دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی


**پایاننامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشتهی**

**ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی**

**عنوان**

# روشهای تکراری $AOR$ برای مسائل کمترین مربعات با رتبه ناقص


**استاد راهنما**

**دکتر قدرت عبادی**

**استاد مشاور**

**دکتر غلام رضا حجتی**

**پژوهشگر**

**فاطمه مینایی بیرامی**


**۱۳۹۲**

بسم الله الرّحمن الرّحیم

خدایا... پروردگارا... کمکم کن، کمکم کن که بتوانم پنجره ی دلم را رو به حقیقت بگشایم...

خدایا... یاریم کن که مرغ خسته دلم را که دیری است در این قفس زندانی است، در آسمان آبی عشق تو پرواز دهم...

خدایا. پروردگارا... یاریم کن که شوق پرواز را همیشه در خود زنده نگهدارم.....

خدایا... تو خود می دانی که بدترین درد برای یک انسان دور ماندن از حقیقت خویشتن و رها شدن در گرداب فراموشی و سردرگمی است... پس تو ای کردگار بی همتا مرا یاری کن که به حقیقت انسان بودن پی ببرم تا بتوانم روز به روز به تو که سرچشمه تمام حقیقت هایی نزدیک و نزدیکتر شوم....

خدایا... همیشه گفته ام که تو را دوست دارم... حالا هم با تمام وجود فریاد می زنم:

خدایا........ دوستت دارم..... دوستت دارم... دوستت دارم...

فاطمه مینایی بیرامی

تقدیم به:

روح پاک پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم.....

تقدیم به:

مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر...

تقدیم به:

تمامی کسانی که دوستشان دارم.

بنام خدا

و لَمْ يَشْكُر الْمَخلوق لَمْ يَشْكُر الْخالِقْ.

راز و رمز پویای علم و کشف معانی بدیع و تجلی جلوه های شهودی معرفت کیمیایی است که آسمان علم به برکت سیما و سیره ی نورانی نبی مکرم صلی الله علیه و آله و سلم، انسان دربند خاک را به معراج حضور می خواند . و چه خرم علمی که از چشمه ی معارف سیراب شود و چه زیبا دانشی که قبای پرنیانش به عطر و بوی گلستان محمدی معطر شود و چه معماری باشکوهی، بنایی که سنگ هویت و فرهنگ آن ریشه درمدینه النبی بیابد. و امروز کاخ آباد علم به سروش معنوی و مفهوم پیام او بیش از پیش محتاج راهنمایانی است که علاوه بر حفظ آبادانی آن در راه اعتلای آن به فرزندان خویش محبت نمایند.

جناب آقای دکتر قدرت عبادی استاد راهنمای بزرگوارم:

شما روشنایی بخش تاريكي جان هستید و ظلمت اندیشه را نور مي بخشيد. چگونه سپاس گویم مهربانی و لطف شما را که سرشار از عشق و یقین است. چگونه سپاس گویم تأثير علم آموزي شما را که چراغ روشن هدایت را بر كلبه ي محقر وجودم فروزان ساخته است. آري در مقابل اين همه عظمت و شکوه شما مرا نه توان سپاس است و نه کلام وصف.

جناب آقای دکتر غلام رضا حجتی استاد مشاور گرانقدرم:

از این‌که زحمات مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل فرمودید و در آماده‌سازی این پایان‌نامه به نحو احسن، اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادید، کمال امتنان را دارم.

در پایان از تمامی اعضای خانواده‌ام که در راه کسب علم و دانش همواره مشوق و حامی من بودند و با قبول تمام مشکلات بر خود، راه تحصیل مرا هموار نمودند سپاسگزاری می‌نمایم.

شکر خدا که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

فاطمه ینایی بیرامی

۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: مینایی بیرامی نام: فاطمه

عنوان: روشهای تکراری $AOR$ برای مسائل کمترین مربعات با رتبه ناقص

استاد راهنما : دکتر قدرت عبادی

استاد مشاور : دکتر غلام رضا حجتی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۱۰۰

کلید واژه‌ها: مسائل کمترین مربعات، رتبه‌ی ناقص، روش تکراری $AOR$ ،روش تکراری $JOR$، شبه همگرایی، پارامترهای بهینه،عامل همگرایی بهینه

## چکیده

در این پایان‌نامه، به بررسی شبه همگرایی روش تکراری $AOR$ برای مسائل کمترین مربعات با می‌نیمم نرم از رتبه ناقص در سیستم‌های خطی پرداخته می‌شود. همچنین شرایط لازم و کافی برای شبه همگرایی روش‌های $AOR$ و $JOR$ ارائه می‌شود. پارامتر های بهینه و عامل همگرایی متناظر را بدست آورده می‌شود.

