بسم الله الرحمن الرحیم

پایان نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد
گرایش ریاضی محض- متروید

عنوان:

همبندی متناهی در مترویدهای نامتناهی

نگارش:

نیره علی پور

استاد راهنما:

دکتر حبیب اذانچیلر

دی ۱۳۹۲

قدردانی

تقدیم به:

پدر و مادر مهربانم

و اساتید بزرگوارم

که روشنی بخش راه زندگی ام بودند

ستایش...

مهربانا؛ با تو انس دارم و قلبم آرام است. با اطمینان به حمایت و بخشش تو تلاش می کنم. بارالها؛ من راهی نو و مسیری تازه را آغاز کرده ام. قلبم سرشار از عشق و امید به توست. حمایتم فرما تا با انگیزه و نیرویی بیشتر به سوی هدفم پیش بروم....

سپاسگزاری...

با سپاس فراوان از استاد راهنمای گرانقدر و معظمم جناب آقای دکتر اذانچیلر که با مساعدت ها و حمایت های خود، همواره مشوق من بوده اند. همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر آزادی که افتخار شاگردی ایشان نیز نصیب اینجانب شده، کمال تشکر را دارم. از استاد ارجمندم جناب آقای دکترسعیدشمس که قبول زحمت فرموده و مطالعه ی این پایان نامه را برعهده گرفته اند، بسیار ممنون و متشکرم .

از پدر و مادر عزیزتر از جانم که همواره حامی، پشتیبان و سنگ صبور من در سخت ترین مراحل زندگی ام بوده اند، سپاس گزارم.

نیره علی پور

دی ماه ۱۳۹۲

چکیده

در حدود سال ۱۹۶۹ یک مدل از ماترویدهای نامتناهی توسط **هیگز** [۱] پیشنهاد شد که B- ماترویید نامیده می شدند و ویژگی های مشترک زیادی با ماترویدهای متناهی داشتند. ولی تعریف و ارائه ی هیگز قابل دسترس نبود و با اینکه **آکسلی** [۲] یک تعریف خیلی ساده تر ارائه کرد و تعدادی از قسمت های اساسی را ساخت سودمندی نظریه ی هیگز همچنان مبهم ماند.

دیستل [۳] نشان داد که ماترویدهای نامتناهی می توانند همانند ماترویدهای متناهی به وسیله ی مجموعه های مستقل، پایه ها، دورها و بستارها توصیف شوند.

در این پایان نامه یک تابع همبندی برای ماترویدهای نامتناهی معرفی می کنیم که ویژگی هایی شبیه به تابع همبندی ماترویدهای متناهی دارد، همچون زیرمدولاری و تغییرناپذیری تحت دوگانی.

سپس به عنوان یک کاربرد، آن را در توسعه ی قضیه ی پیوندی تات برای ماترویید های متناهیاً تولیدشده و هم -متناهیاً تولیدشده استفاده می کنیم.

---

[۱] Higgs
[۲] Oxley
[۳] Distele

فهرست مطالب

پیشگفتار

نظریه ی ماترویید که در سال ۱۹۳۵ توسط **ویتنی** [۱] به عنوان ترکیبی از مفاهیم جبرخطی و نظریه ی گراف معرفی گردید، از جدیدترین شاخه های ریاضی می باشد که باتوجه به نوبودن آن زمینه های زیادی جهت تکامل و پیشرفت دارد. از مباحث مهمی که در این نظریه مطرح شده بحث ماتروییدهای نامتناهی می باشد.

در این پایان نامه یک تابع همبندی برای ماتروییدهای نامتناهی معرفی می کنیم و نشان می دهیم که قضیه پیوندی تات به یک کلاس بزرگ از ماتروییدهای نامتناهی توسعه می یابد.

