بسم الله الرحمن الرحیم

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه تفرش

دانشکده ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

# عملگرهای یکنوا توسعه ناپذیر و تماماً توسعه پذیر

**نگارنده:**

روح‌الدین باقری حیدری

**استاد راهنما:**

دکتر اسماعیل نظری

دیماه ۱۳۹۰

تقدیم به خانواده، اساتید و دوستان بزرگوار

در این‌جا برخود لازم می‌دانم از خانواده و اساتید گرامی که با مساعدت‌ها و حمایت بی‌دریغشان کمک‌های فراوانی به بنده در طول تمامی دوران زندگی و مراحل تحصیلی نمودند تشکر و قدردانی نمایم.

با تقدیر و تشکر از استاد ارجمند جناب آقای دکتر اسماعیل نظری که با راهنمایی‌ها و پیشنهادهای سازنده و ارزشمند خویش کمک‌های فراوانی به بنده در راستای تهیه و تدوین این پایان نامه کردند.

## چکیده

عملگرهای یکنوا ماکسیمال دسته خاصی از نگاشت‌های مجموعه مقدار هستند که دارای اهمیت زیادی در ریاضیات می‌باشند. یکی از ایده هایی که تقریباً از ابتدای بررسی عملگرهای یکنوا ماکسیمال مورد توجه تمام ریاضیدانان بوده توسعه این عملگرها به یک نگاشت مجموعه مقدار بزرگ‌تر بود. در این پایان نامه علاوه بر معرفی عملگرهای یکنوا ماکسیمال و قضایای مربوط به آن ها یک خانواده از توسعه‌های عملگرهای یکنوا ماکسیمال را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم. سپس به بررسی توسعه پذیری این نوع عملگرها پرداخته و در پایان نیز کاربرد دسته‌ای خاص از این توسعه ها را در تساوی دو عملگر یکنوا ماکسیمال بیان می کنیم.



**کلمات کلیدی:** عملگر یکنوا ماکسیمال،توسعه، نگاشت مجموعه مقدار

# فهرست مطالب

## مقدمه

# ۱.۰توسعه ها از ابتدا،تاکنون

نگاشــتهای مجموعــه مقــدار دســته مهمــی از نگاشــت هــا بــا کاربردهــای فراوانــی در ریاضــیات، فیزیــک[۱]، اقتصــاد[۲] و .... مــی‌باشــند. از شــروع قــرن بیســتم ریاضــیدانانی ماننــد پینلیــو[۳]، هاســدورف ،بولیگــان[۴] در زمینــه نگاشــت هــای مجموعــه مقــدار و آنــالیز مجموعــه مقــدار بــه فعالیــت پرداختنــد. همچنــین در ایــن مقطــع مطالعــاتی در زمینــه توابــع و مجموعــه هــای محــدب توســط مینکوفســکی آغــاز شــد و ایــن موضــوع پایــه ای بــرای مبحثــی مهــم در آنــالیز تحــت عنــوان آنــالیز محــدب شــد کــه تاریخچــه آن بــه ســال ۱۹۳۳ بــاز مــی‌گــردد آنجــایی کــه فنچــل[۵] و بونیســن[۶] کتــابی در زمینــه مجموعــه هــا و توابــع محــدب منتشــر کردنــد. بعــدها کتــاب هــایی در مــورد آنــالیز محــدب نوشــته شــد کــه از جملــه مهمتــرین ایــن کتــاب هــا روی فضــاهای بــا بعــد متنــاهی کتــابی از لــی مارچــل[۷] مــی‌باشــد همچنــین در حــالتی کــه فضــا دارای بعــد نامتنــاهی باشــد مــی تــوان بــه کتــاب‌هــایی کــه توســط تیمــان[۸] و وان تیــل[۹] نوشــته شــده اســت اشــاره کــرد. اولــین کتــاب در زمینــه تئــوری عملگرهــا در ســال ۱۹۳۲ توســط بــا نــاخ و نیــومن بــه چــاپ رســید. محققــان در نیمــه اول قــرن بیســتم بــه مطالعــه عملگرهــای خطــی پرداختنــد و از نیمــه دوم ایــن قــرن تحقیقــاتی در زمینــه عملگرهــای غیــر خطــی نیــز بــه عمــل آمــد و ریاضــیدانان دســته ای خــاص از عملگرهــا کــه بعــدها عملگــر یکنــوا نامیــده شــدند را مــورد توجــه قــرار دادنــد. در ایــن راســتا عملگرهــای یکنــوا ماکسیمال برای اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط مینتی[۱۰] و زارانتونلو[۱۱] معرفی شدند.

