دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

مباحثی در اثبات‌ناپذیری و نظریه رمزی تعمیم یافته

رساله‌ی دکتری ریاضی محض، منطق ریاضی،

امیر خمسه

استاد راهنما

دکتر مجتبی آقایی

آبان ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی مترتب بر نتایج مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی اصفهان است.

تقدیم به

همسر، فرزند، پدر و مادر عزیزم

چکیده

در این رساله، ابتدا قضیه رمزی کانونیک و سپس نسخه‌ای از قضیه کاناموری—مک‌آلون از جنبه نظریه مدل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در هر مورد نشانگرهای جدید و نتایج مستقل از PA به دست می‌آید. سپس به قضیه مجموعه تین و محاسبه مقدار دقیق عدد رمزی متناظر با آن برای برخی گراف‌های خاص که مسیرها از جمله آن است پرداخته می‌شود.

رده‌بندی موضوعی: 03B30، 03F30، 03C62، 05C55، 05D10.

کلمات کلیدی: جمله مستقل، قضیه کاناموری—مک‌آلون، قضیه پاریس—هرینگتون، قضیه رمزی کانونیک، قضیه مجموعه تین، عدد رمزی، عدد رمزی d—رنگی.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ معرفی رساله

در این بخش ابتدا نگاهی گذرا به برنامه هیلبرت و قضایای ناتمامیت گودل خواهیم داشت، سپس به اختصار به بیان قضایای پاریس—هرینگتون و کاناموری—مک‌آلون می‌پردازیم. در پایان چگونگی فصل‌بندی مطالب رساله ارائه می‌شود. توضیحات راجع به برنامه هیلبرت و قضایای ناتمامیت گودل از مرجع [۴۸] آورده شده است و برای مطالعه بیشتر در این موضوع می‌توان به این مرجع مراجعه کرد. هم‌چنین برای مشاهده بحث مفصل در مورد قضایای ناتمامیت گودل خواننده را به [۴۱] ارجاع می‌دهیم.

در حدود سال ۱۹۲۰، ریاضیدان مشهور آلمانی دیوید هیلبرت طرحی را برای آینده مبانی ریاضیات ارائه کرد که امروزه از آن به عنوان برنامه هیلبرت یاد می‌شود. در این طرح، هدف پیدا کردن یک مجموعه اصول برای کل ریاضیات به همراه اثباتی برای سازگاری این اصول بود. البته اثبات سازگاری باید تنها از ابزار خاصی استفاده می‌کرد که هیلبرت آنها را روش‌های متناهی می‌نامید. برنامه هیلبرت مورد توجه بسیاری از منطق‌دانان از جمله برنایز، آکرمن و فن نویمن قرار گرفت. این برنامه هم‌چنین تأثیر زیادی بر کورت گودل گذاشت به طوری که منجر به کشف قضایای ناتمامیت گودل شد و بر اساس این قضایا برنامه هیلبرت با شکست مواجه گردید.

گودل در خلاصه‌ای که در اکتبر ۱۹۳۰ چاپ کرد این‌گونه نوشت. هیچ اثباتی برای سازگاری سیستم‌هایی نظیر پرینسیپا، زرملو—فرانکل، سیستم آکرمن و سیستم فن نویمن با استفاده از ابزاری که در خود این سیستم‌ها قابل فرمول‌بندی باشند، وجود ندارد. البته گودل پاسخی به وجود اثباتی با استفاده از روش‌های متناهی هیلبرت که در برون این سیستم‌ها فرمول‌بندی شوند نداده است.

گودل اولین قضیه ناتمامیت خود را در سپتامبر ۱۹۳۰ در کنفرانسی در کونیگسبرگ ارائه کرد. فن نویمن که در محل سخنرانی حضور داشت بلافاصله متوجه ارتباط نزدیک برنامه هیلبرت و قضیه گودل شد. مدت کوتاهی پس از این کنفرانس وی به گودل نوشت که نتیجه‌ای از این قضیه را کشف کرده است. این نتیجه قبلاً به طور مستقل توسط گودل کشف شده بود و چیزی به جز دومین قضیه ناتمامیت گودل نیست. دومین قضیه بیان می‌کند که سیستم پرینسیپا، این جمله که سیستم پرینسیپا سازگار است را نمی‌تواند ثابت کند. یادآوری می‌کنیم که اثبات نظریه مدلی برای اولین قضیه گودل اولین بار توسط اسکات ارائه شده است (مرجع [۴۲] را ببینید).

در سال ۱۹۳۶، گنتزن اثباتی برای سازگاری حساب مرتبه اول پئانو PA ارائه کرد. به عنوان نتیجه‌ای از قضیه ناتمامیت گودل، اثبات گنتزن را که از استقرا ترامتناهی برای اردینال ε_0 استفاده می‌کند، نمی‌توان به عنوان اثباتی در PA در نظر گرفت.

بنابراین با توجه به توضیحات فوق و با استناد به قضیه ناتمامیت گودل، می‌توان گفت که هر اصل‌بندی سازگار T از نظریه اعداد شامل جمله‌ای تصمیم‌ناپذیر است یعنی جمله σ وجود دارد که T قدرت اثبات هیچ‌یک از σ و $\neg\sigma$ را ندارد. به ویژه جمله σ وجود دارد که $\mathrm{PA} \nvdash \sigma$ و $\mathrm{PA} \nvdash \neg\sigma$. در این حالت گوییم σ مستقل از PA است.