قضیه(قضیه پیوندی تات): اگر M یک ماترویید متناهی و X, Y دو زیر مجموعه ی مجزا از $E(M)$ باشند، آنگاه یک افراز مانند (C, D) از $E(M) - (X \cup Y)$ وجود دارد به طوریکه:

$$\lambda_{M/C|D}(X, Y) = \lambda_M(X, Y)$$

در واقع هدف اصلی این پایان نامه اثبات قضیه ی زیر است:

قضیه: اگر M یک ماترویید متناهیاً تولید شده یا هم-متناهیاً تولید شده باشد و X, Y دو زیر مجموعه ی مجزا از $E(M)$ باشند؛ آنگاه یک افراز مانند (C, D) از $E(M) - (X \cup Y)$ وجود دارد به طوری که

$$\lambda_{M/C|D}(X, Y) = \lambda_M(X, Y)$$

در این پایان نامه مطالب به ترتیب زیر بیان خواهند شد:

فصل اول شامل مفاهیم و اصطلاحات مقدماتی از نظریه ی گراف و ماترویید [۱۱][۹]که به ترتیب از کتاب آشنایی با نظریه گراف وست و نظریه ماترویید آکسلی استفاده شده است.

در فصل دوم به بحث در مورد ماتروییدهای نامتناهی می پردازیم و همچنین ویژگی های مشترکی که این ماترویید ها با ماتروییدهای متناهی دارند را بیان می کنیم.

در فصل سوم همبندی در ماتروییدهای متناهی را مورد بررسی قرار می دهیم، برای این منظور تعاریف و قضایای همبندی در ماتروییدهای متناهی را به ماتروییدهای نامتناهی توسعه می دهیم. سپس با به کار بردن

[۱] Witniy

قضیه ی اصلی فصل مشخصه ی کلاس بزرگی از ماترویدهای نامتناهی را که معروف به ماترویدهای متناهیاً تولید شده و هم -متناهیاً تولید شده می باشد را ارائه می دهیم.

در فصل چهار به همبندی مراتب بالاتر در ماترویدهای نامتناهی می پردازیم، برای این منظور یک تعریف جایگزین از تابع همبندی برای ماترویدهای نامتناهی ارائه می دهیم همچنین در ادامه ی فصل ثابت می کنیم که تابع همبندی جایگزین ویژگی هایی همچون زیرمدولاری و تغییرناپذیری تحت دوگانی را دارد.

و نهایتاً فصل پنجم اختصاص به اثبات قضیه اصلی پایان نامه دارد.

این پایان‌نامه براساس مقاله زیر تنظیم گردیده است:

Henning Bruhn ,Paul Wollan , Finite connectivity in infinite matroids, Journal of Combinatorial Theory, Series B 33 (2012)01900-1912.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی از نظریه گراف و متروید

در این پایان‌نامه مفاهیم اولیه نظریه گراف از مرجع وست [۱۱] و مفاهیم بنیادی از نظریه‌ی متروید از مرجع آکسلی [۹] بیان می‌شوند.

۱.۱ تعاریف و قضایای گراف

تعریف ۱.۱.۱. گراف [۱] G، یک سه تایی به فرم $G = (V(G), E(G), J)$ است، که در آن:

(۱) $V(G)$، مجموعه‌ای ناتهی و متناهی است که **مجموعه رأس‌های** [۲] گراف G نامیده می‌شود.

(۲) $E(G)$، مجموعه‌ای متناهی است که **مجموعه یال‌های** [۳] گراف G نامیده می‌شود.

(۳) J، رابطه‌ای بین رئوس و یال‌های گراف G است که به هر عضو از $E(G)$، دو عضو از $V(G)$ (نه لزوماً متمایز) را وابسته می‌کند.

اگر $e = uv$، یک یال G باشد، آنگاه رأس‌های u, v را مجاور گویند.

---

[۱] Graph

[۲] Vertex

[۳] Edge

تعریف ۲.۱.۱. هرگاه نقاط انتهایی یالی بر هم منطبق باشند، آن یال **یک طوقه** [۱] نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. هرگاه نقاط انتهایی دو یال یکسان باشند، آن دو یال، یال‌های **موازی** [۲] نامیده می‌شوند.