در همــین ســال راک فلــر زیرمشــتق را کــه نــوعی خــاص از عملگرهــای یکنــوا ماکســیمال و یکــی از ابزارهــای مهــم در آنــالیز محــدب و در واقــع پلــی بــین آنــالیز تــابعی و محــدب مــی‌باشــد را معرفی کرد.

---

۱. physics ۲.economic ۳.Painleve ۴. Boligan ۵. Fenchel ۶. Bonnesen

۷.lemarchel ۸.Teman ۹.van Tiel ۱۰.Minty ۱۱.zarantonello

یکی از ایده هایی که تقریباً از ابتدای بررسی عملگرهای یکنوا ماکسیمال مورد توجه تمام ریاضیدانان بوده توسعه این عملگرها به یک نگاشت مجموعه مقدار بزرگ‌تر بودندکه کار با آن‌ها آسان‌تر باشد.

ایده اولیه این طرح را راک فلر با معرفی ε-زیر مشتق که توسعه ای برای زیر مشتق توابع محدب می باشد را در سال ۱۹۶۵ ارائه کرد. در ادامه مطالعاتی در این زمینه انجام شد و دانشمندان به دنبال ارائه توسعه ای برای هر عملگر یکنوا ماکسیمال بودند تا اینکه در سال ۲۰۰۰ اسویتر[۱۲] در مقاله [۱۱] خانواده‌ای از توسعه ها برای عملگرهای یکنوا ماکسیمال ارائه دادند و این مقاله باعث تحریک دیگر ریاضیدانان برای مطالعه روی این موضوع شد. در سال ۲۰۰۵ بوراچیچ[۱۳] و آیسم[۱۴] به بررسی توسعه پذیری عملگرهای یکنوا ماکسیمال پرداختند بعد از آن مقالات متعددی در این زمینه منتشر شد تا اینکه در سال ۲۰۰۸ بوراچیچ و آیسم کتابی بسیار غنی تحت عنوان نگاشت های مجموعه مقدار و توسعه های عملگرهای یکنوا به چاپ رساندند و در آن ضمن بررسی عملگرهای یکنوا و بیان قضایای مربوط به آن ها ، توسعه پذیری عملگرهای یکنوا ماکسیمال را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند.

در سال ۲۰۰۹ مارک روکا[۱۵] زیر نظر اساتید راهنما خود پروفسورمارتینز لیگاز[۱۶] و الیزابت آلیوی[۱۷] در پایان نامه خود تحت عنوان"عملگر های یکنوا ماکسیمال و نمایش های محدب و دوگان ها" ضمن بررسی عملگر های یکنوا ماکسیمال ، عملگر قطبی[۱۸] وابسته به یک عملگر یکنوا را معرفی کرده و با استفاده از این ابزار به بیان قضایایی در رابطه با عملگر های یکنوا و یکنوا ماکسیمال پرداخت و در نهایت دسته‌ای خاص از توسعه های عملگرهای یکنوا ماکسیمال و کاربرد آن ها را در تساوی عملگرهای

---

۱۲.Svaiter ۱۳.Burachik ۱۴.iusem ۱۵.Marco Roco ۱۶. Martinez legaz

۱۷. Elisabet allevi ۱۸.polar

یکنوا ماکسیمال را ارائه کرد. در فصل اول این پایان نامه ابتدا به ارائه تعاریف و قضایای مقدماتی آنالیز تابعی پرداخته و در ادامه ابزار های مورد نیاز در آنالیز محدب را مورد تحلیل و بررسی قرار داده سپس به معرفی نگاشت های مجموعه مقدار و ارائه خواص پیوستگی آن ها می‌پردازیم در نهایت زیر مشتق و ε-زیرمشتق را به عنوان مثال‌هایی از نگاشت های مجموعه مقدار معرفی می کنیم .

