وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تفرش
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پیشنهاد موضوع تحقیقاتی برای پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

# حل معادلات انتگرال و دیفرانسیل به کمک موجک‌ها

استاد راهنما اول

**دکتر مهدی رمضانی**

استاد راهنما دوم

**دکتر محمد رضا احمدی دارانی**

نگارنده

**مریم محسنی**

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه کسانی که

دوستشان دارم

## سپاس خداوندی را سزاست که ...


آفریننده بندگان، گستراننده زمین، جاری‌کننده آب در زمین‌های پست و رویاننده گیاه در زمین‌های بلند است. او که داناست به اثر هر قدمی، صدای هر حرکتی، آوای هر کلمه‌ای و همهمه هر نفس‌زننده‌ای.

انسان از طریق اندیشیدن و تلاش جهت کسب معرفت به نعمت آگاهی دست پیدا می‌کند و چه باشکوهند از خودگذشتگانی که محصول سال‌ها تلاش و مشقت خود را به سادگی در اختیار طالبان آن قرار می‌دهند.

پس از سپاس از خداوند متعال، بر خود لازم می‌دانم از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر مهدی رمضانی که در تمام مراحل پایان‌نامه همواره از راهنمایی‌های ارزشمند ایشان برخوردار بوده‌ام، قدردانی نمایم.

همچنین از جناب آقای دکتر محمدرضا احمدی دارانی که با ارائه راهنمایی‌های مدبرانه خود اینجانب را با مفاهیم اصلی این پایان‌نامه آشنا کردند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از زحمات اساتید ارجمند جناب آقای دکتر محمد افضلی‌نژاد و جناب آقای دکتر محسن شاهرضایی که زحمت داوری این پایان‌نامه را قبول نموده‌اند، کمال سپاسگزاری را دارم.

در پایان بار دیگر مراتب تقدیر و تشکر خود را از اساتید خود و تمامی عزیزانی که در انجام این پایان‌نامه اینجانب را یاری کرده‌اند و از این سبب بر گردن من حق دارند ابراز داشته و برای ایشان و خانواده محترمشان سلامتی و تندرستی همراه با عزت و سربلندی را مسئلت می‌نمایم.

# چکیده


موجک هار مجموعه‌ای از توابع متعامد قطعه‌ای ثابت است که می‌توان تابع $f$ را به کمک آن تقریب زد.
همچنین انتگرال $f$ را می‌توان به کمک همین موجک محاسبه کرد.
امروزه محاسبه بهترین تقریب برای تابع $f$، مطلبی است که از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. ما در این پایان‌نامه قصد داریم تابع $f$ را علاوه بر موجک هار به کمک موجک‌های لژاندر و فلتلت نیز تقریب زده و فرمولی را برای محاسبه انتگرال $f$ به کمک این دو موجک، همانطور که برای موجک هار محاسبه شده است، به‌دست آوریم.
همچنین حل مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم و حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی مرتبه دوم به کمک موجک هار را نیز موردبحث قرار می‌دهیم.



**کلمات کلیدی:** *موجک هار، موجک لژاندر، موجک فلتلت، دوگان موجک فلتلت، مسأله مقدار مرزی مرتبه دوم، معادله انتگرال فردهلم غیرخطی مرتبه دوم، انتگرال یگانه، انتگرال دوگانه، انتگرال سه‌گانه، تقریب تابع*

# فهرست مطالب

# مقدمه

معنی عامیانه موجک، موج کوچک است و از اصطلاح فرانسوی $ondelett(onde : wave)$ گرفته شده است. ایده‌ی نمایش یک تابع بر حسب مجموعه‌ی کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه، ریاضیدان و فیزیکدان بین سال‌های ۱۸۰۶ – ۱۸۰۲ مطرح شد. فوریه ثابت کرد که می‌توان از محورهایی استفاده کرد که با کمک مجموعه‌ای نامتناهی از توابع سینوسی ساخته می‌شوند. به‌عبارت دیگر فوریه نشان داد که تابع $f$ را می‌توان به شکل حاصل جمع بینهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $sin(ax)$ و $cos(ax)$ نمایش داد.

با گذشت زمان ضعف پایه‌های فوریه نمایان شد و سپس در سال ۱۹۰۹ هار [۱] اولین کسی بود که به موجک‌ها اشاره کرد. در سال ۱۹۳۰ دانشمندان به فکر اصلاح پایه‌های فوریه افتادند و متوجه شدند که پایه‌های فوریه بهترین ابزار ممکن در اکتشافات زیرزمین نیستند.

