بسم الله الرحمن الرحيم

٣٠٥١٤

۱۳۷۹ /۷/ ۱۰

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تقدیم مدارک

دانشگاه الزهراء

دانشکده علوم

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشتهٔ فیزیك

عنوان

نظریه کوانتومی سیستمهای بس ذره‌ای در دمای صفر

استاد راهنما

دکتر امیر مسعود غزلباش

17963

استاد مشاور

دکتر رضا ثابت داریانی

دانشجو

آژینه سیّاح فیروزه

شهریور ۱۳۷۹

۳۰۵۱۴

تقدیم به

پدرو مادر فداکار و مهربانم .

قدرانی و تشکر :

سپاس خدای بزرگ و مهربان را که به لطف و مرحمت بی پایان و بی دریغ او موفق به اتمام این پایان نامه گردیدم . دراین راه از کمکها و راهنماییهای بی دریغ استادان گرامی آقایان ، امیر مسعود غزلباش و رضا ثابت داریانی که با دلسوزی همواره یاریم نمودند ، تشکر می نمایم .

چکیده

سیستم های بس ذره ای زیر مجموعه هایی از دنیای پیرامون ما مـی باشـند . آنها حاوی تعداد زیادی از ذرات هستند که با هم برهم کنش دارند . ما برای تجزیـه و تحلیـل ایـن سیسـتم هـا بـاید از روشـهای تقریبـی اسـتفاده کنیـم . یکـی از مهمـترین روشهای در چنین تجزیه و تحلیلـی نظریـه میدانهـای کوانتمـی اسـت . بـا اسـتفاده از روشهای کاربردی این نظریه چون نمودارهای فاینمن می تـوان مسـئله را تاهرمرتبـه دلخواهی از اختلال حل کرد و خیلی از کمیتهای فیزیکی سیسـتمهای مختلـف ، کـه بـه نوع ذرات ، برهم کنش ، بین آنها و محیط اطرافشان بستگی دارند ، را محاسبه نمود .

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار	
فصل اول: کوانتش دوم	۱
۱ـ۱ معادله شرودینگر در کوانتش دوم	۲
۱ـ۲ بوزونها	۴
۱ـ۳ فضای هیلبرت بس‌ذره‌ای و عملگرهای خلق و فنا	۷
۱ـ۴ میدانها	۱۱
۱ـ۵ گاز الکترونی تبهگن	۱۲
شکلهای فصل اول	۲۰
فصل دوم: مفاهیم مکانیک آماری در مسئله بس‌ذره‌ای	۲۱
۲-۱ تعاریف اساسی	۲۲
۲-۲ بحث گازهای کامل	۲۳
۲-۳ بوزونها	۲۴
۲-۴ فرمیونها	۲۸
شکلهای فصل دوم	۳۱
فصل سوم: توابع گرین و نظریه میدان برای فرمیونها	۳۲
۳-۱ تصویرها	۳۳
۳-۲ وارد کردن بر هم کنش بی دررو	۳۵
۳-۳ نظریه Gell-Mann و Low در نظریه کوانتومی میدانها در حالت پایه	۳۶
۳-۴ توابع گرین	۳۹
۳-۵ فرمیونهای آزاد	۴۴
۳-۶ نمایش Lehmann برای فرمیونها	۴۶
۳-۷ تعبیر فیزیکی برای تابع گرین	۵۳
شکلهای فصل سوم	۵۶
فصل چهارم: نظریه Wick و تحلیل شکلهای نظریه اختلال برای فرمیونها	۵۷
۴-۱ نظریه Wick	۵۸
۴-۲ آنالیز دیاگرام گونه نظریه اختلال برای فرمیونها	۶۴
۴-۳ شکلهای فاینمن در فضای اندازه حرکت	۷۰
۴-۴ معادلات دایسون (Dyson)	۷۳
۴-۵ اضافه کردن قطبش	۷۷
۴-۶ نظریه گلدستن (Goldstone)	۷۸
شکلهای فصل چهارم	۸۳
فصل پنجم: تقریب Hartree-Fock و مبحث گاز فرمی غیر ایده‌آل	۸۶