در فصل دوم به بررسی دسته‌ای خاص از نگاشت‌های مجموعه مقدار به نام عملگرها یکنوا و یکنوای ماکسیمال می‌پردازیم و با استفاده از لم زرن وجود یک عمگر یکنوا ماکسیمال را به ازای هر عملگر یکنوا مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس خواص مربوط به عملگرهای یکنوا و یکنوا ماکسیمال را بوسیله قضایای مربوط به این عملگرها مورد تحلیل و بررسی قرار داده و پس از آن خانواده‌ای از توسعه های عملگرهای یکنوا ماکسیمال را تعریف کرده و به بیان خصوصیات این توسعه ها می‌پردازیم و در پایان ضمن بیان چگونگی جمع توسعه ها[19] به بیان کاربردی از توسعه ها در نوعی خاص از جمع عملگرها به نام جمع توسعه یافته می‌پردازیم. فصل سوم را با بررسی دسته ای از عملگرهای یکنوا ماکسیمال روی فضای باناخ انعکاسی که غیر قابل توسعه به عضوی از خانواده توسعه های خود می‌باشد آغاز کرده و در ادامه با توجه به قضیه های ارائه شده خصوصیات عملگرهایی که غیر قابل توسعه هستند را مورد بحث قرار می‌دهیم . در بخش اول فصل ۴ توسعه پذیری عملگرهای یکنوا ماکسیمال را مورد تجزیه و تحلیل قرار داده و شرایط عملگرهای یکنوا ماکسیمال بطور کامل (تماماً) توسعه پذیر را ارائه می‌نماییم. سپس دسته خاصی از توسعه را تعریف کرده و در پایان کاربردی از آن ها را در تساوی عملگرهای یکنوا ماکسیمال مورد بررسی قرار می‌دهیم .

۱۹.enlargements

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای مقدماتی

## ۱.۱مقدمه

قبـل از شـروع هـر مبحـث علمـی ، ابتـدا بایـد بـا پـیش تعـاریف و اصـطلاحات علمـی بکـار رفتـه در آن بـه خـوبی آشـنا بـود تـا بتـوان در ادامـه بـا مطالـب بیـان شـده ارتبـاط برقـرار کـرده و همچنـین در صـورت نیـاز بـه مطالـب کامـل تـر بتـوان از سـایر مراجـع دیگـر بـا دیـد بـازتر و مفیـدتری اسـتفاده نمـود. در فصـل اول ایـن پایـان نامـه بـه طـور مفصـل بـه پـیش نیازهـای مربـوط بـه موضـوعات بیـان شـده در ایـن مبحث پرداخته‌ایم.

فصـل اول بـه چنـد بخـش مجـزا و در عـین حـال کـاملا"مـرتبط تقسـیم شـده و مفـاهیم مختلفـی را مـورد بحـث قـرار مـی‌دهـد. در بخـش اول بـه معرفـی تعـاریف و قضـایای از آنـالیز تـابعی کـه بـه عنـوان بخشی از ابزارهای ما که در این مبحث مورد استفاده واقع می باشند می‌پردازیم.

در بخـش دوم تعـاریف مهـم و کلیـدی آنـالیز محـدب را مـورد تجزیـه و تحلیـل قـرار داده و بـه بیـان دسـته‌ای خـاص از عملگرهـا تحـت عنـوان عملگرهـای آفینـی پرداختـه و در ادامـه یکـی از قضـایای مهم را در مورد عملگرهای آفینی بیان می کنیم.

در بخش سوم نگاشت های مجموعه مقدار را معرفی کرده و مثالی مهم از این نگاشت ها را که یکی از ارکان اصلی مباحث آنالیز محدب است تحت عنوان زیرمشتق بیان کرده و به ارائه چند قضیه در این زمینه می‌پردازیم.

## ۲.۱ مفاهیمی از آنالیز تابعی

**تعریف۱.۲.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی باشد ، در این صورت تابع $\|.\|: X \to R^+$ را یک نرم گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in R$ ،

۱) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$

۲) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

۳) $\|\alpha x\| = |\alpha|\ \|x\|$

**تعریف ۲.۲.۱.** فضای خطی $X$ مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای نرم دار گوییم و آن را با $(X, \|.\|)$ نشان می‌دهیم .

