دانشکده علوم پایه

گروه علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

با روش‌های هموتوپی بهینه، آنالیز هموتوپی

و آشفتگی هموتوپی اصلاح شده

استاد راهنما:

دکتر عبدالله قلی‌زاده

استاد مشاور:

دکتر سیدابوالفضل علوی

نگارنده:

محمدرضا کاظمی تنورجه

شهریور ماه ۹۱

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که همواره در طول زندگی

و تحصیلات مشوق من بوده‌اند

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس بی‌پایان خداوندی را سزد که زبان از بیان شکرش قاصر است و خرد در ژرفای معرفتش از درک او عاجز. او که مهربان است و بنده‌نواز

اکنون که به لطف ایزد منان موفق به انجام دوره‌ی کارشناسی ارشد شده‌ام به خود لازم می‌دانم تا از همکاری و راهنمایی‌های صمیمانه استاد ارجمندم آقای دکتر عبداله قلی‌زاده و همچنین استاد مشاورم آقای دکتر ابوالفضل علوی، که زحمات زیادی در طول مدت تحصیل برایم تحمل نموده‌اند، کمال تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

چکیده

بسیاری از مسائل در علوم و مهندسی به معادلات دیفرانسیل جزئی منجر می‌شوند. ولی در عمل تعداد کمی از این معادلات را می‌توان به روش‌های تحلیلی حل کرد و جواب دقیق آن‌ها را به‌دست آورد. بنابراین از روش‌های عددی برای محاسبه جواب تقریبی آن‌ها استفاده می‌کنیم.

ما در این پایان‌نامه ابتدا به توصیف روش آنالیز هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی می‌پردازیم و همگرایی این روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم و در ادامه روش‌های مجانبی هموتوپی بهینه، آنالیز هموتوپی بهینه یک گامی و روش آشفتگی هموتوپی اصلاح شده را توصیف نموده و با ارائه چندین مثال، به مقایسه این روش‌ها پرداخته و در مورد همگرایی، کارایی و ضعف و مزایای آن‌ها صحبت می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مقدمات

مقدمه

به منظور درک بهتر مطالب در این پایان‌نامه تعاریف و مفاهیمی مورد نیاز است که در این فصل آورده شده‌است.

۱—۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱—۱.۱ (معادله دیفرانسیل جزئی): یک معادله دیفرانسیل جزئی، معادله‌ای است که متشکل از دو یا تعداد بیشتری متغیر مستقل همراه با مشتقات جزئی یک یا تعداد بیشتری متغیر وابسته نسبت به متغیرهای مستقل باشد. معمولاً معادله دیفرانسیل جزئی را با علامت اختصاری PDE نشان می‌دهند. صورت کلی یک معادله دیفرانسیل جزئی برای n متغیر مستقل $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ و متغیر وابسته u عبارت است از

$$F(x_۱, x_۲, \cdots, x_n, u_{x_۱}, \cdots, u_{x_n}, u_{x_۱,x_۱}, u_{x_۱,x_۲}, \cdots) = ۰$$

تعریف ۱—۲.۱ (مرتبه معادله دیفرانسیل جزئی): مرتبه یک معادله دیفرانسیل جزئی برابر است با مرتبه بالاترین مشتق موجود در آن.

تعریف ۱—۳.۱ (معادله خطی و غیرخطی): یک معادله دیفرانسیل جزئی را خطی می‌گوییم اگر متغیر وابسته و مشتقات آن‌ها در معادله دیفرانسیل به‌صورت خطی ظاهر شوند. در غیر این‌صورت آن را غیرخطی می‌گوییم.

تعریف ۱—۴.۱ (قاعده لایب نیتز): قاعده لایب نیتز برای محاسبه مشتق nام حاصل‌ضرب دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ به‌صورت زیر است:

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x),$$

تعریف ۱—۵.۱ (هموتوپی): اگر f و g توابعی پیوسته از X به توی Y باشند و $I=[0,1]$ و تابع $H: X\times I \to Y$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$H(x,0)=f(x),$$

$$H(x,1)=g(x),$$

آن‌گاه f یک هموتوپی به g است. برای مثال می‌توانیم هموتوپی زیر را درنظر بگیریم:

$$H(x,q)=qg(x)+(1-q)f(x), \qquad q\in[0,1]$$

وقتی‌که $q=0$ آن‌گاه $H(x,0)=f(x)$ و هنگامی‌که $q=1$ آن‌گاه $H(x,1)=g(x)$. بنابراین تغییر پارامتر q از ۰ تا ۱ موجب تغییر $H(x,q)$ از $f(x)$ به $g(x)$ خواهد شد.