در سال ۱۹۸۰، نخستین پایه‌های موجکی متعامد کشف و در همین سال‌ها مفهوم موجک و تبدیل موجک، به عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین‌لرزه مطرح شد. در سال ۱۹۷۶ میر [۲] و مالت [۳] از پایه‌های موجک متعامد توانستند آنالیز تجزیه چندگانه را بسازند و مالت تجزیه موجک‌ها و الگوریتم‌های بازسازی را با به‌کار بردن آنالیز تجزیه چندگانه به‌وجود آورد.

در سال ۱۹۹۰ مورنزی همراه با آنتوان موجک‌ها به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد دیگر گسترش

۱ Alfred Haar

۲ Y.Meyer

۳ S.Mallat

یافت و به این ترتیب بود که آنالیز موجکی پایه‌گذاری گردید.

یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید و هیجان‌انگیز ریاضیات محض که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز همساز است. امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته‌های علوم و مهندسی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه‌های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط تابع‌ها سروکار داریم ولی این بسط بر حسب "موجک‌ها" انجام می‌شود.

موجک، تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط بر حسب انتقال‌ها و تجانس این تابع انجام می‌گیرد، برخلاف چندجمله‌ای‌های مثلثاتی، موجک‌ها در فضا به صورت موضعی بررسی می‌شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکتری بین بعضی توابع و ضرایب آن‌ها امکان‌پذیر می‌شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می‌گردد. هر کاربردی که مبتنی بر تبدیل فوریه سریع است را می‌توان با استفاده از موجک‌ها فرمول‌بندی کرد و اطلاعات فضایی (یا زمانی) موضعی بیشتری به‌دست آورد. به‌طورکلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم‌های عددی سریع برای محاسبه‌ی عملگرهای انتگرالی اثر می‌گذارد.

آنالیز موجک حاصل سال‌ها کار ریاضی است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده‌ترین پرسش‌های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشین-های انعطاف‌پذیر ساده‌تری از طریق آنالیز همساز ارائه شدند. مستقل از این نظریه که در ریاضیات محض جای دارد، صورت های مختلفی از این رهیافت چند مقیاسی را در طی دهه‌ی گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری، و استخراج نفت دیده‌ایم[۲۰].

مطالب مندرج در این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

در فصل اول تعاریف و خواص معادلات انتگرال را مطرح کرده‌ایم.

در فصل دوم نظریه موجک‌ها مطرح و موجک‌های هار، لژاندر و فلتلت معرفی شده است. همچنین روش انتگرال‌گیری عددی بر پایه موجک هار که در مقاله [۱] مطرح شده را در این فصل بیان کرده‌ایم

و از این روش الهام گرفته و انتگرال‌گیری عددی بر پایه موجک لژاندر و فلتلت نیز محاسبه شده است. در این فصل به دقت حاصل از تقریب تابع به کمک هر یک از موجک‌های عنوان شده نیز توجه خاصی شده است.

در فصل سوم، روش محاسبه مسائل مقدار مرزی مرتبه دوم به کمک موجک هار که در مقاله [۲] بیان گردیده را مطرح کرده‌ایم.

در فصل چهارم حل عددی معادلات انتگرال فردهلم غیرخطی مرتبه دوم به کمک موجک هار بیان شده است. مطالب این فصل نیز در مقاله [۳] عنوان شده است.

# فصل ۱

# مروری بر معادلات انتگرال و دیفرانسیل

## ۱.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

بویس ریموند [۱] اولین کسی بود که نام معادله انتگرال را به معادلاتی که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود، نسبت داد. در عمل، لاپلاس [۲] اولین بار در سال ۱۷۸۲ نظریه معادلات انتگرال را مطرح کرد. وی معادله انتگرال $y(x) = \int_0^\infty e^{-st} f(x)dx$ را مورد بررسی قرارداد. پس از آن فوریه [۳] مبحث معادلات انتگرال را دنبال کرد. حدود سالهای ۱۸۲۰ آبل [۴] در مسائل مکانیکی خود با معادلات انتگرال روبرو شد. در سال ۱۸۲۶ پواسون [۵] در نظریه مغناطیسی خود به این معادلات برخورد کرد. در سال ۱۸۳۲ لیوویل [۶] در حل برخی معادلات دیفرانسیل به کمک معادلات انتگرال و بعد از او در سال ۱۸۷۰ نیومن [۷] با تبدیل مساله دیریکله [۸] به یک معادله انتگرال از کسانی بودند که نقش موثری