**تعریف ۳.۲.۱.** فضای نرم دار $X$ را که نسبت به متر تولید شده توسط نرم یعنی به ازای هر $x, y \in X$ ،

$d(x, y) = \|x - y\|$ کامل است را یک فضای باناخ [۱] می‌نامیم .

**مثال ۱.۲.۱.** فضای $R^n$ یک فضای باناخ است .

**مثال۲.۲.۱.** فرض کنیم $X$ فضایی توپولوژیک و $CB(X)$ فضای خطی تمام پیوسته و کراندار از $X$ به اعداد مختلط باشند اگر به ازای هر $f \in CB(X)$ قرار دهیم $\|f\| = \sup\{|f(x)|: x \in X\}$ و روی $CB(X)$ جمع و ضرب نقطه وار را تعریف می‌کنیم آن‌گاه $CB(X)$ یک فضای باناخ است .

**تعریف ۴.۲.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی و $\|.\|_2$ و $\|.\|_1$ دو نرم روی این فضای خطی باشند . هرگاه اعداد مثبت $c_1, c_2 > 0$ موجود باشند بطوریکه برای هر $x \in X$، $c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$ در این صورت این دو نرم را معادل می‌گوییم .

**تعریف۵.۲.۱ .** اگر $B$ زیر مجموعه ای از فضای نرم دار $X$ باشد . در این صورت $B$ کراندار است هرگاه $M > 0$ وجود داشته باشد بقسمی‌که به ازای هر $x \in B$ داشته باشیم $\|x\| \leq M$

**قضیه۱.۲.۱.** اگر $X$ یک فضای نرم دار باشد . آن‌گاه اعمال جمع و ضرب اسکالر پیوسته می‌باشند.

**اثبات:** به [۱] مراجعه کنید.

۱. Banach

**تعریف ۶.۲.۱ .** فرض کنیم $Y$ و $X$ دو فضای نرم دار و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی باشد . گوییم $T$ کراندار است ، اگر عدد $k > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\|Tx\| \leq k\|x\|$$

**قضیه۲.۲.۱.** اگر $Y$ و $X$ دو فضای نرم دار و $T: X \to Y$ یک عملگر خطی کراندار باشد آن‌گاه به ازای هر $x \in X$ داریم

$$\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|$$

**اثبات:** به [۱] مراجعه کنید.

**تعریف۷.۲.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی با توپولوژی $\tau$ باشند. در این صورت $X$ را یک فضای توپولوژیک خطی می‌نامیم هرگاه

۱) برای هر $x \in X$ مجموعه تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد.

۲) اعمال جمع و ضرب اسکالر نسبت به توپولوژی $\tau$ پیوسته باشند.

**مثال۳.۲.۱.** فضاهای نرم دار حالت خاصی از فضاهای توپولوژیک خطی هستند.

**قضیه۳.۲.۱.** (هان[۲]–باناخ) اگر $X$ یک فضای خطی حقیقی و $p$ یک تابعک زیر خطی روی $X$ و $M$ یک زیر فضای خطی $X$ باشد آن‌گاه هر تابعک خطی $f: M \to R$ ، بقسمی‌که به ازای هر $x \in M$ ، $f(x) \leq p(x)$ دارای یک توسیع $\Lambda: X \to R$ است بطوریکه برای هر $x \in X$ ، $-p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x)$

**اثبات:** به [۱] مراجعه کنید.

**تعریف ۸.۲.۱ .** اگر $X$ یک فضای توپولوژیک خطی باشد. مجموعه متشکل از تمام تابعک های خطی پیوسته روی $X$ را با $X^*$ نشان می‌دهیم و آن را فضای دوگان $X$ می‌نامیم .

۲. Hahn

**قضیه۴.۲.۱.** مجموعه $B(X,Y)$ متشکل از تمام عملگرهای خطی کراندار از فضای نرم دار $X$ به فضای نرم دار$Y$ با جمع و ضرب اسکالر و نرم $\|T\| = \sup\{\|Tx\|: \|x\| \le 1\}$ یک فضای نرم دار است . بعلاوه اگر $Y$ باناخ باشد آن‌گاه $B(X,Y)$ با نرم مذکور یک فضای باناخ است .