تعریف ۴.۱.۱. گراف فاقد طوقه و یال‌های موازی، یک **گراف ساده**[۳] نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. برای **حذف**[۴] یال e از گراف G، کافی است یال e را از گراف G حذف کرده، بدون اینکه دیگر رأس‌ها و یال‌ها تغییری کنند. حذف یال e از گراف G را با نماد $G - e$ یا $G\backslash e$ نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید G یک گراف و e یالی از آن باشد. برای **انقباض**[۵] یال e با رأس‌های انتهایی v, u، ابتدا دو رأس v, u، و یال e را از گراف G حذف کرده و رأس جدیدی مانند x را طوری اضافه می‌کنیم که هر یال واقع بر u و v در گراف جدید بر x واقع شود. این گراف را با نماد G/e نمایش می‌دهند.

تعریف ۷.۱.۱. در گراف G دنباله‌ای از رأس‌ها و یال‌های G به صورت $v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ را که در آن برای هر $1 \leq i \leq k$ ، v_i, v_{i-1} رأس‌های انتهایی یال e_i هستند، یک v_0v_k**گشت** [۶] گویند.

گشتی را که در آن هیچ رأسی تکرار نشود، یک **مسیر**[۷] گویند.

فرض کنید در مسیر $v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$ داشته‌باشیم $v_0 = v_n$، دراین‌صورت این مسیر را، یک **دور**[۸] گویند.

تعریف ۸.۱.۱. گراف $H = (V(H), E(H))$ را یک **زیر گراف،**[۹] گراف $G = (V(G), E(G))$ گویند هرگاه داشته باشیم:

---

[۱] Loop

[۲] Parallel

[۳] Simple Graph

[۴] Deletion

[۵] Contract

[۶] Walk

[۷] Path

[۸] Cycle

[۹] Subgarph

(۱) $V(H) \subseteq V(G)$.

(۲) $E(H) \subseteq E(G)$.

در صورتی که $V(H) = V(G)$، H را زیر گراف فراگیر گراف G گویند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد و $V_1 \subseteq V(G)$. **زیرگراف القاشده** [1] توسط V_1 از G را با $G[V_1]$ یا $< V_1 >$ نمایش می‌دهند و آن گرافی است که مجموعه رأس‌هایش V_1 و مجموعه یال‌هایش شامل تمامی یال‌های G است که هر دو نقطه‌ی انتهایی آن‌ها، عضو V_1 است.

برای $E_1 \subseteq E(G)$، زیرگراف القاشده توسط E_1 از G را با $G[E_1]$ یا $< E_1 >$ نمایش می دهند که در آن E_1 مجموعه یال‌های آن است و نقاط انتهایی اعضای E_1 مجموعه رأس‌های آن را تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱۰.۱.۱. گراف G را **همبند** [2] گویند هرگاه بین هر دو رأس دلخواه G مسیری وجود داشته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. هر زیر گراف همبند ماکسیمال گراف G را یک **مولفه ی** [3] گراف G گویند.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک **برش رأسی**[4] گراف G، مجموعه‌ای از رأس‌هاست که با حذف آن‌ها مؤلفه‌های گراف G افزایش می‌یابد و هرگاه برشی رأسی X شامل تنها یک رأس مثل v باشد، در این صورت v یک رأس برشی از گراف G نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. گراف G را $k-$همبند گویند، هرگاه هر برش رأسی G دارای حداقل k رأس باشد.

همبندی گراف G را با $\kappa(G)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\kappa(G) = \min \{\, k : \text{همبند است } -k \text{ ، } G \,\}.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $\{P_1, P_2, ..., P_m\}$ مجموعه‌ای از مسیرها در گراف G باشد که هرکدام رأس‌های متمایز v, u را به هم وصل می‌کند. این مسیرها، **مجزای داخلی**[5] گفته‌می‌شود، هرگاه هیچ رأسی در

$$V(G) - \{u, v\},$$

[1] Induced Subgarph

[2] Connected

[3] Component

[4] Vertex cut

[5] Internally Disjoint

در بیش از یکی از این مسیرها نباشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. اگر e یالی از گراف G باشد و تعداد مولفه‌های همبند G بیشتر از G باشد، e را یال برشی g می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱۶. یک مجموعه‌ی **ناهمبندساز**[۱] از یال هاُ مجموعه ی $F \subseteq E(G)$ است به طوری که $G - F$ شامل بیش از یک مولفه ی همبند باشد.