[۱] Bois Reymond

[۲] Laplace

[۳] Fourier

[۴] Able

[۵] Poisson

[۶] Liouville

[۷] Neuman

[۸] Diriclet

در تکامل نظریه معادلات انتگرال داشتند. در سال ۱۸۹۶ پوانکاره [۹] در رابطه با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، معادلات انتگرالی را مطرح کرد. در همان سال ولترا [۱۰] از ایتالیا برای اولین بار نظریه عمومی معادلات انتگرال به شکل زیر را مطرح کرد.

$$f(x) = y(x) + \lambda \int_a^x k(x,t) f(t) dt$$

در سالهای ۱۹۰۰ تا ۱۹۳۰ فردهلم [۱۱] یک دسته‌بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به صورت زیر ارائه داد و کار ولترا را کامل نمود.

$$f(x) = y(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t) dt$$

هیلبرت [۱۲] نیز تحقیقاتی در مورد معادلات انتگرال انجام داد و مسائل دیفرانسیل را به صورت یک معادله انتگرال تنظیم کرد. در طی پنجاه سال پس از فردهلم و ولترا بحث اصلی معادله انتگرال در خصوص پیشرفت و توسعه آنالیز تابعی آن بود. معادلات انتگرال به عنوان مبحث مهمی در ریاضیات کاربردی ادامه یافت. در حدود سال ۱۹۸۷ برونر [۱۳] و وان در هاون [۱۴] و بعد از آنان هک بوش [۱۵] در سال ۱۹۹۵ و نهایتاً اتکینسون [۱۶] کتاب‌هایی در مورد نظریه عمومی معادلات انتگرال و رفتار عددی آنها منتشر کردند.

معادلات انتگرال در علومی چون فیزیک، مکانیک، ارتباطات، پتروشیمی، ساختمان و پل‌سازی، پرتو-نگاری، نیروگاه‌های هسته‌ای و ... کاربردهای فراوان دارد.

---

[۹] Poincare
[۱۰] Voltra
[۱۱] Fredholm
[۱۲] Hilbert
[۱۳] Bruner
[۱۴] Van der Hauwen
[۱۵] Hack busch
[۱۶] Atkinson

## ۲.۱ دسته‌بندی معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال به معادله‌ای گفته می‌شود که در آن تابع مجهول، زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود و صورت کلی آن به شکل زیر است:

$$y(s)\varphi(s) = g(s) + \lambda \int_a^z k(s,t)y(t)dt \quad , \quad a \leq s,t \leq b$$

که در آن $y$ تابع مجهول و $g$ و $k$ توابع معلوم هستند، $k(s,t)$ هسته معادله انتگرال نام دارد، $\lambda \neq 0$ عدد حقیقی یا مختلط است، $a$ مقداری ثابت و $z$ می‌تواند ثابت $b$ یا متغیر $s$ باشد. دو رده مهم از معادلات انتگرال را در بخش بعدی مورد بحث قرار می‌دهیم.

### ۱.۲.۱ معادلات انتگرال فردهلم و ولترا

معادلات انتگرالی که در آنها دامنه انتگرال‌گیری ثابت است، معادلات انتگرال فردهلم نام دارند.

معادلات انتگرالی که در آنها دامنه انتگرال‌گیری در یکی از دو سر بازه متغیر است، معادلات انتگرال ولترا نام دارند. به عبارت دیگر هرگاه در معادله انتگرال فردهلم مقدار هسته به ازای $s < t$ صفر شود معادله انتگرال ولترا بوجود می‌آید. البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می‌روند. به‌طوریکه اگر معادله دیفرانسیل موردنظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می‌شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل موردنظر در قالب یک مسأله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود. در بخش‌های بعدی در مورد تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا و همچنین تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم بحث خواهیم کرد[۲۳].

معادلات انتگرال فردهلم و ولترا خود به سه دسته زیر تقسیم‌بندی می‌شوند.

**معادلات انتگرال نوع اول**

معادلاتی هستند که در آنها تابع مجهول تنها زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود.

$$g(s) = \lambda \int_a^z k(s,t)y(t)dt \qquad a \leq s,t \leq b$$

**معادلات انتگرال نوع دوم**

معادلاتی هستند که در آنها تابع مجهول هم زیر علامت انتگرال و هم در خارج آن ظاهر می‌شود.

$$y(s) = g(s) + \lambda \int_a^z k(s,t)y(t)dt \qquad a \leq s,t \leq b$$

**معادلات انتگرال نوع سوم (همگن)**

اگر در معادله انتگرال نوع دوم $g(s) = 0$ باشد، معادله انتگرال همگن را خواهیم داشت، که به صورت زیر است.

$$y(s) = \lambda \int_a^z k(s,t)y(t)dt \qquad a \leq s,t \leq b$$

### ۲.۲.۱ معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

معادلات انتگرالی که در آنها تابع تحت انتگرال به صورت خطی $k(s,t)y(t)$ ظاهر شود، معادلات انتگرال خطی و آنهایی که تابع تحت انتگرال به صورت غیرخطی $k(s,t,y(t))$ است، معادلات انتگرال غیرخطی نامیده می‌شود.