# مقدمه

مسائل کمترین مربعات، مسائل محاسباتی با اهمیت بالایی هستند که در سال‌های اخیر مورد توجه زیادی قرار گرفته‌اند. این‌گونه مسائل، در بخش‌های تحقیقی و عملی همانند آمار، اقتصاد، ژنتیک، معادلات دیفرانسیل، مطالعات زلزله شناسی، ساختمان‌های مولکولی، توموگرافی و پردازش تصویر مورد استفاده قرار می‌گیرند. بررسی‌های زیادی راجع به روش‌هایی که مسائل کمترین مربعات را حل می‌کنند، صورت گرفته‌اند. این پایان نامه، مسائل کمترین مربعات با رتبه‌ی ناقص را مورد بررسی قرار می‌دهد که قبلا توسط روش‌هایی از قبیل $SOR$ و روش تجزیه‌ی مقدار تکین($SVD$) مورد بررسی قرار گرفته‌اند و اینک با روش تکرار $AOR$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.
روش $AOR$ [۱] در سال ۱۹۷۸ اولین بار توسط حاجی‌دیموس [۲] مورد استفاده قرار گرفت. این روش تعمیمی از روش فوق تخفیف متوالی [۳] (۱۹۵۰) می‌باشد.
برای بدست آوردن حل عددی سیستم خطی $Ax = b$ به طوری که $A_{m\times n}$ یک ماتریس به صورت $m \geq n$ ، $rank(A) = k < n$ و $b$ یک بردار $m$ مولفه‌ای می‌باشد. میلر و نیومن ابتدا برای حل مساله روش $SOR$ ، ۴ - بلوکی را ارائه دادند. آنان در مقاله خودشان بازه شبه همگرایی روش $SOR$ و پارامتر تخفیف بهینه‌ای که با نرم می‌نیمم مقادیر ویژه ماتریس تکراری روش $SOR$ بدست می‌آید را بررسی کردند. همچنین آنها برای بدست آوردن جواب‌های دستگاه، سیستم مساله اولیه را به سیستم افزوده تبدیل کردند و جواب‌های این سیستم را بدست آوردند .

بعدها، تیان نتایج مقاله میلر و نیومن را به روش تکراری $AOR$ توسعه داد، که در نتایج شبه همگرایی مقاله تیان بی‌دقتی‌های وجود داشت.

در فصل اول پایان‌نامه به ارائه‌ی تعاریف و مفاهیم اولیه و قضیه‌های مقدماتی پرداخت شده که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است. در فصل دوم، دستگاه‌های خطی را بررسی کرده و روش‌های مستقیم

---

[۱] Accereleted Overrelaxation

[۲] Hadjidiamos

[۳] Successive Overrelaxation

و تکراری برای حل آن‌ها ارائه می‌شود. در فصل سوم، مسائل کمترین مربعات معرفی می‌شوند. در فصل چهارم، با استفاده از روش $AOR$، مسائل کمترین مربعات با رتبه‌ی ناقص حل شده است. در فصل پنجم، با استفاده از مثالهای عددی مطالب و قضیه‌های احکام فصل قبل تایید می‌شود .
این پایان‌نامه بر اساس مقاله [۱۴] تهیه شده است.

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به تعاریف و قضیه‌های که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است پرداخته می‌شود.

**تعریف ۱.۰.۱.** گردایه‌ای از $n$ بردار در $\mathbb{R}^n$ و مرتب شده در یک آرایه‌ی مستطیلی $m$ سطری و $n$ ستونی یک **ماتریس** نامیده می‌شود. بنابراین یک ماتریس $A$ به شکل

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

می‌باشد که این ماتریس را با $A = (a_{ij})_{m\times n}$ ، یا به طور ساده با $A = (a_{ij})$ نمایش داده می‌شود. در این‌صورت ماتریس $A$ از مرتبه‌ی $m \times n$ می‌باشد.