تعریف ۱—۶.۱ (معادله غیرخطی ساختار سنی جمعیت): معادله غیرخطی ساختار سنی جمعیت به‌صورت زیر معرفی شود:

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial p(x,t)}{\partial x} = -(d_1(x)+d_2(x)p(t))p(x,t), \quad t\geqslant 0 \quad 0\leqslant x< A$$

$$p(x,0) = p_0(x), \qquad 0 \leqslant x < A$$

$$p(0,t) = \int_a^A (b_1(\xi) - b_2(\xi)p(t)p(\xi,t)d\xi, \qquad t \geqslant 0$$

$$p(t) = \int_0^A p(x,t)dx, \qquad t \geqslant 0$$

که در آن x و t به‌ترتیب نشان‌دهنده سن و زمان و $p(t)$ نشان‌دهنده‌ی تعداد کل جمعیت و $d_1(x)$ و $d_2(x)$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مرگ طبیعی (بدون رقابت) و افزایش نسبت مرگ (با رقابت در نظر گرفته شده) $b_1(x)$ و $b_2(x)$ و به‌ترتیب نشان‌دهنده نسبت فراوانی طبیعی (بدون رقابت) و کاهش نسبت فراوانی (با رقابت درنظر گرفته شده) و a و A به‌ترتیب کمترین سن و بیشترین سن افراد است.[٦]

تعریف ۱—۷.۱ (فضای خطی نرم‌دار): فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار می‌نامیم اگر برای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی $||x||$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که:

۱) برای هر x و y در X $\qquad ||x+y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

۲) اگر $x \in X$ و α اسکالر باشد آن‌گاه $\qquad ||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$

۳) $||x|| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب کند.

تعریف ۱ــ۸.۱ (فضای باناخ): تعریف فوق نشان می‌دهد که هر فضای خطی نرم‌دار را می‌توان یک فضای متری گرفت. فضای باناخ، یک فضای خطی نرم‌دار است که با متر تعریف شده به‌وسیله آن تام باشد.

تعریف ۱ــ۹.۱ : تابع حقیقی $f(x)$ که $x > 0$ در فضای c_μ که $\mu \in R$ است هرگاه یک عدد حقیقی $p(> \mu)$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$f(x) = x^p f_1(x) \quad ; \quad f_1(x) \in c[0, \infty)$$

واضح است که اگر $\beta \leqslant \mu$ آن‌گاه $c_\mu \subset c_\beta$

تعریف ۱ــ۱۰.۱ : تابع $f(x)$ که $x > 0$ در فضای c_μ^m که $m \in N \cup \{0\}$ است هرگاه $f^{(m)} \in c_\mu$.

۱ــ۲ عملگر ریمان ــ لیوویل

تعریف ۱ــ۱.۲ : عملگر انتگرال کسری ریمان ــ لیوویل [1] از مرتبه $\alpha \geqslant 0$ برای تابع $f \in c_\mu$ که $\mu \geqslant -1$ است به‌صورت زیر تعریف می‌شود.[۱۳, ۲۲]

$$J^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad , \quad \alpha > 0 . x > 0 \qquad J^0 f(x) = f(x)$$

[1] $Rieman - Liouville$

قضیه ۱—۲.۲ : اگر $\alpha,\beta>0$ و $\mu\geqslant -1$; $f\in c_{\mu}$ باشد آن‌گاه

$$J^{\alpha}J^{\beta}f=J^{\beta}J^{\alpha}f=J^{\alpha+\beta}f$$

اثبات: بنابر تعریف داریم

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}J^{\beta}f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}J^{\beta}f(t)dt\\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\int_0^t(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau dt\\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x\int_{\tau}^x(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)dtd\tau\\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(\tau)\int_{\tau}^x(x-t)^{\alpha-1}(t-\tau)^{\beta-1}dtd\tau\end{aligned}$$

با تغییر $t=\tau+s(x-\tau)$ داریم:

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}J^{\beta}f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(\tau)\int_0^1[(x-\tau)(1-s)]^{\alpha-1}[s(x-\tau)]^{\beta-1}(x-\tau)dsd\tau\\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}dsd\tau\end{aligned}$$

از طرفی داریم:

$$\int_0^1(1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

بنابراین با جای‌گذاری داریم:

$$\begin{aligned}(J^{\alpha}J^{\beta}f)(x) &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}\tfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}d\tau\\ &= \tfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^x f(\tau)(x-\tau)^{\alpha+\beta-1}d\tau=J^{\alpha+\beta}f(x)\end{aligned}$$

قضیه ۱—۳.۲ : اگر $\alpha > ۰$ و $x > ۰$ و $\gamma > -۱$ باشد در این‌صورت

$$J^{\alpha}x^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+۱)}{\Gamma(\alpha+\gamma+۱)}x^{\alpha+\gamma}$$

اثبات: با توجه به تعریف (۱—۱.۲) بدیهی است.