### ۳.۲.۱ معادلات انتگرال منفرد و نامنفرد

معادلات انتگرالی که در آنها حدود انتگرال‌گیری یا هسته بی‌کران باشد، منفرد و آنهایی که هم حدود انتگرال‌گیری و هم هسته کراندار است، نامنفرد نامیده می‌شوند.

### ۴.۲.۱ معادلات انتگرال پیچشی

معادلات انتگرالی هستند که در آنها هسته به صورت $K(s,t) = K(s-t)$ می‌باشد.

## ۳.۱ هسته‌های خاص در معادلات انتگرال

### ۱.۳.۱ هسته جدایی‌پذیر

هرگاه بتوان هسته معادله انتگرال را به صورت $K(s,t) = f(s)h(t)$ نوشت، هسته را جدایی‌پذیر می‌نامیم.

### ۲.۳.۱ هسته متقارن

هسته متقارن است، هرگاه $K(s,t) = K(t,s)$ باشد.

### ۳.۳.۱ هسته الحاقی

اگر $K^*(s,t) = \overline{K(t,s)}$ ، $K^*$ را هسته الحاقی $K$ می‌نامیم و دارای خواص زیر است.

۱. $(K^*)^* = K$

۲. $(\lambda k)^* = \lambda^* K^*$

۳. $(KH)^* = H^* K^*$

۴. $(K^*x, y) = (x, K^*y)$

در صورتی که هسته‌های $H$ و $K$ توابعی پیوسته باشند آنگاه ترکیب آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$KH = L(s,r) = \int_a^b K(s,t)H(t,r)dt$$

### ۴.۳.۱ هسته هرمیتی

هسته هرمیتی است هرگاه،

$$K(s,t) = K^*(t,s)$$

### ۵.۳.۱ هسته نرمال

هسته را نرمال گوییم اگر،

$$KK^* = K^*K$$

### ۶.۳.۱ تابع و هسته $L^۲$

می‌گوییم $K(s,t) \in L^۲(a,b)$ هرگاه:

۱. $\int_a^b \int_a^b \mid K(s,t) \mid^۲ dtds < \infty$

۲. $\forall a \leq s \leq b, \int_a^b \mid K(s,t) \mid^۲ dt < \infty$

۳. $\forall a \leq t \leq b, \int_a^b \mid K(s,t) \mid^۲ ds < \infty$

## ۴.۱ تبدیل مسائل مقدار اولیه به معادلات انتگرال ولترا

در این بخش روش تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. قبل از بیان روش، یک فرمول که انتگرال‌های چندگانه را به یک انتگرال یگانه تبدیل می‌کند یادآور می‌شویم.

$$\int_۰^x \int_۰^{x_۱} \int_۰^{x_۲} \cdots \int_۰^{x_{n-۱}} f(x_n) dx_n \cdots dx_۱ = \frac{۱}{(n-۱)!} \int_۰^x (x-t)^{n-۱} f(t) dt \qquad (۱.۱)$$

اکنون به هدف اصلی خود در این بخش برمی‌گردیم و روی تکنیک تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا معادل آن بحث می‌کنیم.

بدون اینکه از کلیت مطلب کاسته شود این تکنیک را روی مسأله مقدار اولیه مرتبه سوم زیر

$$y'''(x) + p(x)y''(x) + q(x)y'(x) + r(x)y(x) = g(x) \tag{۲.۱}$$

با شرایط اولیه

$$y(۰) = \alpha\ ,\ y'(۰) = \beta\ ,\ y''(۰) = \gamma$$

که در آن $\alpha$ و $\beta$ و $\gamma$ ثابت هستند، اعمال می‌کنیم. البته توابع $p(x)$ و $q(x)$ و $g(x)$ توابعی تحلیلی هستند و فرض می‌شود که این توابع حول مبدأ بسط تیلور داشته باشند. علاوه براین فرض می‌کنیم که $g(x)$ روی فاصله مورد بحث پیوسته باشد.

برای تبدیل (۱ ۰ ۲) به یک معادله انتگرال ولترا ابتدا قرار می‌دهیم:

$$y'''(x) = u(x) \tag{۳.۱}$$

که در آن $u(x)$ یک تابع پیوسته روی فاصله مورد بحث می‌باشد.

