف است .

اثبات : فرض کنیم x یک بردار ابردوری ضعیف برای T باشد چون $orb(T,x)$ ∨ مجموعه‌ای پایا و محدب است و لذا به طور ضعیف چگال بودن آن معادل با نرم چگال بودن آن است، کافیست ثابت کنیم هر بردار ناصفر آن یک بردار ابردوری ضعیف برای T است.

بنابر نتیجه‌ای از جان بس [6] ، به ازای هر چند جمله‌ای ناصفر P، $P(T)$ دارای برد بطور ضعیف چگال است بنابراین نتیجه مورد نظر از رابطه‌های :

$$P(T)X\subseteq P(T)\overline{X}^{wk}=P(T)\overline{orb(T,x)}^{wk}$$
$$\subseteq\overline{P(T)orb(T,x)}^{wk}=\overline{orb(T,P(T)x)}^{wk}$$

بدست می‌آید . □

در فصل سوم ازاین پایان‌نامه رابطه زیر بین دوری بودن همه توان‌های یک عملگر و چگال بودن مجموعه بردارهای دوری آن اثبات می شود:

اگر همه توان‌های عملگر $T:X\rightarrow X$ دوری باشند آنگاه T یک مجموعه از بردارهای دوری چگال در X دارد. اثبات این نتیجه نشان می‌دهد که طیف نقطه ای T^* عملگر الحاقی T نمی‌تواند شامل مجموعه بازی باشد.

نکته آنکه اگر T دوری و $\sigma_p\left(T^*\right)$ شامل هیچ مجموعه بازی از C نباشد آنگاه مجموعه بردارهای دوری T در X چگال هستند [3 قضیه 3].

این محدودیت روی طیف نقطه‌ای T برای یک عملگر که همهٔ توان‌های آن دوری هستند با محدودیت‌های زیر برای عملگرهای ابردوری و فرادوری مقایسه می‌شود :

۱) اگر T ابردوری باشد آنگاه T^* مقدار ویژه ندارد [15، قضیه 2-3].

۲) برای عملگر فرادوری T، T^* حداکثر یک مقدار ویژه دارد.

برای نتیجه دوم اثباتی در فضای باناخ در فصل سوم ارائه می‌شود.