صفحه

عنوان

۸۷
۹۴ ۵-۱ تقریب Hartree - Fock
۹۸ ۵-۲ گاز فرمی غیرایده‌آل
۱۰۷ ۵-۳ شکلهای نردبانی و معادلهٔ Bethe - Salpeter
۱۱۸ ۵-۴ معادلات انتگرالی Galitskii
۱۲۰ ۵-۵ کمیتهای فیزیکی
۱۲۲ ۵-۶ توجیه جملات نگهداشته شده
۱۲۴ شکلهای فصل پنجم
۱۲۵ **فصل ششم: گاز الکترونی تبهگن**
۱۲۸ ۶-۱ مفاهیم اولیه در گاز الکترونی تبگهن
۱۴۱ ۶-۲ شکلهای حلقوی
۱۴۲ شکلهای فصل ششم
۱۴۳ **فصل هفتم: سیستم بوزونی**
۱۴۷ ۷-۱ فرمول‌نویسی مسئله
۱۵۳ ۷-۲ توابع گرین
۱۵۵ ۷-۳ نظریه اختلال و قوانین فاینمن
۱۵۶ ۷-۴ قوانین فاینمن در فضای مختصات
۱۵۹ ۷-۵ قوانین فاینمن در فضای اندازه حرکت
۱۶۳ ۷-۶ معادلات دایسون
۱۶۴ ۷-۷ نمایش Lehmann
۱۶۵ شکلهای فصل هفتم
فصل هشتم: مثالهای کاربردی از مسئله بس ذره‌ای
۱۶۶ ۸-۱ بررسی بر هم کنش الکترونها و محاسبهٔ انرژی حالت پایه تا مرتبه سوم
۱۷۶ اختلال در گاز الکترونی تبهگن
۱۸۲ ۸-۲ حالتهای بس ذره‌ای و جبر عملگری برای آمار کسری
۱۸۳ شکلهای فصل هشتم
فهرست مراجع مربوط به‌این پایان‌نامه

پیشگفتار

دنیای اطراف ما شامل سیستم هـای بـس ذره ای برهـم کنشـی اسـت . هـدف فیزیک نظری اتمی ، مولکولی ، ماده چگـال و فـیزیک هسـته ای توصیـف پدیـده هـای چنین سیستم هایی است . نظریه سیستم هـای بـس ذره ای مجموعـه ای از تمـام ایـن دیدگاهها را دربردارد اما در روش ها و قواعد کاربردی با آنها تفاوت دارد [۱] .

موضوع اساسی در بحث این سیستم ها،موضوع برهـم کنـش اسـت کـه از قـراردادن پتانسیل های برهم کنشی ذرات در معادله شرودینگر بـس ذره ای ناشـی مـی شـود . تابع موج مربوط به این سیستم ها تمام اطلاعات لازم را دربردارد . امـا چـون جـواب دقیق و تحلیلی معادله را نمـی تـوان بدسـت آورد بـاید از روشـهای تقریبـی اسـتفاده کرد [۲] .

مهمترین فرض نظریه بس ذره ای براین پنـدار اسـتوار اسـت کـه ایـن سیسـتم برهـم کنشی می تواند بعنوان سیسـتمی از ذرات خیـالی ، شـبه ذرات و تحریکـات جمعـی ، معرفی گردد که غیر برهم کنشی هستند یا برهم کنش های ضعیفی باهم دارند . بـرای نشان دادن این ایده به روش ریاضی به یک ساختار پیچیده نیازمندیم [۳] .

این ساختار پیچیده شامل روشـهای کـاربردی و مفیـدی چـون کوانتش دوم ، نظریـه میدانهای کوانتومی و توابع گرین[1] برای محاسبه خواص این سیسـتم هـا ، مـی باشـد . این روشها زمینه های مناسب برای فرمول بندی و فهم خیلی از پدیده های فیزیکی که توسط آزمایش تجربه می شوند ، را مهیا می کنند . یکی از زمینه های پیشرفت مسئله بس ذره ای نظریه میدانهای کوانتومی است .