هم‌چنین بنابر دومین قضیه ناتمامیت، می‌توان گفت که برای نظریه سازگار T از نظریه اعداد، جمله‌ای که سازگاری T را بیان کند در T قابل اثبات نیست. به ویژه $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$. به سادگی مشاهده می‌شود که جمله گودل وابسته به مفاهیم مجرد و عمیق منطق ریاضی است. مدت زمان زیادی نزدیک به نیم قرن طول کشید تا جمله‌ای از ریاضیات معمولی و مستقل از PA معرفی شود و آن چیزی نیست به جز قضیه پاریس—هرینگتون که در حدود سال ۱۹۷۷ میلادی ارائه شده و ماهیت ترکیبیاتی دارد. این قضیه تعمیمی از قضیه رمزی متناهی است. تذکر می‌دهیم که مقدمات اثبات مستقل بودن قضیه پاریس—هرینگتون در زمان مطالعه ساختار قطعه‌های اولیه PA انجام شده و ارتباط نزدیکی با مفاهیم نشانگرها و تشخیص‌ناپذیرهای قطری دارد. یکی دیگر از جملات مستقل از PA توسط کاناموری و مک‌آلون در [۲۲] بیان شده است. در واقع

نشان داده شده است که قضیه پاریس—هرینگتون و قضیه کاناموری—مک‌آلون معادل هستند. می‌توان دید که بسیاری از جملات مستقل از PA معادل با قضیه پاریس—هرینگتون هستند که از آن جمله می‌توان به اصل فلیپینگ [۲۶]، اصل رگال و کرالیک [۱۱]، جمله درختی [۳۲]، پایان‌پذیری دنباله‌های گوداشتاین [۳۴] و اصل پودلاک [۱۸]، [۳۶] اشاره کرد. برای مشاهده بحث کامل‌تری از نتایج به دست آمده در اواخر دهه ۷۰ و اوایل ۸۰ خواننده را به چهار مرجع [۲]، [۳۳]، [۳۹] و [۴۰] ارجاع می‌دهیم. هم‌چنین برای تاریخچه کامل‌تری از موضوع و مشاهده نتایج جدید در این موضوع می‌توان به [۳] و [۴] مراجعه کرد.

این رساله مشتمل بر چهار فصل است که هدف اصلی آن ارائه چندین جمله مستقل از PA است. بخش بعد به مرور تعاریف مورد نیاز و برخی نتایج مهم موجود اختصاص دارد.

در فصل ۲، به مطالعه نظریه مدلی قضیه رمزی کانونیک خواهیم پرداخت. در واقع با استفاده از ابزار نظریه مدلی نشان می‌دهیم که نسخه متناهی این قضیه با شرط بزرگ بودن مجموعه کانونیک قابل اثبات در PA نیست. در ضمن انجام این کار، یک نشانگر جدید برای قطعه‌های اولیه که مدلی از PA هستند به دست می‌آوریم.

سپس در فصل ۳، نسخه‌ای از قضیه کاناموری—مک‌آلون را در نظر می‌گیریم. با ارائه یک مجموعه از تشخیص‌ناپذیرهای قطری نشان می‌دهیم که این عبارت نیز مستقل از PA است و مجدداً یک نشانگر جدید برای قطعه‌های اولیه که مدلی از PA هستند به دست می‌آوریم.

سرانجام در فصل آخر، قضیه مجموعه تین مورد بررسی قرار می‌گیرد. این قضیه به طور گسترده در [۱۴] مورد مطالعه قرار گرفته و سؤال‌های باز متعددی در این مورد مطرح شده است. به ویژه این‌که نسخه متناهی این قضیه با شرط بزرگ بودن مستقل از PA هست یا خیر مشخص نیست و به عنوان سؤال باز مطرح است. این قضیه با یکی از تعمیم‌های اعداد رمزی برای گراف‌ها تحت عنوان اعداد رمزی d—رنگی معرفی شده توسط چانگ و لیو [۱۰] ارتباط نزدیکی دارد. در آخرین فصل از این رساله، این اعداد برای برخی گراف‌های خاص محاسبه می‌شوند.

مقالات مستخرج از این رساله مراجع [۱] و [۲۵] هستند که نتایج فصل‌های ۲ و ۳ در مقاله [۱] و نتایج فصل ۴ در مقاله [۲۵] ارائه شده است. هر نتیجه بدون مرجع در رساله جدید بوده و توسط نویسنده اثبات شده است.

۱—۲ تعاریف و مقدمات

این بخش شامل تعاریف و مطالب مورد نیاز برای فصل‌های بعدی است. هم‌چنین به برخی نتایج مهم و شناخته شده مرتبط با موضوع نیز اشاره می‌شود. تلاش شده نمادها و تعاریف منطبق بر کتاب‌های مرجع باشد. با این حال برای بحث کامل‌تر و هر مطلب تعریف نشده‌ای خواننده را به کتاب‌های [۱۹]، [۲۳] و [۲۸] ارجاع می‌دهیم.

ابتدا برخی مفاهیم و نمادهای مورد نیاز را معرفی می‌کنیم.

۱—۱ تعریف.