**تعریف ۲.۰.۱.** **ترانهاده**ی یک ماتریس $A$ از مرتبه‌ی $m \times n$ با $A^T$ نشان داده می‌شود و آن، ماتریسی از مرتبه‌ی $n \times m$ است که با تعویض سطرها و ستون‌های ماتریس $A$ به‌دست می‌آید.

$$A^T = (a_{ji}) \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

**تعریف ۳.۰.۱.** ماتریس $A$ **متقارن** نامیده می‌شود اگر $A^T = A$.

**گزاره ۴.۰.۱.** *همواره برای دو ماتریس* $A$ ،$m \times n$ *و* $B$ ،$n \times p$ :

$$(AB)^T = B^T A^T$$

**تعریف ۵.۰.۱.** اگر بتوان ماتریس $A$ را به صورت

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

افراز کرد، در این‌صورت گویند $A$ یک ماتریس بلوکی است.

**تعریف ۶.۰.۱.** ماتریس $n \times n$، $A$ را ماتریس **قطری بلوکی** گویند هرگاه هر عنصر قطری آن، یک ماتریس مربعی باشد و سایر عناصر آن همگی برابر با صفر باشند و به صورت

$$A = diag(A_{11}, \dots, A_{kk})$$

نشان داده می‌شود که در آن $A_{ii}$ها ماتریس‌های مربعی هستند.

**تعریف ۷.۰.۱.** ماتریس $A$ را ماتریس **تنک** گویند هرگاه بیشتر درایه‌هایش صفر باشد.

**تعریف ۸.۰.۱.** گویند ماتریس $A$ از مرتبه‌ی $n \times n$ معکوس‌پذیر است اگر یک ماتریس $B$ از مرتبه‌ی $n \times n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$AB = BA = I$$

و آن را با $A^{-1}$ نشان می‌دهند.

**تعریف ۹.۰.۱.** ماتریس $A$ را **ناتکین** گویند هرگاه وارون‌پذیر باشد.

**تعریف ۱۰.۰.۱.** برای هر ماتریس $A$ از مرتبه‌ی $m \times n$ دو زیرفضای وابسته‌ی مهم وجود دارد: **برد** $A$ که با $R(A)$ و **فضای پوچ** $A$ که با $N(A)$ نشان داده می‌شوند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R(A) = \{b \in \mathbb{R}^m | b = AX, \quad X \in \mathbb{R}^n\}$$

$$N(A) = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = 0\}$$

**تعریف ۱۱.۰.۱.** فرض کنید $S$ زیرفضایی از $\mathbb{R}^m$ باشد. آن‌گاه زیر فضای $S^\perp$ که به صورت

$$S^\perp = \{Y \in \mathbb{R}^m | Y^T X = 0, \quad \forall X \in S\}$$

تعریف می‌شود، متمم متعامد $S$ نامیده می‌شود.

**قضیه ۱۲.۰.۱.** *برای ماتریس* $m \times n$، $A$

*داریم:*

$$N(A) = R(A^T)^\perp, \qquad R(A)^\perp = N(A^T)$$

**برهان.** رجوع شود به [۳] □

**تعریف ۱.۰.۱۳.** فرض کنید $A$ ماتریسی از مرتبه‌ی $m \times n$ باشد. زیرفضای به‌وجود آمده توسط بردارهای سطری $A$ **فضای سطری** $A$ نامیده می‌شود. زیرفضای به‌وجود آمده ستون‌های $A$ **فضای ستونی** $A$ نامیده می‌شود.

**تعریف ۱.۰.۱۴.** **رتبه‌ی** ماتریس $A$ بعد فضای ستونی $A$ می‌باشد و با $rank(A)$ نشان داده می‌شود.

**تعریف ۱.۰.۱۵.** ماتریس مربعی $n \times n$، $A$ را **نامنفرد** گویند اگر $rank(A) = n$ باشد. در غیر این‌صورت ماتریس $A$ را **منفرد** گویند.

**تعریف ۱.۰.۱۶.** گویند ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ با $m \geq n$ دارای **رتبه‌ی کامل** است اگر $rank(A) = n$. در غیر این‌صورت گویند ماتریس $A$ دارای **رتبه‌ی ناقص** است.

**تعریف ۱.۰.۱۷.** ماتریس $A = (a_{ij})$ از مرتبه‌ی $m \times n$ را **قطری** گوییم هرگاه $a_{ij} = 0$ به ازای $i \neq j$ و با $A = diag(a_{11}, \ldots, a_{ss})$ نشان داده می‌شود که در آن $s = \min(m, n)$.

**تعریف ۱.۰.۱۸.** ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را یک ماتریس **بالامثلثی** گویند اگربه ازای $i > j$، $a_{ij} = 0$. ترانهاده‌ی ماتریس بالامثلثی، **پایین‌مثلثی** است، یعنی به ازای $i < j$، $a_{ij} = 0$.