حدود سالهای ۱۹۶۵ تا ۱۹۵۷ در یک سـری از مقـالات نشـان داده شـد کـه روشـهای نظریـه میدانهـای کوانتومـی ، کـه قبـلاً در حـل ابتدایـی مسـئله فـیزیک ذرات بنیـادی موفقیتی بزرگ ایجاد کرده بود ، روشی قوی و اساسی در رویارویی بـا مسـئله بـس ذره ای است . این روش خیلی از ابهامات موجود را برطرف نمود و پیشـرفتی سـریع در حل مسائل مربوط بـه هسـته ، الکترونهـا در فلزات ، فـرو مغنـاطیس هـا ، اتمهـا ،

1.Green Fuctions

ابررساناها ، انواع پلاسما ، مولکولها و غیره را بوجود آورد . از آن موقع تابه حال بیشتر تحقیقات اساسی مربوط به طبیعت ماده برروی روشهای نظریه میدانهای کوانتومی استوار بوده است . این روش تصویر جدیدی از ذرات خیالی غیر برهم کنشی یا ذرات با برهم کنش ضعیف را ارائه می کند و نتایج جدیدی برای کمیتهای فیزیکی ای که قبلاً محاسبه شده بودند و حالا بااین روش در توافق هستند ، را مهیا می کند ، چون انرژی بستگی در ماده هسته ای ، ترازهای انرژی اتمهای سبک ، انرژی فرمی ، جرم مؤثر الکترونها در فلزات و نفوذ پذیری مغناطیسی آنها و .... کوانتش دوم باعث ساده سازی مسئله و بازسازی معادله شرودینگر برحسب عملگرهای مرتبط باحالت آماری بوزنها و فرمیونها دراین کوانتش می شود که این عملگرها در واقع توابع موج ما هستند که با توابع موج معمولی تک ذره ای فرق دارند . در واقع این روشها ما را از کارکردن با توابع موج بس ذره ای راحت می کنند و ما با چند عنصر ماتریسی در مسئله سروکار داریم .

توابع گرین یا انتشارگرها اطلاعات جانبی در مورد خواص این ذرات خیالی را ارائه می کنند ، مانند جرم مؤثر ، طول عمرآنها ، انرژی حالت پایه ، توابع ترمودینامیکی ، انرژی و طول عمر ترازهای برانگیخته ، پاسخهای خطی در اختلال خارجی و ....

چون دراغلب موارد محاسبه آنها بسیار پیچیده است ، با استفاده از روشهای موجود درنظریه میدانهای کوانتومی مثل نمودارهای فاینمن [۲] به بررسی مسئله می پردازند ، که تا هرمرتبه دلخواهی از اختلال می توان آن را حل کرد . می توان از دسته معادلات انتگرالی دایسون که منجر به اختلال فاینمن ـ دایسون [۳] می گردد ، تا هرمرتبه ای از اختلال که مستقل از سری های اختلالی است ، استفاده کرد .

کار اصلی دراین پایان نامه ، بازبینی بخشی از کتاب نظریه کوانتومی سیستمهای بس ذره ای ، [۲] ، و کار جنبی ، بازبینی بخشهایی از دو مقاله ، [۱۲] و [۱۴] ، درهمین زمینه می باشد .

---

2. Feynman Diagrams 3. Feynman-Dyson

فصل اول

کوانتش دوم

۱-۱ معادله شرودینگر در کوانتش دوم

کوانتش اول درفیزیک اشاره بـه خـاصیتی از ذرات دارد کـه بخـاطر کـامیوت نکـردن عملگرهایی،بوجود می آیند .

$$[x, P_x] = i\hbar \qquad E \to i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \qquad (۱-۱-۱)$$

در واقع عمل کوانتش دوم بدین معنا است که درفضایی موسوم بـه مینکوفسـکی ،x^μ پارامتر فضا محسوب می شود کـه چهـار بـردار اسـت و عملگـر نیسـت و $\pi^\circ_r(x^\mu)$ و $\varphi_r(x^\mu)$ میدانهایی هستند که اطلاعات سیستم در هـر نقطـه فضـا - زمـان را بـه مـا می دهند و هر ذره را به یک میدان نسبت می دهند .

مکانیک کوانتومی $\xrightarrow{\text{کوانتش اول}}$ مکانیک کلاسیک (۱-۱-۲)

x و P عملگرند و ψها که توابع موج ما هستند ، عدد هستند .