۱) عدد طبیعی $n \in \mathbb{N}$ را با مجموعه اعداد طبیعی کمتر از n یکی می‌گیریم. بنابراین

$$n = (n-1) \cup \{n-1\} = \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

۲) برای $a, b \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{N} : a \leq x \leq b\} = \{a, a+1, \ldots, b-1, b\}$$

۳) برای $X \subseteq \mathbb{N}$ و $n \in \mathbb{N}$ مجموعه متشکل از زیرمجموعه‌های n عضوی X را با $[X]^n$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$[X]^n = \{x \subseteq X : |x| = n\}.$$

۴) فرض کنیم $n \geq 1$، $X \subseteq \mathbb{N}$ و f تابعی با دامنه $[X]^n$ باشد. معمولاً عضو $\{x_1, \ldots, x_n\}$ از $[X]^n$ را با دنباله صعودی $x_1 < \cdots < x_n$ از اعضای X یکی می‌گیریم. در این صورت به جای استفاده از نماد $f(\{x_1, \ldots, x_n\})$ از نماد ساده‌تر $f(x_1, \ldots, x_n)$ استفاده می‌کنیم. توجه داریم که در نمادگذاری اخیر به طور ضمنی فرض شده است که $x_1 < \cdots < x_n$.

۵) فرض کنیم $n, c \geq 1$، $X \subseteq \mathbb{N}$ و c و $f : [X]^n \to c$. چنین تابع f را یک c—رنگ‌آمیزی از $[X]^n$ یا یک رنگ‌آمیزی از $[X]^n$ با c رنگ یا یک افراز از $[X]^n$ به c کلاس می‌نامیم. در این حالت به n بعد تابع

f یا به طور خلاصه بعد می‌گوییم. گوییم $H \subseteq X$ یک مجموعه همگن برای f است هرگاه برای هر $x_1, \ldots, x_n$ و $y_1, \ldots, y_n$ در H داشته باشیم

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n).$$

قضیه رمزی نامتناهی [۳۸] بیان می‌کند که اگر زیرمجموعه‌های n عضوی یک مجموعه نامتناهی را به هر شکل به تعداد متناهی کلاس افراز کنیم حتماً یکی از کلاس‌ها نامتناهی است.

۱—۲ قضیه رمزی نامتناهی. ([۳۸]) *فرض کنیم* $n \geq 1$، $X \subseteq \mathbb{N}$ *نامتناهی باشد و* $f : [X]^n \to c$. *در این صورت یک مجموعه نامتناهی* H *همگن برای* f *موجود است.*

قضیه رمزی نامتناهی را با استفاده از نماد پیکان $\to$ نیز می‌توان بیان کرد. برای این منظور ابتدا به تعریف زیر توجه می‌کنیم.

۱—۳ تعریف.

۱) $\mathbb{N}$ را علاوه بر نمادی برای مجموعه اعداد طبیعی $\{0, 1, \ldots\}$ به عنوان نمادی برای عدد اصلی این مجموعه نیز در نظر می‌گیریم.

۲) فرض کنیم n, k, c اعضایی از $\mathbb{N}$ یا خود $\mathbb{N}$ باشند. در این صورت $X \to (k)^n_c$ به این معنا است که برای هر تابع $f : [X]^n \to c$ مجموعه $H \subseteq X$ با حداقل k عضو وجود دارد به طوری که f بر $[H]^n$ مقدار ثابتی را اختیار کند. به عبارت دیگر $X \to (k)^n_c$ بیان می‌کند که برای هر رنگ‌آمیزی از $[X]^n$ با c رنگ یک مجموعه همگن k عضوی وجود دارد.

با استفاده از این نماد می‌توان قضیه رمزی نامتناهی را بازنویسی کرد.

۱—۴ قضیه رمزی نامتناهی. ([۳۸]) *همواره داریم*

$$\forall n, c \in \mathbb{N} \left(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_c\right).$$

قضیه رمزی متناهی که نتیجه‌ای از قضیه رمزی نامتناهی است (برای مشاهده اثباتی از این مطلب به [۲۳] مراجعه کنید)، افرازهای متناهی از یک مجموعه دلخواه متناهی را در نظر می‌گیرد.

۱–۵ قضیه رمزی متناهی. ([۳۸]) *همواره داریم*

$$\forall n, c, k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \Big(m \to (k)^n_c\Big).$$

۱–٦ تعریف. کوچک‌ترین عدد طبیعی m را که $m \to (k)^n_c$ با $R(n, c, k)$ نشان می‌دهیم.

۱–۷ تعریف.

۱) زبان حساب مرتبه اول پئانو PA، زبان مرتبه اول است که علاوه بر نمادهای منطقی، نماد سور و تساوی شامل نماد ثابت ۰، نماد تابعی یک متغیره S (تابع تالی)، و دو نماد تابعی دو متغیره جمع + و ضرب . است. این نمادها به طور طبیعی تعبیر می‌شوند. اصول این نظریه عبارتند از

$$\begin{array}{ll} Axiom\ 1 & \forall x\ (0 \neq Sx) \\ Axiom\ 2 & \forall x \forall y\ (Sx = Sy \to x = y) \\ Axiom\ 3 & \forall x\ (x + 0 = x) \\ Axiom\ 4 & \forall x \forall y\ (x + Sy = S(x + y)) \\ Axiom\ 5 & \forall x\ (x.0 = 0) \\ Axiom\ 6 & \forall x \forall y\ (x.Sy = x.y + x) \end{array}$$

به علاوه هر جمله که بستار عمومی نمونه‌ای از اصل زیر باشد

$$Induction\ Schema \quad \phi(0) \wedge \forall x(\phi(x) \to \phi(s(x))) \to \forall x \phi(x)$$

که در آن $\phi(x)$ فرمولی در زبان PA است که شامل متغیر آزاد x است.