۱—۳ عملگر دیفرانسیل کپیوتو

تعریف ۱—۱.۳ : فرض کنید $f \in c^{m}_{-۱}$ به‌طوری‌که $m \in N \cup \{۰\}$ آن‌گاه مشتق کسری کپیوتو[۲] از مرتبه α را با D^{α}_{*} نشان داده و آن‌را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم: [۱۷, ۲۶]

$$D^{\alpha}_{*}f(x) = \begin{cases} [J^{m-\alpha}f^{(m)}(x)], & m-۱ < \alpha < m, m \in N. \\ \frac{d^m}{dx^m}f(x), & \alpha = m \end{cases}$$

در ادامه چند قضیه مهم در مورد روابط بین مشتق کپیوتو و عملگرهای ریمان— لیوویل از مرجع [۲۱] را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه ۱—۲.۳ : اگر f تابعی پیوسته و $\alpha \geqslant ۰$ آن‌گاه

$$D^{\alpha}_{*}J^{\alpha}f = f$$

قضیه ۱—۳.۳ : فرض کنید $m-۱ < \alpha \leqslant m$، $m \in N$ و $x > ۰$ در این‌صورت

$$J^{\alpha}D^{\alpha}_{*}f(x) = f(x) - \sum_{k=۰}^{m-۱} f^{(k)}(۰^{+})\frac{x^k}{k!}.$$

[۲] $Caputo$

۱ــ۴ معادلات دیفرانسیل کسری

معادلات دیفرانسیل کسری در سال‌های اخیر توجه زیادی از ریاضیدان را به خود جلب کرده است.

این معادلات در مدل‌بندی بسیاری از فرآیندهای فیزیکی و مهندسی به‌کار می‌روند. درنتیجه روش‌هایی برای حل این معادلات ارائه شده است از قبیل:

روش تکرار وردشی، روش سری‌ها، روش تبدیل دیفرانسیل، روش تبدیل فوریه و غیره.

در این پایان‌نامه ما برای حل این معادلات از روش‌های آشفتگی هموتوپی و روش اصلاح شده آشفتگی هموتوپی استفاده کرده‌ایم.

بدون کاسته شدن از کلیت مسئله، فرض می‌کنیم مشتقات کسری در نقطه صفر بسط داده شوند

تعریف ۱ــ۴.۱ : فرض کنید $\alpha > ۰$ و $\alpha \notin N$، $n = [\alpha]$ و $f : A \subseteq R^۲ \to R$ در این‌صورت

$$D_*^{\alpha} y(x) = f(x, y(x))$$

معادله دیفرانسیل کسری از مرتبه α نامیده می‌شود و شرایط اولیه برای این معادله دیفرانسیل کسری به‌صورت زیر است:

$$D^k y(۰) = b_k, \qquad k = ۰, ۱, \cdots, n - ۱$$

فصل ۲

روش آنالیز هموتوپی

مقدمه

پرفسور « جان شیء لیائو »[۱] برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ روش آنالیز هموتوپی را به عنوان یک روش تحلیلی کلی برای حل مسائل خطی و غیرخطی معرفی کرد [۱۹, ۲۰, ۲۹]. این روش برمبنای مفهوم هموتوپی در توپولوژی برای حل معادله $f(x) = 0$ است. در این روش جواب معادله به‌صورت یک سری و جملات سری براساس یک رابطه بازگشتی به‌دست می آیند. اما ابتدا به معرفی این روش برای حل معادله جبری غیرخطی $f(x) = 0$ می‌پردازیم سپس چند قضیه را بیان و اثبات می کنیم و درنهایت به‌شرح این روش برای حل معادله دیفرانسیل $N[u] = 0$ می‌پردازیم.

۲–۱ توصیف روش

معادله جبری غیرخطی زیر را درنظر می گیریم.[۲۱]

$$f(x) = 0. \qquad (۱.۲)$$

ابتدا یک هموتوپی روی آن به‌صورت زیر می‌سازیم:

$$H(x,q) = (1-q)[f(x)-f(x_0)]+qf(x), \qquad (۲.۲)$$

که x_0 یک حدس اولیه از x و $q \in [0, 1]$ پارامتر هموتوپی نامیده می‌شود.