**تعریف ۱.۰.۱۹.** ماتریس غیر مربعی $A_{mn} = (a_{ij})$ را با $m \leq n$یک ماتریس **بالا ذوزنقه‌ای** گویند اگر به ازای $i > j$، $a_{ij} = 0$. ترانهاده‌ی ماتریس بالا ذوزنقه‌ای، **پایین ذوزنقه‌ای** است، یعنی به ازای $i < j$، $a_{ij} = 0$.

**تعریف ۱.۰.۲۰.** ماتریس $n \times n$، $P$ را **جایگشتی** گویند هرگاه در هر سطر و ستون آن فقط یک عنصر ۱ وجود داشته باشد و سایر عناصر آن صفر باشند.

**تعریف ۱.۰.۲۱.** ماتریس مربعی $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را یک ماتریس **بالاهسنبرگی** گویند اگر به ازای $i > j+1$، $a_{ij} = 0$. ترانهاده‌ی ماتریس بالاهسنبرگی، **پایین‌هسنبرگی** است، یعنی به ازای $j > i+1$، $a_{ij} = 0$.

**تعریف ۱.۰.۲۲.** ماتریس مربعی را که هم بالاهسنبرگی و هم پایین‌هسنبرگی باشد ماتریس **سه‌قطری** گویند.

**تعریف ۱.۰.۲۳.** ماتریس $A = (a_{ij})$ را **غالب قطری سطری اکید** گویند هرگاه به ازای تمامی مقادیر $i$:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|.$$

مشابها ماتریس $A$ را **غالب قطری ستونی اکید** گویند هرگاه به ازای تمامی مقادیر $j$ :

$$|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

**تعریف ۱.۰.۲۴.** ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را **مثبت معین** گویند هرگاه

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \Rightarrow X^T A X > 0$$

**تعریف ۱.۰.۲۵.** ماتریس متقارن $A_{n\times n}$ را **نیمه مثبت معین** گویند هرگاه

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \Rightarrow X^T A X \geq 0$$

**تعریف ۱.۰.۲۶.** فرض کنید $A$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. گویند $\lambda$ یک مقدار ویژه‌ی $A$ است، اگر یک بردار مخالف صفر $X$ یافت شود به طوری که

$$AX = \lambda X$$

یا

$$(A - \lambda I)X = 0.$$

بردار $X$ را بردار ویژه‌ی $A$ وابسته به مقدار ویژه‌ی $\lambda$ گویند. هم‌چنین $(\lambda, X)$ را یک جفت ویژه‌ی $A$ نامند.

**گزاره ۲۷.۰.۱.** *دستگاه همگن $(A - \lambda I)X = 0$ دارای جواب غیر بدیهی است اگر و فقط اگر*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

**تعریف ۲۸.۰.۱.** چندجمله‌ای $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ را که یک چندجمله‌ای برحسب $\lambda$ و از درجه‌ی $n$ می‌باشد، چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس $A$ گویند. بنابراین $n$ مقدار ویژه‌ی $A$، $n$ ریشه‌ی چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن هستند.

**تعریف ۲۹.۰.۱.** مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A$، طیف $A$ نامیده می‌شود و با $\sigma(A)$ نشان داده می‌شود.

**قضیه ۳۰.۰.۱.** *فرض کنید $\lambda_1$، $\lambda_2$، ...، $\lambda_n$ مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A$ باشند. آن‌گاه مقادیر ویژه‌ی ماتریس $A^m$ عبارتند از $\lambda_1^m$، $\lambda_2^m$، ...، $\lambda_n^m$.*

**برهان.** رجوع شود به [۱۰]. □

**تعریف ۳۱.۰.۱.** فرض کنید $A$ یک ماتریس $m \times n$ با شرط $m \geq n$ باشد. ماتریس $n \times n$، $A^T A$ دارای مقادیر ویژه‌ی $\sigma_i^2,\ i = 1, 2, \ldots, n$ می‌باشد $(\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_n^2)$. مقادیر $\sigma_1$، $\sigma_2$ و ... و $\sigma_n$ را مقادیر منفرد ماتریس $A$ گویند.