تعریف ۱.۱.۱۷. راسی که هیچ یالی برآن واقع نباشدُ را **راس تنها**[۲]می گوییم.

تعریف ۱.۱.۱۸. یک **برش یالی**[۳] گراف G، مجموعه‌ای از یال‌هاست که با حذف آن‌ها، مؤلفه‌های گراف G افزایش می‌یابد.

برش یالی‌ای را که هیچ زیر مجموعه سره آن یک برش یالی نباشد، یک برش یالی مینیمال یا **بند**[۴] گویند.
مجموعه‌ی تمام یال‌های واقع بر یک رأس را که تشکیل برش یالی مینیمال دهند، **یک بند رأسی**[۵] گویند.

تعریف ۱.۱.۱۹. در یک گراف G، **زیرتقسیم یک یال**[۶] مثل uv یعنی عمل جایگزینی یال uv با مسیر uvw که در آن w رأسی با درجه دو است که در یال uv درج شده است.

تعریف ۱.۱.۲۰. یک **زیرتقسیم گراف** G [۷] گرافی است که با دنباله‌ای متناهی از عمل زیر تقسیم یال‌ها به طور متوالی از گراف G حاصل می‌شود.

تعریف ۱.۱.۲۱. یک گراف بی دور را یک **جنگل** [۸] و یک گراف بی دور همبند را یک **درخت،** [۹] گویند.

[۱] Edge Cut

[۲] Vertex Isolated

[۳] Edge-Cut

[۴] Bond

[۵] Vertex Bond

[۶] Subdivision of a Edge

[۷] Subdivision of a Graph

[۸] Forest

[۹] Tree

تعریف ۲۲.۱.۱. مجموعه‌ای از رأس‌های دو به دو نامجاور گراف G را یک مجموعه‌ی **مستقل** [۱] از رأس‌ها گویند.

تعریف ۲۳.۱.۱. گراف G را **دوبخشی** [۲] گویند، هرگاه بتوان $V(G)$ را به صورت اجتماع دو مجموعه‌ی مستقل جدا از هم مثل $V_۱, V_۲$ نوشت $V = V_۱ \cup V_۲$. دراین‌صورت $(V_۱, V_۲)$ را افراز دو بخشی G گویند.

تعریف ۲۴.۱.۱. گراف ساده‌ی G را که هر دو رأس دلخواه آن مجاورند، **گراف کامل** [۳] گویند.
گراف کامل با n رأس با K_n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید در گراف دوبخشی G با افراز دوبخشی $V = V_۱ \cup V_۲$، هر رأس $V_۱$ با هر رأس $V_۲$ مجاور باشد، در این صورت گراف G را **گراف دوبخشی کامل** [۴] گویند.
هرگاه در گراف دوبخشی کامل G داشته باشیم $|V_۱| = m$ و $|V_۲| = n$ ، آنگاه آن گراف را با $K_{m,n}$ نمایش می‌دهند.

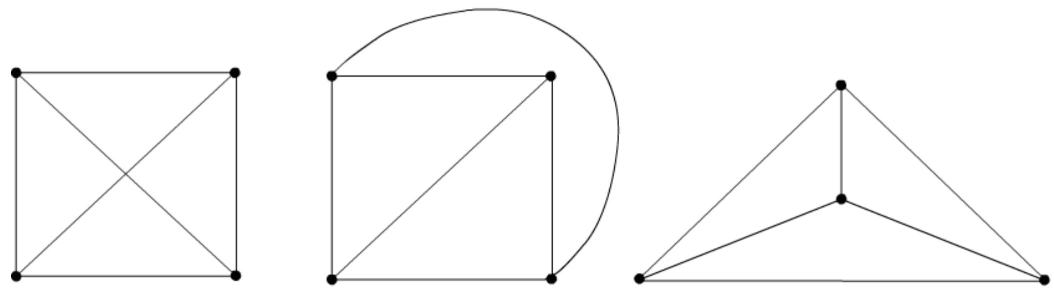
تعریف ۲۶.۱.۱. یک گراف G را **مسطح** [۵] گویند، هرگاه بتوان آن را در صفحه طوری رسم کرد که یال‌ها تنها در رأس‌های گراف G همدیگر را قطع کنند، که در آن هر یال یک کمان ساده یا یک **کمان ژردان** [۶] است. این چنین رسم کردن گراف G را یک **نشاندن مسطح** [۷] گویند.