۲) هرگاه اصل استقرا را فقط برای فرمول‌های Σ_n یا Π_n بپذیریم، سیستم حاصل را به ترتیب با $I\Sigma_n$ و $I\Pi_n$ نشان می‌دهیم.

با توجه به کارهای انجام شده در [۲۱] می‌توان دید که قضیه رمزی نامتناهی قابل فرمول‌بندی در PA نیست. با این حال به طور غیر دقیق می‌توان گفت که در قضیه رمزی نامتناهی سور به توابع $f : [\mathbb{N}]^n \to c$ اشاره می‌کند و لذا عبارتی مرتبه دوم است. ولی با استفاده از لم گودل یا هر روش کد کردن دیگری می‌توان دنباله‌های صعودی به طول n از مجموعه $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ و توابع $f : [m]^n \to c$ را در زبان PA بیان کرد. بنابر نتایج شناخته شده می‌توان دید که نماد $m \to (k)^n_c$ قابل بیان شدن در PA با یک فرمول Δ_1 است. توضیحات فوق نشان می‌دهند که قضیه رمزی متناهی قابل بیان شدن در PA است. هم‌چنین نشان

داده شده است که این قضیه قابل اثبات در PA است. برای توضیحات بیشتر در این مورد خواننده می‌تواند به کتاب‌های [۱۹] و [۲۳] مراجعه کند.

در ادامه تعمیمی از قضیه رمزی متناهی را در نظر می‌گیریم که در PA قابل بیان باشد ولی اثبات‌پذیر نباشد.

۱-۸ تعریف.

۱) مجموعه $H \subseteq \mathbb{N}$ را تا اندازه‌ای بزرگ یا به طور خلاصه بزرگ نامیم هرگاه $|H| \geq \min(H)$.

۲) نماد $X \to_* (k)^n_c$ به این معنا است که برای هر تابع $f : [X]^n \to c$ مجموعه $H \subseteq X$ همگن برای f وجود دارد به طوری که $|H| \geq \max\{k, \min(H)\}$. بنابراین $\to_*$ همان $\to$ است با این شرط اضافه که مجموعه همگن باید بزرگ نیز باشد.

به عنوان مثال دو مجموعه $\{۴, ۵, ٦, ۷\}$ و $\{۵, ٦, ۷, ۸\}$ را در نظر می‌گیریم. به سادگی مشاهده می‌شود که مجموعه اول یک مجموعه بزرگ است ولی دومی بزرگ نیست و این در حالی است که این مجموعه‌ها تعداد عضو یکسانی دارند.

قضیه پاریس—هرینگتون تعمیمی ساده ولی با اهمیت از قضیه رمزی متناهی است که در آن مجموعه همگن باید بزرگ نیز باشد.

۱-۹ قضیه پاریس—هرینگتون. ([۳۵]) *همواره داریم*

$$\forall n, c, k \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N} \; \Big(m \to_* (k)^n_c\Big).$$

قضیه پاریس—هرینگتون که به طور خلاصه با PH نشان داده می‌شود را می‌توان در PA فرمول‌بندی کرد. برای روشن شدن این مطلب تذکر می‌دهیم که PA برای جملاتی که مربوط به اعداد طبیعی است با نظریه حاصل از جایگزینی اصل بی‌نهایت با نقیض آن در اصول معمول نظریه مجموعه‌ها ZF معادل است. بنابراین می‌توان قضیه پاریس—هرینگتون را مستقیماً در این نظریه بدون نیازی به کد کردن فرمول‌بندی کرد (مرجع [۳۵] را ببینید). با این حال پاریس و هرینگتون در [۳۵] و بر اساس کارهای انجام شده در [۲۷] نشان دادند که این قضیه را در PA نمی‌توان اثبات کرد. اثباتی از این قضیه که در [۳۵] ارائه شده و در ادامه

می‌آید، از قضیه رمزی نامتناهی استفاده می‌کند و توضیحات فوق نشان می‌دهند که این اثبات را نمی‌توان به عنوان اثباتی در PA درنظر گرفت، یعنی

$$PA \nvdash PH \equiv \forall n, c, k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \Big(m \rightarrow_* (k)^n_c\Big).$$

برای بعد ثابت n قضیه زیر برقرار است.

۱−۱۰ قضیه. ([۱۹]) *فرض کنیم* $PH(n, c) \equiv \forall x, k \exists y \Big([x, y] \rightarrow_* (k)^n_c\Big)$. *در این صورت*

۱) $I\Sigma_{n+1} \vdash \forall c\ PH(n+1, c)$

۲) $I\Sigma_n \nvdash \forall c\ PH(n+1, c)$.

۱−۱۱ تعریف.

۱) مجموعه تمام دنباله‌های متناهی از اعضای $\mathbb{N}$ را با $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم.

۲) یک درخت مجموعه $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ است به طوری که هر قطعه اولیه از هر دنباله در T به T تعلق داشته باشد.

۳) یک مسیر در T تابعی مانند $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ است به طوری که برای هر $k \in \mathbb{N}$ دنباله

$$\langle f(0), \ldots, f(k-1)\rangle$$

در T باشد.

۴) برای $\sigma, \tau \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$، $\sigma^\frown\tau$ دنباله حاصل از اضافه شدن σ به τ است.

۵) درخت T را با شاخه‌های متناهی گوییم هرگاه برای هر $\sigma \in T$ حداکثر تعداد متناهی n وجود داشته باشد به طوری که $\sigma^\frown\langle n\rangle \in T$.