**اثبات :** به [۱] مراجعه کنید.

**نتیجه ۱.۲.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد آن‌گاه $X^* = B(X,R)$ یک فضای باناخ است .

**قضیه ۵.۲.۱ .** اگر $X$ یک فضای توپولوژیک خطی باشد . در این صورت به ازای هر $a \in X$ و $\lambda \in \Phi - \{0\}$ ،

$T_a: X \to X \qquad M_\lambda: X \to X$

$T_a(x) = a + x \qquad M_\lambda(x) = \lambda x$

در این صورت $M_\lambda$ و $T_a$ همانسانی‌هایی از $X$ به $X$ هستند.

**اثبات:** به [۱] مراجعه کنید.

**نتیجه ۲.۲.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای توپولوژیک خطی و $O \subseteq X$ در این صورت $O$ باز است اگر و فقط اگر برای هر $a \in X$ ، $a + O$ باز باشد.

**تعریف۹.۲.۱.** زیر مجموعه $E$ از فضای خطی $X$ را جاذب می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $a > 0$ بقسمی‌که $x \in aE$ .

**قضیه۶.۲.۱ .** فرض کنیم $V$ یک همسایگی از صفر در فضای توپولوژیک خطی باشد در این صورت :

۱) اگر $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ و $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \infty$ آن گاه $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$

۲) هر زیر مجموعه فشرده $K$ از $X$ کراندار است .

۳) اگر $\delta_1 > \delta_2 > \cdots$ و $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$ و $V$ همسایگی کراندار از صفر باشد آن‌گاه دسته $\{\delta_n V: n \in N\}$ یک پایه موضعی برای $X$ است.

**اثبات:** به [۱] مراجعه کنید.

**نتیجه ۳.۲.۱.** هر همسایگی صفر در فضای توپولوژیک خطی جاذب است .

**برهان :** طبق قسمت الف قضیه قبل اگر $V$ یک همسایگی صفر باشد ، $0 < r_1 < r_2 < \cdots$ و $r_n \to \infty$ آن‌گاه

$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ در نتیجه به ازای هر $x \in X$ وجود دارد $r_n > 0$ بطوریکه $x \in r_n V$ لذا $V$ جاذب است.

**تعریف۱.۲.۱۰.** فرض کنیم $X$ یک فضای نرم دار و $X^*$ فضای دوگان آن باشد در این صورت مجموعه همه تابعک‌های خطی پیوسته روی $X^*$ را دوگان مضاعف $X$ می‌گوییم و آن را با $X^{**}$ نشان می‌دهیم.

**تعریف ۱.۲.۱۱.** نگاشت $\Phi: X \to X^{**}$ با ضابطه $\Phi(x)\Lambda = \Lambda x$ را جادهی متعارف می‌گوییم .

**تعریف ۱.۲.۱۲.** هرگاه جادهی متعارف پوشا باشد یعنی $\Phi(X) = X^{**}$ در این صورت $X$ را انعکاسی گوییم .

**مثال۱.۲.۴.** هر فضای متناهی البعد انعکاسی است .

**تعریف ۱.۲.۱۳.** اگر $X$ یک فضای نرم دار و $X^*$ فضای دوگان آن باشد . توپولوژی تولید شده بوسیله $X^*$ روی $X$ یعنی ضعیف‌ترین توپولوژی $\tau$ روی $X$ بقسمی‌که هر $\Lambda \in X^*$ نسبت به $\tau$ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف روی $X$ می‌نامیم.