نظریه کوانتومی میدانها $\xrightarrow{\text{کوانتش دوم}}$ مکانیک کوانتومی

وقتی در مکانیک کلاسـیک در توجیـه پدیـده هـایی چـون تـابش از جسـم سـیاه ، اثـر فوتوالکتریک و غیره در ماندند ، کوانتش اول و نظریه مکانیک کوانتومی مطرح گردیـد که پاسخهایی قانع کننده بـه بیشـتر آنهـا داد . امـا در توجیـه برخـی پدیـده هـا چـون واکنشهای هسته ای با انرژهـای بـالا و یـا دخـالت اثـرات نسـبیتی ناشـی از ذرات بـا انرژیها وسرعتهای زیاد وغیره درمکانیک کوانتومی ؛ کوانتش دوم و نظریه کوانتومی میدانها ارائه گردید .

در واقع دریافتند که نیروهای بیـن ذرات بوسـیله دیگـر ذرات بوجـود مـی آینـد مثـلاً فوتونها باعث ایجاد نیروهای الکترو مغناطیسی ، پایونها باعث ایجاد نیروهـای هسـته ای و . . . می شوند و تعداد این ذرات هـم کوانتـیزه هسـتند کـه بـاعث دخـالت طبیعـت کوانتومی در نیروهای میـدان کلاسـیک مـی شـود . مثـلاً مدهـای ارتعاشـی در اتمهـا کوانتیزه هستند ، کوانتش اول ، برهم کنش القایی بین الکترونها مثالی از کوانتـش دوم است [۴] . در واقع دراین قسـمت طبق کوانتـش اول مسئله را حـل مـی کنیـم و بعـد هـامیلتونی را بـا دسـته ضرایبـی تعریـف مـی کنیـم کـه فـرم عملگـری خلـق و فنـا را در هامیلتونی وارد می کند که درواقع بـاعث مـی شـود کـه توابـع مـوج مسـتقیماً بـه میدانها تبدیل شوند که همان کوانتش دوم در مسئله را نشان می دهد .

$$H = \sum_{k=1}^{N} T(x_K) + \frac{1}{2} \sum_{k \neq l=1}^{N} V(x_k, x_l) \qquad (۱-۱-۳)$$

این ها میلتونی بس ذره ای ما است.

V انرژی پتانسـیل برهـم کنش بیـن ذرات اسـت . x_K مختصـات ذره Kام (مختصـه فضایی متغییر های گسسته مثل مؤلفه Zام اسپین و . . .) است و V که نشانگر برهـم

-کنش هر دوذره از سیستم بس ذره ای ما است باید ۱ بارشمرده شود که ضریب $\frac{1}{2}$ قبل از بسط پتانسیل قرار می گیرد .

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi \qquad \text{و} \qquad \psi = \psi(x_1,\ldots,x_N,t) \tag{۱-۱-۴}$$

ψ تابع موج بس ذره ای است که دریک دسته از توابع موج تک ذره ای مستقل از زمان با شرایط مرزی معلوم تعریف شده است . مثلاً دریک سیستم هموردا آن را تحت یک دسته موج تخت با شرایط مرزی تناوبی بسط می دهیم ، در سیستم الکترونهای برهم کنشی دریک اتم یک دسته کامل از توابع موج تک ذره ای کولمبی و ذرات متحرک در شبکه بلور توابع موج بلوخ در پتانسیل تناوبی بکار می روند .

$$\psi(x_1,\ldots,x_N,t) = \sum_{E_1'\ldots E_N'} C(E_1'\ldots E_N')\psi_{E_1'}(x_1)\ldots\psi_{E_N'}(x_N) \tag{۱-۱-۵}$$

در روش نمایش تابع موج تک ذره ای $\psi_{E_K}(x_K)$ ، E_K دسته ای کامل ازاعداد کوانتومی تک ذره ای است .