اثبات قضیه پاریس−هرینگتون با استفاده از قضیه رمزی نامتناهی مبتنی بر یکی از نتایج شناخته شده در ریاضیات تحت عنوان لم کونیگ است که در ادامه می‌آید.

۱−۱۲ لم کونیگ. *هر درخت نامتناهی با شاخه‌های متناهی دارای یک مسیر نامتناهی است.*

اثبات قضیه ۱—۹. اعداد n, k, c را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم m ای با خاصیت گفته شده در قضیه وجود نداشته باشد. فرض کنیم f یک مثال نقض برای m باشد که در آن f یک رنگ‌آمیزی از $[m]^n$ با c رنگ است و مجموعه همگن بزرگ از اندازه حداقل k برای f وجود ندارد. با توجه به متناهی بودن تعداد توابع با دامنه m و برد c و این حقیقت که اگر f یک مثال نقض برای m باشد و $m_۱ < m$ آن‌گاه تحدید f به $m_۱$ یک مثال نقض برای $m_۱$ است، می‌توان مجموعه تمام مثال نقض‌ها را به عنوان یک درخت نامتناهی با شاخه‌های متناهی در نظر گرفت. به عبارت دقیق‌تر اگر $f_۱$ و $f_۲$ به ترتیب مثال نقض برای $m_۱$ و $m_۲$ باشند، $f_۲$ را در درخت به عنوان تالی $f_۱$ قرار می‌دهیم اگر $m_۱ < m_۲$ و $f_۱$ تحدید $f_۲$ به $[m_۱]^n$ باشد. بنابر لم کونیگ $f : [\mathbb{N}]^n \to c$ وجود دارد که برای هر m تحدید f به $[m]^n$ یک مثال نقض برای m است. با استفاده از قضیه رمزی نامتناهی مجموعه نامتناهی $H \subseteq \mathbb{N}$ همگن برای f وجود دارد. اما با در نظر گرفتن k و $\min(H)$ و انتخاب m به اندازه کافی بزرگ مشاهده می‌شود که $H \cap m$ یک مجموعه همگن بزرگ از اندازه حداقل k برای $f \restriction [m]^n$ است. $\square$

تذکر می‌دهیم که برای هر n اثبات فوق را می‌توان در PA فرمول‌بندی کرد. لذا برای هر n،

$$PA \vdash \forall c, k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \left(m \to_* (k)^n_c\right).$$

۱—۱۳ تعریف.

۱) تابع بازگشتی $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ را به طور اثبات‌پذیر بازگشتی گوییم هرگاه برای حداقل یک عدد گودل e برای تابع f، PA ثابت کند که e عدد گودل یک تابع تام بازگشتی است.

۲) فرض کنیم $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. گوییم f بر g احاطه دارد هرگاه به جز برای حداکثر تعداد متناهی برای بقیه مقادیر n داشته باشیم $f(n) > g(n)$.

فرض کنیم $R^*(n, c, k)$ کوچک‌ترین عدد m باشد به طوری که $m \to_* (k)^n_c$. اگر نشان داده شود که $R^*(n, n, n)$ بر تمام توابع به طور اثبات‌پذیر بازگشتی احاطه دارد آن‌گاه بلافاصله خواهیم داشت

$$PA \not\vdash \forall n, c\ \exists m\ \left(m \to_* (n)^n_c\right)$$

چون در غیر این صورت تابع $R^*(n, n, n) + ۱$ به طور اثبات‌پذیر بازگشتی می‌شود که چنین نیست.

تذکر می‌دهیم که در [۲۴] قضیه پاریس—هرینگتون با استفاده از ابزار کاملاً ترکیبیاتی اثبات شده است. در واقع در این مقاله با استفاده از ابزارهای ترکیبیاتی کران‌های بالایی و پایینی برای تابع $R^*(n, n, n)$ ارائه

شده است. سپس به کمک این کران‌ها و با بکارگیری توصیفی صریح از توابع به طور اثبات‌پذیر بازگشتی مربوط به واینر [۴۳]، نشان داده می‌شود که تابع $R^*(n,n,n)$ بر تمام توابع به طور اثبات‌پذیر بازگشتی احاطه دارد.

۱–۱۴ تعریف.

۱) ε_0 کوچکترین اردینال α است که در معادله اوردینالی $\omega^\alpha = \alpha$ صدق می‌کند.

۲) هر اردینال $\lambda > 0$ دارای نمایش منحصر به فردی به صورت

$$\lambda = \omega^{\alpha_1} n_1 + \omega^{\alpha_2} n_2 + \cdots + \omega^{\alpha_k} n_k$$

است که در آن $n_1, \ldots, n_k$ اعداد صحیح مثبت هستند و $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$. به این نمایش نمایش نرمال کانتور می‌گوییم. بنابراین اگر $\lambda > 0$ آن‌گاه λ دارای نمایش منحصر به فردی به شکل $\lambda = \omega^\alpha(\beta + 1)$ است که $\alpha = \alpha_k$.

۳) برای هر اردینال حدی $\lambda \le \varepsilon_0$ دنباله یکنواخت اکید $\{\lambda\}(n)$ همگرا به λ به صورت زیر تعریف می‌شود.

(a) اگر $\lambda = \omega^{\alpha+1}(\beta + 1)$، قرار می‌دهیم $\{\lambda\}(n) = \omega^{\alpha+1}\beta + \omega^\alpha n$. بنابراین به عنوان مثال $\{\omega\}(n) = n$.