**تعریف ۱.۲.۱۴.** اگر $\Lambda \in X^*$ و $x_0$ عنصر دلخواهی از $X$ و $\varepsilon > 0$ آن‌گاه :

$$U(\Lambda, x_0, \varepsilon) = \{x \in X: |\Lambda x - \Lambda x_0| < \varepsilon\}$$

یک همسایگی از $x_0$ نسبت به توپولوژی ضعیف است دسته تمام همسایگی ها $U(\Lambda, x_0, \varepsilon)$ وقتی که $x_0, \varepsilon, \Lambda$ تغییر می‌کنند تشکیل یک زیر پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند و تمام اشتراک‌های متناهی از همسایگی هایی به شکل $U(\Lambda, x_0, \varepsilon)$ تشکیل یک پایه برای توپولوژی ضعیف می‌دهند لذا یک مجموعه پایه‌ای باز برای توپولوژی ضعیف به شکل زیر است :

$$U = \{x \in X: |\Lambda_1 x - \Lambda_2 x| < \varepsilon_1\} \cap \dots . \cap \{x \in X: |\Lambda_m x - \Lambda_m x_0| < \varepsilon_m\}$$

برای یک عنصر $x_0 \in X$ و $\Lambda_1, \dots, \dots, \Lambda_m \in X^*$ و اعداد مثبت $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots, \varepsilon_m$.

**تعریف ۱.۲.۱۵.** فرض کنیم $X$ فضای نرم دار و $X^*$ فضای دوگان آن باشد آن‌گاه ضعیف‌ترین توپولوژی روی $X^*$ که نسبت به آن توپولوژی به ازای هر $x \in X$ ، $\Phi(x)$ پیوسته باشد را توپولوژی $\text{weak}^*$ روی $X^*$ می‌گوییم.

**تعریف ۱.۲.۱۶.** اگر $\Lambda_0$ عنصر دلخواهی از $X^*$ همچنین $x \in X$ و $\varepsilon > 0$ آن‌گاه یک مجموعه زیر پایه ای باز برای توپولوژی $\text{weak}^*$ به شکل

$$U(\Lambda_0, x, \varepsilon) = \{\Lambda \in X^*: |\Phi(x)\Lambda - \Phi(x)\Lambda_0| < \varepsilon\} = \{\Lambda \in X^*: |\Lambda x - \Lambda_0 x| < \varepsilon\}$$

و یک مجموعه پایه‌ای باز برای توپولوژی $\text{weak}^*$ به صورت

$$U(\Lambda_0, x_1, \dots ., x_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \{\Lambda \in X^*: |\Lambda x_i - \Lambda_0 x_i| < \varepsilon_i, 1 \le i \le m\}$$

در حالی که $\Lambda_0 \in X^*$ و $x_1, \dots ., x_m \in X$ و $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \dots, \varepsilon_m$ اعدادی مثبت هستند.

**قضیه۷.۲.۲.** فرض کنیم $\{\Lambda_n\}$ دنباله‌ای در $X^*$ باشد آن‌گا ه $\{\Lambda_n\}$ نسبت به توپولوژی $weak^*$ همگرا به $\Lambda$ است هر گاه به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\Lambda_n x \to \Lambda x$ و آن را به صورت $\Lambda_n \xrightarrow{w^*} \Lambda$ نمایش می‌دهیم.

**اثبات:** به [۱] مراجعه کنید.

**قضیه۸.۲.۱ .** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد آن‌گاه

۱) $A \subseteq X^*$ نسبت به توپولوژی $weak^*$ فشرده است اگر و فقط اگر نسبت به توپولوژی $weak^*$ بسته و کراندار باشد.

۲) اگر $A$ نسبت به توپولوژی قوی (نرم ) محدب ، بسته و کراندار باشد آن‌گاه نسبت به توپولوژی $weak^*$ فشرده است.

**اثبات:** به [۵] مراجعه کنید.

**تعریف ۱۷.۲.۱.** رابطه $R$ روی مجموعه $A$ را ترتیبی جزیی می‌نامند هرگاه انعکاسی ، نامتقارن و تعدی باشد.

**مثال ۸.۲.۱.** اگر $A$ یک مجموعه باشد . رابطه $R$ را روی $P(A)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$X\,R\,Y \quad \Leftrightarrow \quad X \subseteq Y$$

در این صورت $R$ یک رابطه ترتیب جزیی است .

**تعریف ۱۸.۲.۱.** فرض کنیم $\leq$ یک رابطه ترتیب جزیی روی $A$ باشد . عناصر $x, y \in X$ را مقایسه پذیر می‌نامیم هر گاه داشته باشیم : $\quad x \leq y$ یا $y \leq x$

**مثال ۹.۲.۱.** رابطه $R$ را روی $N$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad x \leq y$$

در این صورت همه عناصر $N$ مقایسه پذیرند .