آنها را در معادله شرودینگر قرار می دهیم ودر $\psi^+_{E_1}(x_1)\ldots\psi^+_{E_N}(x_N)$ ضرب می کنیم وخواهیم داشت :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\sum_{E_1'\ldots E_N'} C(E_1'\ldots E_N')\int \underbrace{\psi^+_{E_1'}(x_1)\psi_{E_1}(x_1)dx_1}_{\delta E_1' E_1}\int \underbrace{\psi^+_{E_2'}(x_2)\psi_{E_2}(x_2)dx_2}_{\delta E_2' E_2}\cdots$$

$$= \sum_{E_1'\ldots E_N'} C(E_1'\ldots E_N')\int \psi^+_{E_1'}(x_1)\psi_{E_1}(x_1)\cdots\psi^+_{E_K'}(x_K)H\psi_{E_K}(x_K)\cdots dx_1\ldots dx_N \tag{۱-۱-۶}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C(E_1\ldots E_N,t) = \sum_{E_1'\ldots E_N'} C(E_1'\ldots E_N',t)\int \underbrace{\psi^+_{E_1'}(x_1)\psi_{E_1}(x_1)dx_1}_{\delta E_1' E_1}\cdots$$

$$\int\psi^+_{E_K'}(x_K)T(x_K)\psi_{E_K}(x_K)dx_K\cdots\int\psi^+_{E_N'}(x_N)\psi_{E_N}(x_N) +$$

$$\frac{1}{2}\sum_{K\neq\ell=1}^{N}\sum_{E_1'\ldots E_N'} C(E_1'\ldots E_N')\int\psi^+_{E_1'}(x_1)\psi_{E_1}(x_1)\psi^+_{E_2'}(x_2)\psi_{E_2}(x_2)dx_1dx_2\cdots$$

$$\int\int\psi^+_{E_K'}(x_K)\psi^+_{E_\ell'}(x_\ell)V(x_K,x_\ell)\psi_{E_K}(x_K)\psi_{E_\ell}(x_\ell)dx_k dx_\ell \tag{۱-۱-۷}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C(E_1\ldots E_N,t) = \sum_{K=1}^{N}\sum_{E_K'} C(E_1\ldots E_{K-1}E_K'E_{K+1}\ldots E_N,t)\int\psi^+_{E_K'}(x_K)T(x_K)\psi_{E_K}(x_K)dx_K$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{K\neq\ell=1}^{N}\sum\sum C(E_1\ldots E_{K-1}E_K'E_{K+1}\ldots E_{\ell-1}E_\ell'E_{\ell+1}\ldots E_N,t)\int\int\psi^+_{E_K'}(x_K)\psi^+_{E_\ell'}(x_\ell)V(x_K,x_\ell)\psi_{E_K}(x_K)\psi_{E_\ell}(x_\ell)dx_k dx_\ell$$

$$E_K' \to \omega$$
$$E_\ell' \to \omega' \tag{۱-۱-۸}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}C(E_1\dots E_N,t)=\sum_{K=\omega}^{N}\sum C(E_1\dots E_{K-1}\omega\ E_{K+1}\dots E_N,t)\int\psi^{*}_{E_K(X_K)}T_{(X_K)}\psi_{\omega(X_K)}dX_K+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{K\neq\ell=\omega\omega'}^{N}\sum\sum C(E_1\dots E_{K-1}\omega\ E_{K+1}\dots E_{\ell-1}\omega'\ E_{\ell+1}\dots E_N,t)\iint\psi^{*}_{E_K(X_K)}\psi^{*}_{E_\ell(X_\ell)}V_{(X_K-X_\ell)}\psi_{\omega(X_K)}\psi_{\omega'(X_\ell)}dX_K dX_\ell \quad (۹-۱-۱)$$

همانطور که می بینیم انرژی جنبشی عملگری تک ذره ای است که با مختصات ذرات بطور همزمان ارتباط دارد و با متغیر توابع موج تک ذره ای تغییر می کند. ω و ω' اندیسهای متغیرند که روی دسته ای از اعداد کوانتومی تغییر می کنند و انرژی پتانسیل با مختصات دوتادوتای ذرات سروکار دارد که می تواند حداکثر توابع موج دو ذره K و ℓ را تغییر دهد. اعداد کوانتومی ذره Kام روی دسته ای بی نهایت ازمقادیرتغییر می کند که با ω نشان می دهیم و ذره ℓام مرتبط با ω' است.