(b) اگر $\lambda = \omega^\gamma(\beta + 1)$ که $\gamma < \lambda$ اردینال حدی است، قرار می‌دهیم $\{\lambda\}(n) = \omega^\gamma\beta + \omega^{\{\gamma\}(n)}$.

(c) اگر $\lambda = \varepsilon_0$، قرار می‌دهیم $\{\varepsilon_0\}(0) = \omega$ و $\{\varepsilon_0\}(n + 1) = \omega^{\{\varepsilon_0\}(n)}$.

مفهوم فوق برای اردینال‌های غیر حدی نیز به سادگی تعریف می‌شود. قرار می‌دهیم $\{0\}(n) = 0$ و $\{\beta + 1\}(n) = \beta$.

۴) اگر $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ یک تابع باشد و $\ell \in \mathbb{N}$، آن‌گاه F^ℓ ترکیب ℓ بار تابع F با خودش است یعنی $F^0(i) = i$ و $F^{\ell+1}(i) = F(F^\ell(i))$.

۵) برای $0 \le \eta \le \varepsilon_0$ تابع $F_\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

(a) اگر $\eta = 0$، قرار می‌دهیم $F_0(i) = i + 1$.

(b) اگر $\eta = \beta + 1$، قرار می‌دهیم $F_\eta(i) = F_\beta^{i+1}(i)$.

(c) اگر η حدی باشد، قرار می‌دهیم $F_\eta(i) = F_{\{\eta\}(i)}(i)$.

می‌توان مشاهده کرد که سرعت رشد تقریبی چند تابع اول از لیست فوق به صورت زیر است $F_1(i) \approx 2i$، $F_2(i) \approx 2^i$ و $F_3(i) \approx 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^i}}}}}}$ که در F_3 تعداد ۲ ها i تا است. هم‌چنین بنابر نتایج شناخته شده، F_η در PA به طور اثبات‌پذیر بازگشتی است اگر و تنها اگر $\eta < \varepsilon_0$. تذکر این نکته خالی از لطف نیست که برای هر $n < \omega$ تابع F_n بازگشتی اولیه است در صورتی که F_ω بازگشتی هست ولی بازگشتی اولیه نیست. در واقع F_ω همان تابع آکرمن است.

۱—۱۵ تعریف. قرار می‌دهیم $\sigma(b,c) = R^*(b,c,b)$.

در [۲۴] نشان داده شده است که سرعت رشد تابع $\sigma(n,n)$ با سرعت رشد $F_{\varepsilon_0}(n-2)$ برابر است. به طور دقیق‌تر قضیه زیر را داریم.

۱—۱۶ قضیه. ([۲۴]) برای هر $n \geq 20$ داریم

$$F_{\varepsilon_0}(n-3) \leq \sigma(n,8) \leq F_{\varepsilon_0}(n-2).$$

بنابراین قضیه پاریس—هرینگتون یعنی این مطلب که تابع $\sigma(n,n)$ بر تمام توابع به طور اثبات‌پذیر بازگشتی PA احاطه دارد نتیجه‌ای از قضیه فوق است.

قضیه ناتمامیت گودل به طور غیر رسمی بیان می‌کند که هر اصل‌بندی سازگار T از نظریه اعداد شامل جمله‌ای تصمیم‌ناپذیر است، یعنی جمله σ وجود دارد که T قدرت اثبات هیچیک از σ و $\neg\sigma$ را ندارد. به ویژه جمله σ وجود دارد که $\mathrm{PA} \nvdash \sigma$ و $\mathrm{PA} \nvdash \neg\sigma$. در این حالت گوییم σ مستقل از PA است. یادآوری می‌کنیم که اثبات نظریه مدلی برای این قضیه اولین بار توسط اسکات ارائه شده است. دومین قضیه ناتمامیت گودل بیان می‌کند که برای نظریه سازگار T از نظریه اعداد، جمله‌ای که سازگاری T را بیان کند در T قابل اثبات نیست. به ویژه $\mathrm{PA} \nvdash \mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$. به سادگی مشاهده می‌شود که جمله گودل وابسته به مفاهیم مجرد و عمیق منطق ریاضی است. مدت زمان زیادی نزدیک به نیم قرن طول کشید تا جمله‌ای از ریاضیات معمولی و مستقل از PA معرفی شود و آن چیزی نبود به جز قضیه پاریس—هرینگتون که در حدود سال ۱۹۷۷

میلادی ارائه شد و ماهیت ترکیبیاتی دارد. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد این قضیه قابل فرمول‌بندی در زبان PA است.

قضیه رمزی کانونیک که مربوط به اردوش و رادو [۱۳] است اجازه تعداد نامتناهی کلاس را می‌دهد و تابع دلخواه $f : [\mathbb{N}]^n \to \mathbb{N}$ را در نظر می‌گیرد. البته نمی‌توان انتظار داشت که این تابع دارای مجموعه همگن نامتناهی باشد همانگونه که این مطلب در مثال‌های ساده زیر نشان داده شده است ($\langle . \rangle$ تابع بازگشتی دوسویی دلخواهی از $[\mathbb{N}]^۲$ به $\mathbb{N}$ است).

۱) $f(x_۱, x_۲) = x_۱$.

۲) $f(x_۱, x_۲) = x_۲$.

۳) $f(x_۱, x_۲) = \langle x_۱, x_۲ \rangle$.