تعریف ۲۷.۱.۱. یک **گراف مسطح شده** [۸] یک نشاندن مسطح خاصی از یک گراف مسطح است.

مثال ۲۸.۱.۱. در شکل ۶.۱ گراف مسطح $K_۴$ و دو نمایش مسطح شده ی آن نشان داده شده‌اند.

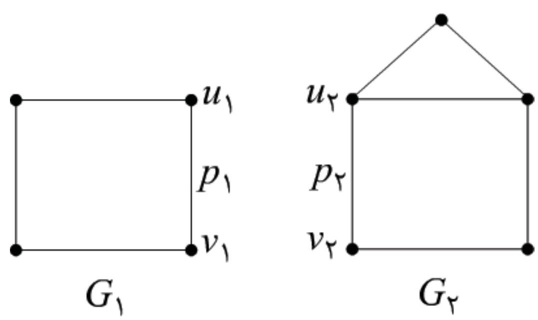
شکل ۶.۱ یک گراف مسطح با دو نمایش مسطح شده

[۱] Independent
[۲] Bipartite Graph
[۳] Complete Graph
[۴] Complete Bipartite Graph
[۵] Planar Graph
[۶] Jordan Arc
[۷] Planar Embedding
[۸] Plane Graph



گراف مسطح K_4 دو نمایش مسطح شده از K_4

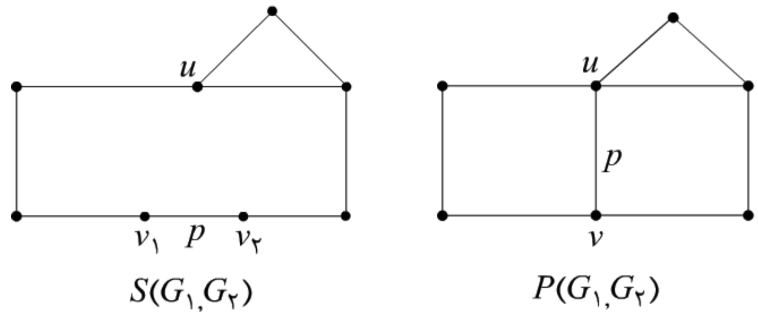
تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید برای $i \in \{1, 2\}$، p_i یالی از گراف G_i باشد. به طور دلخواه جهتی را برای p_i در نظر می‌گیریم، ابتدای آن را u_i و انتهایش را v_i می‌نامیم. سپس p_1 را از G_1 و p_2 را از G_2 حذف کرده، دو رأس u_1 و u_2 را برهم منطبق کرده و رأس جدید را u می‌نامیم. برای ایجاد **اتصال سری**،[1] یال جدید p را که v_1 را به v_2 وصل می کند اضافه می‌کنیم. اتصال سری این دو گراف با $S(G_1, G_2)$ نشان داده می‌شود. برای **اتصال موازی**،[2] دو رأس v_1 و v_2 را نیز برهم منطبق کرده و رأس جدید را v می‌نامیم، حال یال جدید p را طوری اضافه می‌کنیم که دو رأس u و v را به هم وصل کند. اتصال موازی با $P(G_1, G_2)$ نشان داده می‌شود. بنابراین به جز در حالتی که دقیقاً یکی از p_1 و p_2 یک طوقه است، اتصال موازی را می‌توان به صورت ساده با منطبق کردن p_1 و p_2 به‌طوری‌که هر دو در یک جهت باشند، به دست آورد.