می دانیم که تابع موج بس ذره ای دارای خاصیت زیر است.

$$\psi(\dots x_i\dots x_j\dots,t)=\pm\psi(\dots x_j\dots x_i\dots,t) \quad (۱۰-۱-۱)$$

این رابطه نشان می دهد که تابع موج باید تحت جابجایی هر دو مختصه دو ذره متقارن یا پاد متقارن باشد.

$$\sum_{E'_1-E'_N}C(E'_1\dots E'_i\dots E'_j\dots E'_N)\psi_{E'_1(X_N)}\cdots\psi_{E'_N(X_N)}=\pm\sum_{E'_1-E'_N}C(E'_1\dots E'_j\dots E'_i\dots E'_N,t)$$

$$\psi_{E'_1(X_1)}\cdots\psi_{E'_N(X_N)} \quad (۱۱-۱-۱)$$

$$\sum_{E'_1-E'_N}\delta_{E_1E'_1}\dots C(E'_1\dots E'_i\dots E'_j\dots E'_N,t)=\pm\sum_{E'_1-E'_N}C(E'_1\dots E'_j\dots E'_i\dots E'_N,t)\delta_{E_1E'_1}\dots \quad (۱۲-۱-۱)$$

$$C(E_1\dots E_i\dots E_j\dots E_N,t)=\pm C(E_1\dots E_j\dots E_i\dots E_N,t) \quad (۱۳-۱-۱)$$

۱-۲ بوزونها

اگر حالت ۱، n_1بار اتفاق افتد، حالت ۲، n_2بار و ... می توان ضرایب C تابع موج را دسته بندی کرد:

$$C(1\,2\,1\,2\,2\,2\dots,t)=C(\underbrace{1\,1\dots1}_{n_1}\underbrace{2\,2\,2\dots2}_{n_2}\dots t)=\bar{C}(n_1n_2\dots n_\infty,t) \quad (۱-۲-۱)$$

چون شرط نرمالیزه کردن را بکار ببریم داریم: $\int|\psi|^2d\tau=1$

$$\sum_{E_1-E_N}|C(E_1\dots E_N,t)|^2=\sum_{n_1-n_\infty}|\bar{C}(n_1\dots n_\infty,t)|^2\sum_{\substack{E_1-E_N\\(n_1-n_N)}}1=1 \quad (۲-۲-۱)$$

ضرایب برای آنکه تعداد یکسانی از ذرات را در حالتهای یکسان داشته باشند، باید یکسان باشند و تعداد راههایی که N ذره را بتوان در n_1 تا n_∞ جاداد، $\frac{N!}{n_1!\dots n_\infty!}$ می باشد.

$$\sum_{i=1}^{\infty} n_i = N \qquad (۴-۲-۱)$$

دامنه احتمال آنکه n_1 ذره در E_1 و ... قرار گیرند :

$$f(n_1 n_2 \ldots n_\infty, t) \equiv \left(\frac{N!}{n_1! \ldots n_\infty!}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{C}(n_1 n_2 \ldots, n_\infty, t) \qquad (۵-۲-۱)$$

رابطه نرمالیزاسیون برای دسته ضرایب

$$\sum_{n_1 \ldots n_\infty} |f(n_1 \ldots n_\infty, t)|^2 = 1$$

$$\Psi(x_1 \ldots x_N, t) = \sum_{E_1 \ldots E_N} C(E_1 \ldots E_N, t) \Psi_{E_1}(x_1) \ldots \Psi_{E_N}(x_N) = \sum_{n_1 \ldots n_\infty} \sum_{E_1 \ldots E_N} \bar{C}(n_1 \ldots n_\infty, t) \Psi_{E_1}(x_1) \ldots \Psi_{E_N}(x_N) \qquad (۶-۲-۱)$$

$$= \sum_{n_1 \ldots n_\infty} f(n_1 \ldots n_\infty, t) \varphi_{n_1 \ldots n_\infty}(x_1 \ldots x_N)$$

$$\varphi_{n_1 \ldots n_\infty}(x_1 \ldots x_N) = \left(\frac{n_1! n_2! \ldots n_\infty!}{N!}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{E_1 \ldots E_N \\ n_1 \ldots n_\infty}} \Psi_{E_1}(x_1) \ldots \Psi_{E_N}(x_N) \qquad (۷-۲-۱)$$