با این حال قضیه رمزی کانونیک در حالت مثلاً دو بعدی تضمین می‌کند که برای تابع $f : [\mathbb{N}]^۲ \to \mathbb{N}$ مجموعه نامتناهی $H \subseteq \mathbb{N}$ موجود است که یا همگن باشد یا f بر H شبیه به یکی از توابع فوق رفتار کند. به عبارت دقیق‌تر برای تابع داده شده $f : [\mathbb{N}]^۲ \to \mathbb{N}$، مجموعه نامتناهی $H \subseteq \mathbb{N}$ وجود دارد که یکی از موارد زیر برقرار باشد

۱) برای هر $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \in H$ داریم $f(x_۱, x_۲) = f(y_۱, y_۲)$.

۲) برای هر $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \in H$ داریم $f(x_۱, x_۲) = f(y_۱, y_۲) \leftrightarrow x_۱ = y_۱$.

۳) برای هر $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \in H$ داریم $f(x_۱, x_۲) = f(y_۱, y_۲) \leftrightarrow x_۲ = y_۲$.

۴) برای هر $x_۱, x_۲, y_۱, y_۲ \in H$ داریم $f(x_۱, x_۲) = f(y_۱, y_۲) \leftrightarrow (x_۱ = y_۱ \wedge x_۲ = y_۲)$.

توجه داریم که در حالت اول H برای f همگن است و در حالت‌های بعدی f بر H نسبت به یک یا هردو مولفه یک به یک است. برای حالت کلی $f : [X]^n \to \mathbb{N}$، تعداد ۲^n امکان مختلف وجود دارد.

۱—۱۷ تعریف. فرض کنیم $n \geq ۱$، $X \subseteq \mathbb{N}$ نامتناهی باشد، $f : [X]^n \to \mathbb{N}$ و $v \subseteq n$. گوییم $H \subseteq X$ برای f یک مجموعه v—کانونیک است اگر برای هر $x_۰, \ldots, x_{n-۱}$ و $y_۰, \ldots, y_{n-۱}$ در H داشته باشیم

$$f(x_۰, \ldots, x_{n-۱}) = f(y_۰, \ldots, y_{n-۱}) \leftrightarrow \Big(\forall i \in v(x_i = y_i)\Big).$$

گوییم H برای f کانونیک است هرگاه $v \subseteq n$ موجود باشد که H برای f یک مجموعه v—کانونیک باشد.

با این توضیحات قضیه رمزی کانونیک را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

۱—۱۸ قضیه رمزی کانونیک. ([۱۳]) *فرض کنیم* $n \geq 1$، $X \subseteq \mathbb{N}$ *نامتناهی باشد و* $f : [X]^n \to \mathbb{N}$. *در این صورت یک مجموعه نامتناهی* H *و کانونیک برای* f *موجود است.*

به سادگی دیده می‌شود که این قضیه تعمیمی از قضیه رمزی نامتناهی است با این تفاوت که محدودیتی برای متناهی بودن تعداد کلاس‌های افراز وجود ندارد. تذکر می‌دهیم که یک مجموعه همگن در واقع همان مجموعه $\emptyset$—کانونیک است. اگر برد تابع f کران‌دار باشد، هر مجموعه کانونیک یک مجموعه همگن است. با این توضیح مشاهده می‌شود که قضیه رمزی نامتناهی نتیجه‌ای از قضیه رمزی کانونیک است. خلاصه‌ای از اثبات این مطلب در [۳۱] ارائه شده که برای راحتی خواننده این اثبات در ادامه می‌آید.

۱—۱۹ گزاره. ([۳۱]) *فرض کنیم* $n, c \geq 1$، $X \subseteq \mathbb{N}$ *نامتناهی باشد و* $f : [X]^n \to c$. *اگر مجموعه نامتناهی* H *برای* f *کانونیک باشد، آن‌گاه* H *برای* f *همگن است.*

اثبات. فرض کنیم H برای f یک مجموعه v—کانونیک باشد که $v \subseteq n$. نشان می‌دهیم $v = \emptyset$. فرض کنیم چنین نباشد و $i \in v$. فرض کنیم H به صورت

$$H = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+c-1}, \ldots\}$$

باشد. در این صورت $c + 1$ مقدار

$$\begin{aligned}
&f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_{n-1}),\\
&f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n),\\
&\quad\vdots\\
&f(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+c}, \ldots, x_{n+c-1}),
\end{aligned}$$

باید متمایز باشند چون مؤلفه i ام متمایز دارند و H مجموعه‌ای v—کانونیک است و $i \in v$. از طرفی برای تابع f حداکثر c مقدار مختلف وجود دارد. این تناقض نشان می‌دهد که $v = \emptyset$ و لذا H برای f همگن است. □

یکی دیگر از جملات مستقل از PA توسط کاناموری و مک‌آلون در [۲۲] بیان شده است.

۱—۲۰ تعریف. فرض کنیم $n \geq 1$، $X \subseteq \mathbb{N}$ نامتناهی باشد و $f : [X]^n \to \mathbb{N}$.

۱) گوییم f یک تابع کاهشی است هرگاه برای هر $x_\circ,\dots,x_{n-۱}$ در X داشته باشیم

$$f(x_\circ,\dots,x_{n-۱}) \leq x_\circ.$$

۲) گوییم $H \subseteq X$ یک مجموعه مین—همگن برای f است هرگاه برای هر $x_\circ,\dots,x_{n-۱}$ و $y_\circ,\dots,y_{n-۱}$ در H داشته باشیم

$$x_\circ = y_\circ \to f(x_\circ,\dots,x_{n-۱}) = f(y_\circ,\dots,y_{n-۱}).$$

در قضیه تابع کاهشی نیز لازم نیست تعداد کلاس‌ها متناهی باشد. البته نمی‌توان انتظار داشت که چنین توابعی مجموعه همگن داشته باشند. با این حال در این قضیه فقط توابع کاهشی در نظر گرفته می‌شوند و وجود مجموعه مین—همگن تضمین می‌شود.