واضح است که در $q = 0$ و $q = 1$ به‌ترتیب داریم:

[۱] $S.J.Liao$

$$H(x,0)=f(x)-f(x_0),\qquad H(x,1)=f(x) \qquad (۳.۲)$$

بنابراین زمانی که q از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد $H(x,q)$ از $f(x)-f(x_0)$ به $f(x)$ تغییر می‌کند. این نوع تغییر پیوسته در توپولوژی دگرشکلی نام دارد. اکنون از $H(x,q)=0$ داریم:

$$(1-q)[f(x)-f(x_0)]+qf(x)=0, \qquad (۴.۲)$$

بنابراین یک خانواده از معادلات جبری را داریم به‌وضوح خانواده معادلات فوق وابسته به پارامتر هموتوپی q است لذا خانواده معادلات به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$(1-q)[f(\phi(q))-f(x_0)]+qf(\phi(q))=0. \qquad (۵.۲)$$

در $q=0$ داریم:

$$[f\phi(q)-f(x_0)]|_{q=0}=0,$$

درنتیجه

$$\phi|_{q=0}=\phi(0)=x_0.$$

در $q=1$ خواهیم داشت:

$$f[\phi(q)]|_{q=1}=0,$$

که آن دقیقاً همان معادله جبری $f(x)=0$ است. از این‌رو

$$\phi|_{q=1}=\phi(1)=x.$$

بنابراین همان‌طور که پارامتر تعبیه q از ۰ تا ۱ افزایش می‌یابد $\phi(q)$ از حدس اولیه x_0 تا جواب x از $f(x)=0$ تغییر می‌یابد. خانواده معادلات (۵.۲) را معادلات دگرشکلی مرتبه

صفر می‌نامیم. چون $\phi(q)$ یک تابع از پارامتر هموتوپی q است، ما آن را به‌صورت یک سری مکلورن بسط می‌دهیم:

$$\phi(q) = x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} x_k q^k, \qquad \phi(0) = x_0 \tag{۶.۲}$$

که در آن:

$$x_k = \frac{1}{k!}\frac{\partial^k \phi(q)}{\partial q^k}|_{q=0} = D_k(\phi) \tag{۷.۲}$$

سری (۶.۲) در این‌جا سری هموتوپی و $D_k(\phi)$ مشتق هموتوپی مرتبه kام تابع ϕ نامیده می‌شود. اگر سری هموتوپی (۶.۲) در $q = 1$ همگرا باشد آن‌گاه با استفاده از رابطه $x = \phi(1)$ سری جواب هموتوپی به‌صورت زیر است:

$$x = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k. \tag{۸.۲}$$

برطبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال درباره سری تیلور، ضرایب x_k در سری هموتوپی منحصر به‌فرد است و در نتیجه معادله حاکم بر x_k منحصر به‌فرد است و مستقیما از معادله دگرشکلی مرتبه صفر (۵.۲) نتیجه می‌شود.

با گرفتن مشتق مرتبه اول هموتوپی بر دو طرف معادله دگرشکلی مرتبه صفر (۵.۲) داریم:

$$-f[\phi(q)]+f(x_0)+\phi'(q)f'[\phi(q)](1-q)+f[\phi(q)]+\phi'(q)f'(\phi(q)) = 0,$$

با ساده کردن عبارت فوق داریم:

$$f(x_0) + \phi'(q) f'[\phi(q)] = 0. \qquad (۹.۲)$$

از طرفی با مشتق‌گیری از سری هموتوپی (۶.۲) نسبت به q داریم:

$$\phi'(q) = \sum_{k=1}^{\infty} k x_k q^{k-1} = x_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k x_k q^{k-1}, \qquad (۱۰.۲)$$

باتوجه به روابط (۹.۲) و (۱۰.۲) و قرار دادن $q = 0$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$f(x_0) + x_1 f'(x_0) = 0 \ \rightarrow x_1 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

با درنظر گرفتن مشتق مرتبه دوم هموتوپی بر دو طرف معادله دگرشکلی مرتبه صفر (۵.۲) و قرار دادن $q = 0$ داریم:

$$x_2 f'(x_0) + \frac{1}{2} x_1^2 f''(x_0) = 0 \quad \rightarrow x_2 = -\frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^3}.$$

بنابراین باهمین شیوه، x_kها به ازای $k = 1, 2, 3, \cdots$ به‌دست می آیند ما تاکید می‌کنیم که همه‌ی این معادلات دگرشکلی مرتبه بالا خطی و لذا به‌راحتی قابل حل هستند. پس جواب تقریبی هموتوپی مرتبه یک و مرتبه دو به‌صورت زیر است

$$x \approx= x_0 + x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad (۱۱.۲)$$

$$x \approx= x_0 + x_1 + x_2 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f^2(x_0) f''(x_0)}{2[f'(x_0)]^2} \qquad (۱۲.۲)$$