شکل ۷.۱ گراف G_1 و G_2

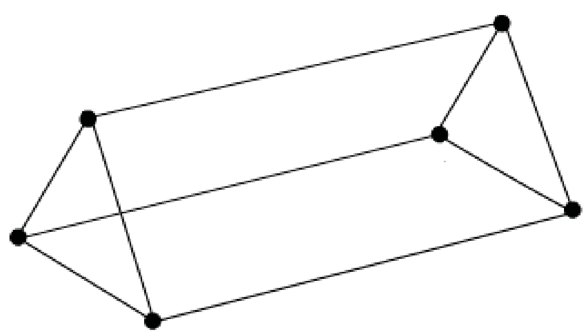
Series Connection[1]

Parallel Connection[2]



شکل ۸.۱ اتصال موازی و سری دو گراف G_1 و G_2

نکته ۳۰.۱.۱. گراف با شش رأس و نه یال را که در شکل ۹.۱ نشان داده شده است به دلیل اینکه از نظر شکل هندسی یک منشور با قاعده‌ی مثلث است، گراف منشور مثلثی می‌نامیم.



شکل ۹.۱ گراف منشور مثلثی

تعریف ۳۱.۱.۱. گراف نامتناهی [1]

Graph Infinite[1]

۲.۱ تعاریف و قضایای متروید

تعریف ۱.۲.۱. یک **متروید**[۱] مثل M زوج مرتب $M=(E,\mathcal{I})$ است که در آن E یک مجموعه‌ی متناهی، $\mathcal{I}$ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های E است که در سه شرط زیر صدق میکند:

I۱) $\emptyset\in\mathcal{I}$.

I۲) اگر $I\in\mathcal{I}$ و $I'\subseteq I$، آنگاه $I'\in\mathcal{I}$.

I۳) اگر $I_1,I_2\in\mathcal{I}$ و $|I_1|<|I_2|$، آنگاه عضوی مانند $e\in I_2-I_1$ وجود دارد به‌طوری‌که $I_1\cup\{e\}\in\mathcal{I}$.

اگر $M=(E,\mathcal{I})$ یک متروید باشد، آنگاه M را یک متروید روی E و E را **مجموعه زمینه**[۲] متروید M گویند.

هر عضو گردایه‌ی $\mathcal{I}$ را یک **مجموعه مستقل** M[۳] و هر زیر مجموعه‌ی E را که در $\mathcal{I}$ نباشد، یک **مجموعه وابسته**[۴] گویند و هر زیر مجموعه وابسته مینیمال متروید M را یک **دور** M[۵] گویند. دوری با n عضو از متروید M را یک n-دور M می‌نامند.

قضیه ۲.۲.۱. *فرض کنید $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های مجموعه E باشد، دراین‌صورت $\mathcal{C}$ گردایه‌ای از دورهای یک متروید روی E است اگر و تنها اگر $\mathcal{C}$ در شرایط زیر صدق کند:*

C۱) $\emptyset\notin\mathcal{C}$.

C۲) *اگر* $C_1,C_2\in\mathcal{C}$ *و* $C_2\subseteq C_1$، *آنگاه* $C_1=C_2$.

C۳) *اگر* $C_1,C_2\in\mathcal{C}$ *و* $C_1\neq C_2$ *و* $e\in C_1\cap C_2$، *آنگاه* $C_3\in\mathcal{C}$ *وجود دارد به‌طوری‌که*

$$C_3\subseteq (C_1\cup C_2)-e.$$

برهان . به [[۹]، نتیجه ۵.۱.۱] مراجعه شود. □

تعریف ۳.۲.۱. هر مجموعه مستقل ماکسیمال متروید M را یک **پایه‌ی** M[۶] گویند. گردایه‌ی تمامی پایه‌های

Matroid[۱]

Ground Set[۲]

Independent Set[۳]

Dependent Set[۴]

Circuit[۵]

Base[۶]

M با $\mathcal{B}(M)$ یا با $\mathcal{B}$ نمایش داده می‌شود.