۱—۲۱ قضیه تابع کاهشی. ([۲۲]) *فرض کنیم* $n \geq ۱$، $X \subseteq \mathbb{N}$ *نامتناهی و* $f : [X]^n \to \mathbb{N}$ *یک تابع کاهشی باشد. در این صورت یک مجموعه نامتناهی* H *مین—همگن برای* f *موجود است.*

می‌توان گفت که $\{\circ\}$—کانونیک قوی‌تر از مین—همگن است. زیرا مین—همگن تنها شرط اگر را دارد در صورتی که $\{\circ\}$—کانونیک به صورت اگر و تنها اگر است. قضیه تابع کاهشی نیز نتیجه‌ای از قضیه رمزی کانونیک است. این مطلب در [۲۲] اثبات شده و برای راحتی خواننده در ادامه می‌آید.

۱—۲۲ گزاره. ([۲۲]) *فرض کنیم* $n \geq ۱$، $X \subseteq \mathbb{N}$ *نامتناهی و* $f : [X]^n \to \mathbb{N}$ *تابعی کاهشی باشد. اگر مجموعه نامتناهی* H *برای* f *کانونیک باشد، آن‌گاه* H *برای* f *مین—همگن است.*

اثبات. اگر $n = ۱$، آن‌گاه هر زیرمجموعه نامتناهی X برای f مین—همگن است. بنابراین می‌توان فرض کرد که $n \geq ۲$. فرض کنیم H برای f یک مجموعه v—کانونیک باشد که $v \subseteq n$. نشان می‌دهیم $v = \emptyset$ یا $v = \{\circ\}$. فرض کنیم چنین نباشد و $\circ \neq i \in v$. فرض کنیم H به صورت

$$H = \{x_\circ, x_۱, \dots, x_{n+x_\circ}, \dots\}$$

باشد. در این صورت $x_\circ + ۲$ مقدار

$$\begin{aligned}
&f(x_\circ,\dots,x_{i-۱},x_i,\dots,x_{n-۱}),\\
&f(x_\circ,\dots,x_{i-۱},x_{i+۱},\dots,x_n),\\
&\quad\vdots\\
&f(x_\circ,\dots,x_{i-۱},x_{i+x_\circ+۱},\dots,x_{n+x_\circ}),
\end{aligned}$$

باید متمایز باشند چون مؤلفه iام متمایز دارند و H مجموعه‌ای v—کانونیک است و $i \in v$. از طرفی با توجه به کاهشی بودن تابع f، برای مقادیر فوق حداکثر $x_۰ + ۱$ مقدار مختلف وجود دارد. این تناقض نشان می‌دهد که $v \subseteq \{۰\}$. اگر $v = \emptyset$، یعنی H برای f همگن است و لذا مین—همگن خواهد بود. اگر $v = \{۰\}$، برای $x_۰, \ldots, x_{n-۱}$ و $y_۰, \ldots, y_{n-۱}$ در H داریم $f(x_۰, \ldots, x_{n-۱}) = f(y_۰, \ldots, y_{n-۱})$ اگر و تنها اگر $x_۰ = y_۰$ و لذا H برای f مین—همگن است. □

می‌توان قضیه تابع کاهشی را به کمک نمادی مشابه آنچه در قضیه رمزی استفاده شد نیز نمایش داد.

۱—۲۳ تعریف. ([۲۲]) فرض کنیم $n \in \mathbb{N}$ و k عضوی از $\mathbb{N}$ یا خود $\mathbb{N}$ باشد. در این صورت نماد $X \to (k)^n_{\text{reg}}$ به این معناست که هرگاه $f : [X]^n \to \mathbb{N}$ تابعی کاهشی باشد، آن‌گاه مجموعه $H \subseteq X$ مین—همگن برای f از اندازه k موجود است.

با استفاده از این نماد قضیه تابع کاهشی به صورت زیر قابل بیان است.

۱—۲۴ قضیه تابع کاهشی. ([۲۲]) *همواره داریم*

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(\mathbb{N} \to (\mathbb{N})^n_{reg}\right).$$

قضیه کاناموری—مک‌آلون که آن را به اختصار با KM نشان می‌دهیم حالت متناهی قضیه تابع کاهشی و به صورت زیر است.

۱—۲۵ قضیه کاناموری—مک‌آلون. ([۲۲]) *همواره داریم*

$$\forall n, k \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} \left(m \to (k)^n_{reg}\right).$$

با استدلال ساده‌ای می‌توان نشان داد که قضیه ۱—۲۵ نتیجه‌ای از قضیه ۱—۲۴ است. برای این منظور فرض کنیم $n, k \in \mathbb{N}$ و برای هر $m \in \mathbb{N}$ یک مثال نقض $f_m : [m]^n \to m$ وجود داشته باشد. در این صورت تابع $f : [\mathbb{N}]^{n+۱} \to \mathbb{N}$ را با ضابطه

$$f(x_۰, \ldots, x_n) = f_{x_n}(x_۰, \ldots, x_{n-۱})$$