اکنون از طرفین رابطه (۱ ۰ ۳) از ۰ تا $x$ انتگرال می‌گیریم.

$$y''(x) - y''(۰) = \int_۰^x u(t)dt$$

و با استفاده از شرایط اولیه $y''(۰) = \gamma$ رابطه زیر بدست می‌آید.

$$y''(x) = \gamma + \int_۰^x u(t)dt \tag{۴.۱}$$

برای به‌دست آوردن $y'(x)$ از دو طرف رابطه (۱ ۰ ۴) از ۰ تا $x$ انتگرال می‌گیریم و در نتیجه داریم:

$$y'(x) = \beta + \gamma x + \int_۰^x \int_۰^x u(t)dtdt \tag{۵.۱}$$

به طور مشابه از طرفین معادله (۱ ۰ ۵) از ۰ تا $x$ انتگرال می‌گیریم تا به نتیجه زیر برسیم.

$$y(x) = \alpha + \beta x + \frac{۱}{۲}\gamma x^{۲} + \int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x}\int_{۰}^{x} u(t)dtdtdt \qquad (۶.۱)$$

اکنون از رابطه (۱ ۰ ۱) استفاده می‌کنیم و انتگرال دوگانه در رابطه (۱ ۰ ۵) و انتگرال سه‌گانه در رابطه (۱ ۰ ۶) را به‌ترتیب به انتگرال‌های یگانه زیر تبدیل می‌کنیم.

$$y'(x) = \beta + \gamma x + \int_{۰}^{x}(x-t)u(t)dt \qquad (۷.۱)$$

$$y(x) = \alpha + \beta x + \frac{۱}{۲}\gamma x^{۲} + \frac{۱}{۲}\int_{۰}^{x}(x-t)^{۲}u(t)dt \qquad (۸.۱)$$

با قراردادن روابط (۱ ۰ ۳) ، (۱ ۰ ۴) ، (۱ ۰ ۷) و (۱ ۰ ۸) در معادله (۱ ۰ ۲) این معادله به معادله انتگرال ولترا نوع دوم زیر تبدیل می‌شود.

$$u(x) = f(x) + \int_{۰}^{x} K(x,t)u(t)dt$$

که در آن:

$$K(x,t) = p(x) + q(x)(x-t) + \tfrac{۱}{۲!}r(x)(x-t)^{۲}$$

و

$$f(x) = g(x) - \Big\{\gamma p(x) + \beta q(x) + \alpha r(x) + \gamma x q(x) + r(x)\Big(\beta x + \tfrac{۱}{۲}\gamma x^{۲}\Big)\Big\}$$

## ۵.۱ تبدیل مسائل مقدار مرزی به معادلات انتگرال فردهلم

تاکنون نحوه تبدیل یک مسأله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترای معادل آن را بحث کرده‌ایم. در این بخش هدف بحث روی تکنیک تبدیل یک مسأله مقدار مرزی به معادله انتگرال فردهلم معادل آن

می‌باشد. روش کار مشابه روشی است که در بخش قبل بحث شد لیکن کمی به علت شرایط مرزی با آن متفاوت است. البته مهم است که به این نکته توجه کنیم که روند تبدیل مسائل مقدار مرزی به یک معادله انتگرال فردهلم مشکل‌تر ولی کمتر مورد نیاز است. از آنجا که معمولاً $y'(۰)$ داده نمی‌شود لذا باید توجه خاصی جهت تعریف این کمیت مبذول شود. این هم به سادگی از طریق معادلات حاصل انجام می‌شود.

برای ارائه تصور عملی و بهتر از این روش به اعمال آن روی یک مثال می‌پردازیم.

هدف تعیین یک معادله انتگرال فردهلم متناظر با مسأله مقدار مرزی زیر

$$y''(x) + y(x) = x \, , \ ۰ < x < \pi \tag{۹.۱}$$

همراه با شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشد.

$$y(۰) = ۱ \, , \ y(\pi) = \pi - ۱.$$

ابتدا قرار می‌دهیم:

$$y''(x) = u(x) \tag{۱۰.۱}$$

با انتگرال‌گیری از دو طرف (۱ ۰ ۱۰) از ۰ تا $x$ داریم:

$$\int_۰^x y''(t)dt = \int_۰^x u(t)dt$$

در نتیجه:

$$y'(x) = y'(۰) + \int_۰^x u(t)dt \tag{۱۱.۱}$$

همانطوریکه قبلاً اشاره کردیم $y'(۰)$ در این مسأله مقدار مرزی داده نشده است اما آن را با استفاده از مقدار مرزی در $x = \pi$ تعیین می‌کنیم.