**تعریف ۳۲.۰.۱.** فرض کنید

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

برداری در $\mathbb{R}^n$ باشد. آن‌گاه نرم برداری که به صورت $\| X \|$ نشان داده می‌شود، یک تابع پیوسته با مقدار حقیقی بر روی $\mathbb{R}^n$ می‌باشد که دارای خواص زیر است:

$$\| \ . \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

۱. $\| X \| \geq 0$ ، $\| X \| = 0 \Leftrightarrow X = 0$

۲. $\| \alpha X \| = |\alpha| \, \| X \| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

۳. $\| X + Y \| \leq \| X \| + \| Y \| \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^n$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که توابع زیر، نرم‌های برداری هستند.

۱. $\| X \|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$ (نرم مجموع یا نرم یک)

۲. $\| X \|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ (نرم اقلیدسی یا نرم دو)

۳. $\| X \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم)

در حالت کلی، اگر $p$ عدد حقیقی بزرگتر یا مساوی ۱ باشد، $p$-نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| X \|_p = (|x_1|^p + \ldots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}. \qquad (۱.۱)$$

**تعریف ۳۳.۰.۱.** فرض کنید $A$ یک ماتریس $m \times n$ باشد، آن‌گاه مشابه با نرم برداری، یک نرم ماتریسی $A$ با خواص زیر تعریف می‌شود:

$$\| . \| : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^+ \qquad (۲.۱)$$

۱. $\| A \| \geq 0$ ، $\| A \| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

۲. $\| \alpha A \| = |\alpha| \, \| A \| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$

۳. $\| A + B \| \leq \| A \| + \| B \| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{m \times n},$

**تعریف ۳۴.۰.۱.** فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $X \in \mathbb{R}^n$ باشد، نرم القایی ماتریس $A$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\| A \|_p = \max_{X\neq 0} \frac{\| AX \|_p}{\| X \|_p}$$

**تعریف ۳۵.۰.۱.** دو $p$-نرم که از لحاظ محاسبه ساده‌ترین هستند، عبارتند از:

$$\| A \|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \text{(نرم مجموع ستونی ماکزیمم)}$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(نرم مجموع سطری ماکزیمم)}$$

**تعریف ۳۶.۰.۱.** گویند دنباله‌ی $\{V^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ (که $V^{(k)}$ ها بردارند) به بردار $V$ همگراست هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} V_i^{(k)} = V_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

که در آن $V_i$ مؤلفه‌ی $i$ ام بردار $V$ می‌باشد. مشابهاً دنباله‌ی ماتریسی $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$، به ماتریس $A = (a_{ij})$ همگراست هرگاه

$$\lim_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

**قضیه ۳۷.۰.۱.** *دنباله‌ی ماتریسی $\{A^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ همگرا به ماتریس صفر است اگر و تنها اگر به ازای هر مقدار ویژه‌ی $\lambda_i$ از $A$، $|\lambda_i| < 1$.*

**برهان.** [۱۰] برای هر ماتریس $A$ از مرتبه‌ی $n \times n$ یک ماتریس منفرد $T$ وجود دارد به‌قسمی‌که:

$$T^{-1}AT = J = \begin{bmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_r \end{bmatrix} \tag{۳.۱}$$

که در آن $J_i$ به شکل زیر می‌باشد:

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}$$

با محاسبه‌ی ساده :

$$J_i^k = \begin{bmatrix} \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda_i^{k-2} & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda_i^{k-n+1} \\ & \lambda_i^k & k\lambda_i^{k-1} & \dots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & k\lambda_i^{k-1} \\ & & & & \lambda_i^k \end{bmatrix}$$

بنابراین $J_i^k \to 0$ اگر وتنها اگر $|\lambda_i| < 1$. از طرف دیگر با توجه به روابط

$$T^{-1}AT = J \Leftrightarrow A = TJT^{-1} \Leftrightarrow A^2 = TJ^2T^{-1}$$
$$\Leftrightarrow A^k = TJ^kT^{-1}$$

حال اگر $k \to \infty$ :

$$J^k \to 0 \Leftrightarrow A^k \to 0.$$

□

**قضیه ۳۸.۰.۱.** *فرض کنید $A$ یک ماتریس مربعی و $\| \ . \ \|$ نرم القایی باشد. هم‌چنین $\lambda$ یک مقدار ویژه‌ی دلخواه $A$ باشد. آن‌گاه $|\lambda| \leq \| A \|$.*

**برهان.** [۱۰] فرض کنید $\lambda$ مقدار ویژه‌ی دلخواه $A$ و $X$ بردار ویژه‌ی متناظر آن باشد:

$$AX = \lambda X \Rightarrow \| AX \| = \| \lambda X \| = |\lambda| \, \| X \|$$