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید m و n اعداد صحیح غیر منفی باشند که $m \leq n$، و E یک مجموعه‌ی n عضوی و $\mathcal{B}$ گردایه تمامی زیرمجموعه‌های m عضوی E باشد. دراین‌صورت $\mathcal{B}$ گردایه پایه‌های یک متروید روی E است. این متروید با $U_{m,n}$ نمایش داده می‌شود و **متروید یکنواخت**[۱] از رتبه m روی مجموعه n عضوی E نامیده می‌شود. به وضوح

$$\mathcal{I}(U_{m,n}) = \{X \subseteq E :\mid X \mid \leq m\}.$$

$$\mathcal{C}(U_{m,n}) = \begin{cases} \emptyset & ,m = n \\ \{X \subseteq E :\mid X \mid = m + ۱\} & ,m < n \end{cases}$$

لم ۵.۲.۱. *فرض کنید $B_۱$ و $B_۲$ دو پایه از متروید M باشند، دراین‌صورت $\mid B_۲ \mid = \mid B_۱ \mid$.*

برهان . به [[۹]، لم ۱.۲.۱] مراجعه شود. □

قضیه ۶.۲.۱. *فرض کنید E مجموعه‌ی متناهی و ناتهی و $\mathcal{B}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های E باشد. دراین‌صورت $\mathcal{B}$ گردایه‌ی پایه‌های یک متروید روی E است اگر و تنها اگر در شرایط زیر صدق کند:*

$(B۱)$ $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

$(B۲)$ اگر $B_۱, B_۲ \in \mathcal{B}$ و $x \in B_۱ - B_۲$، آنگاه عضوی مانند $y \in B_۲ - B_۱$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$(B_۱ - x) \cup y \in \mathcal{B}.$$

برهان . به [[۹]، لم ۲.۲.۱] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۲.۱. دو متروید $M_۱$ و $M_۲$ را **یکریخت**[۲] گویند، اگر نگاشت دوسویی $\varphi : E(M_۱) \longrightarrow E(M_۲)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $X \subseteq E(M_۱)$ در $M_۱$ مستقل است، اگر و تنها اگر $\varphi(X)$ در $E(M_۲)$ مستقل باشد.

---

[۱] Uniform Matroid

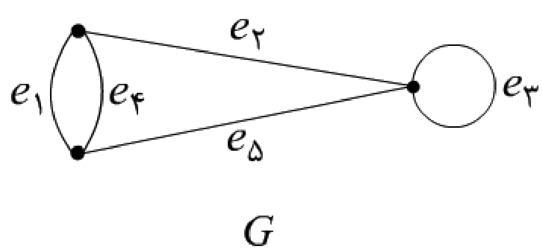
[۲] Isomorphic

گزاره ۸.۲.۱. *فرض کنید G یک گراف باشد و $E = E(G)$. مجموعه‌ی $\mathcal{I}$ را گردایه‌ی مجموعه‌های یال‌های تمامی زیرگراف‌های بی دور G در نظر بگیرید. دراین‌صورت $(E, \mathcal{I})$ یک متروید است. این متروید را* ***متروید دوری***[1] *گراف G گویند و با $M(G)$ نمایش می‌دهند.*

برهان . به [[۹]، نتیجه ۶.۶.۱] مراجعه شود. □

تعریف ۹.۲.۱. مترویدی را که یکریخت با یک متروید دوری باشد، **متروید گرافیک**،[2] و مترویدی را که گرافیک نباشد، **متروید غیرگرافیک**[3] گویند.

مثال ۱۰.۲.۱. فرض کنید G گراف شکل ۱۰.۱ باشد



شکل ۱۰.۱

دراین‌صورت برای به‌دست آوردن متروید دوری حاصل از گراف G، قرار می‌دهیم:

$E(M) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}.$

$\mathcal{I}(M) = \{\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_4\}, \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_4, e_5\}\}.$

$\mathcal{C}(M) = \{\{e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_2, e_5\}, \{e_2, e_4, e_5\}\}.$

در این صورت $M = (E, \mathcal{I})$ متروید دوری حاصل از گراف G می‌باشد.

[1] Cycle Matroid

[2] Graphic Matroid

[3] Non-Graphic Matroid