رابطه (۱-۲-۶) نشانگر این است که تابع موج می تواند برحسب پایه متعامد کاملی از توابع موج متقارن $\varphi_{n_1 \ldots n_\infty}(x_1 \ldots x_N)$ نوشته شود .

$$\varphi(x_1 \ldots x_i \ldots x_j \ldots x_N) = \varphi(x_1 \ldots x_j \ldots x_i \ldots x_N) \qquad (۸-۲-۱)$$

مثال تابع موج ۳ بوزون بدون اسپین که دوتا درحالت پایه و یکی در تراز برانگیخته است :

$$\varphi_{n_1 \ldots}(x_1 x_2 x_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi_{(1)} \Psi_{(2)} \Psi_{(3)} + \Psi_{(1)} \Psi_{(2)} \Psi_{(3)} + \Psi_{(1)} \Psi_{(2)} \Psi_{(3)}) \qquad (۹-۲-۱)$$

تعداد ترازها مستقل از تعداد ذراتند .

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\omega} \langle E_k | T | \omega \rangle C_{(E_1 \ldots E_{k-1} \omega\ E_{k+1} \ldots E_N)} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\omega} \langle E_k | T | \omega \rangle \bar{C}_{(n_1\ n_2 \ldots n_{E_k - 1} n_\omega + 1 n_{\infty})}$$

$$= \sum_{E} \sum_{\omega} \langle E | T | \omega \rangle n_E \bar{C}_{(n_1 \ldots n_E - 1 \ldots n_\omega + 1 \ldots n_\infty)} \qquad (۱۰-۲-۱)$$

وقتی ماطرف چپ این معادله را از نماد E_k به n_{E_k} تغییر می دهیم باید دقت کنیم که چون ω ، مکان E_k را اشغال کرده است در نمادنویسی برحسب n باید یکی از n_{E_k} کم کنیم و یکی به n_ω اضافه کنیم . حالا می خواهیم یک ساده سازی دیگر را انجام دهیم . چون در سیستم بس ذره ای خیلی از ذرات انرژی های معادل دارند پس در مورد جمع روی k هر موقع که E_k مقدار مشخص E را اختیار کند آن حالت را می شماریم و درمی یابیم که مثلاً n_E بار E_k مقدار E را اختیار کرده است پس به جای این کار طاقت فرسای جمع بندی روی اندیسها ، روی حالتها جمع می بندیم که در اینصورت یک $\langle E | T | \omega \rangle$ را نگه می داریم و آن را در تعداد دفعاتی که E_k معادل E شده یعنی n_E ضرب می کنیم . این کار باعث صرفه جویی در وقت و انرژی ما خواهد شد.بنابراین نتیجه نهایی در سمت راست بدست می آید :

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{\omega} \langle E_k | T | \omega \rangle C_{(E_1 \ldots E_{k-1} \omega\ E_{k+1} \ldots E_N)} = \sum_{i,j} \sum n_i \langle i | T | j \rangle \bar{C}_{(n_1 n_2 \ldots n_i - 1 \ldots n_j + 1 \ldots n_\infty)}$$

راست $\times \sum_{k=1}^{N}\sum_{\omega} < E_k|T|\omega > C_{(E_1..E_{k-1}\ \omega\ E_{k+1}..E_N,t)} = \sum_{i,j} n_i < i|T|j > \overline{C}_{(n_1..n_i-1..n_j+1..n_\infty,t)}$

(۱۱-۲-۱)

$$\sum_{E,E',\omega,\omega'} < E_k E_\ell |V|\omega\omega' > C_{(E_1..E_{k-1}\ \omega\ E_{k+1}..E_{\ell-1}\ \omega' E_{\ell+1}..E_N,t)} = \sum_{E,E',\omega,\omega'} \frac{n_E}{2}(n_{E'} - \delta_{EE'}) < EE'|V|\omega\omega' >$$

$$\overline{C}_{(n_1..n_E-1..n_\omega+1..n_{E'}-1..n_{\omega'}+1..n_\infty,t)} = \sum_{ijk\ell} \frac{n_i}{2}(n_j - \delta_{ij}) < ij|V|k\ell >$$

$$\overline{C}_{(n_1..n_i-1..n_k+1..n_j-1..n_\ell+1..n_\infty,t)} \qquad (۱۲-۲-۱)$$

خط اول ، طرف راست این معادله مشابه معادلـه (۱-۲-۱۰) اسـت بـا ایـن تفـاوت کـه چون اینجا دو جمع بندی روی E و E' داریم هر موقـع $E = E'$ باشـد مقدار ویژه E در جمع دوم ($E' = E$) یک بار کمتر شمرده می شود .

با جایگذاری (۱-۲-۵)در نتیجه (۱-۱-۹) از طریق (۱-۲-۱۱) و (۱-۲-۱۲) داریم :

$$ih(\frac{n_1!\,n_2!\ldots n_\infty!}{N!})\frac{\partial}{\partial t} f(n_1\ldots n_\infty,t) = \sum_i < i|T|i > n_i(\frac{n_1!\,n_2!\,n_i!\ldots n_\infty!}{N!}) +$$

$$\sum_{i\neq j} < i|T|j > n_i(\frac{\ldots(n_i-1)!\ldots(n_j+1)!\ldots}{N!})^{\frac{1}{2}} f(\ldots n_i-1\ldots n_j+1\ldots n_\infty,t)$$

$$+ \sum_{i\neq j\neq k\neq \ell} < ij|V|k\ell > \frac{n_i n_j}{2}(\frac{\ldots(n_i-1)!\ldots(n_j-1)!\ldots(n_k+1)!\ldots(n_\ell+1)!\ldots}{N!})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(n_1\ldots n_i-1\ldots n_j-1\ldots n_k+1\ldots n_\ell+1,\ldots,n_\infty,t) +$$

$$+ \sum_{i=j\neq k\neq \ell} < ij|V|k\ell > \frac{n_i(n_i-1)}{2}(\frac{\ldots(n_i-2)!\ldots(n_k+1)!\ldots(n_\ell+1)!\ldots}{N!})^{\frac{1}{2}}$$

$$f(\ldots n_i-2\ldots n_k+1\ldots n_\ell+1,\ldots,n_\infty,t) + ect$$

(۱۳-۲-۱)

طرفین را در عامل $(\frac{N!}{n_1!\ldots n_\infty!})^{\frac{1}{2}}$ ضرب مـی کنیـم کـه درآخـر منجـر بـه یـک دسـته معادله کوپل شده می شود :

$$ih\frac{\partial}{\partial t} f(n_1\ldots n_\infty,t) = \sum_i < i|T|i > n_i + \sum_{i\neq j} < i|T|j > n_i(\frac{n_j+1}{n_i})^{\frac{1}{2}} f(n_1\ldots n_i-1\ldots n_j+1\ldots n_\infty,t)$$

$$+ \sum_{i\neq j\neq k\neq \ell} < ij|V|k\ell > \frac{1}{2}(n_i)^{\frac{1}{2}}(n_j)^{\frac{1}{2}}(n_k+1)^{\frac{1}{2}}(n_\ell+1)^{\frac{1}{2}} f(n_1\ldots n_i-1\ldots n_j-1\ldots n_k+1\ldots n_\ell+1\ldots n_\infty,t)$$

$$\sum_{i=j\neq k\neq \ell} < ii|V|k\ell > \frac{1}{2}(n_i)^{\frac{1}{2}}(n_i-1)^{\frac{1}{2}}(n_k+1)^{\frac{1}{2}}(n_\ell+1)^{\frac{1}{2}} f(n_1\ldots n_i-2\ldots n_k+1\ldots n_\ell+1\ldots n_\infty,t)+\ldots$$

(۱۴-۲-۱)

که معادلـه ای بـرای هردسـته از مقـادیر اعـداد اشـغال $n_1\ldots n_\infty$ وجـود دارد بدیـن صورت که معادلات بسیار پیچیـده انـد و مـی تـوان ایـن معـادلات را بصـورت خیلـی متمرکز و دقیق درآورد .