**تعریف ۱۹.۲.۱.** فرض کنیم $\leq$ یک رابطه ترتیب جزیی روی مجموعه $A$ باشد . اگر همه عناصر $A$ مقایسه پذیر باشند آن‌گاه $\leq$ را یک رابطه ترتیب خطی روی $A$ می‌نامیم .

**قضیه۹.۲.۱. (لم زرن)** فرض کنیم $A$ یک مجموعه مرتب جزیی غیر تهی باشد . اگر هر زیر مجموعه مرتب خطی $A$ دارای کران بالا باشد آن‌گاه $A$ دارای عنصر ماکسیمال است .

**اثبات:** به [۲] مراجعه کنید.

## ۳.۱ آنالیز محدب

**تعریف ۱.۳.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی باشد . مجموعه $C \subseteq X$ را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in C$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

**مثال ۱.۳.۱.** اگر $X$ یک فضای خطی باشد . در این صورت گوی بسته به مرکز $x_0$ و شعاع $r$ یک مجموعه محدب است.

**مثال۲.۳.۱.** اگر $A$ ماتریسی $m \times n$ و $b \in R^m$ . در این صورت مجموعه $\{x \in R^n : Ax = b\}$ محدب هستند.

**تعریف۲.۳.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی باشد و $A \subseteq X$ در این صورت پوسته محدب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\text{Co } A = \bigcap \left\{ M \subseteq X : \quad A \subseteq M \ \text{و} \ \text{محدب} \ M \right\}$$

**قضیه۱.۳.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی و $\{C_n\} \subseteq X$ کلاسی از زیر مجموعه های محدب $X$ باشد در این صورت:

۱) $\cap C_n$ یک مجموعه محدب است.

۲) اگر به ازای هر $n \in N$ ، $C_n \subseteq C_{n+1}$ آن گاه $\cup C_n$ مجموعه ای محدب است .

**اثبات:**

۱) فرض کنیم $x, y \in \cap C_n$ آن‌گاه به ازای هر $n \in N$، $x, y \in C_n$ حال فرض می کنیم $0 \leq \lambda \leq 1$ لذا به ازای هر $n \in N$، $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_n$ لذا

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in \cap C_n$$

۲) اگر $y \in \bigcup C_n$ و $x$ در اینصورت وجود دارد $n \in N$ و $m$ بطوریکه $y \in C_n$ و $x \in C_m$ حال فرض می‌کنیم که $m < n$ لذا $C_m \subseteq C_n$ و $x \in C_n$ پس $x, y \in C_n$ . چون $C_n$ محدب است لذا برای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داریم $\lambda x + (1-\lambda)y \in C_n$ پس $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcup C_n$ .

**قضیه۱.۳.۲.** اگر $C$ یک مجموعه محدب باشد آن‌گاه $\bar{C}$ نیز یک مجموعه محدب است .

**اثبات:** فرض کنیم $x, y \in \bar{C}$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ لذا دنباله هایی مانند $\{y_n\} \subseteq C$ و $\{x_n\}$ موجود است بطوریکه $x_n \to x$ و $y_n \to y$ . از طرفی چون $C$ محدب است پس به ازای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ خواهیم داشت

$$\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in C$$

لذا $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \to \lambda x + (1-\lambda)y$ بنابراین $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bar{C}$ در نتیجه $\bar{C}$ محدب است .

**تعریف۱.۳.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد و $0 \neq p \in X^*$ و $\alpha \in R$ آن‌گاه ابرفضا $H_{p,\alpha}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_{p,\alpha} = \{x \in X \,|\langle p, x\rangle = \alpha\}$$

**تعریف۱.۳.۴.** اگر $B$ و $A$ زیرمجموعه هایی از فضای باناخ $X$ باشند و $p \in X^*$ و $\alpha \in R$ در این صورت :

۱) ابرفضای $H_{p,\alpha}$ ، $B$ و $A$ را از هم جدا می‌کند هرگاه به ازای هر $x \in A$ ، $\langle p, x\rangle \leq \alpha$ همچنین برای هر $x \in B$ ، $\langle p, x\rangle \geq \alpha$ .

۲) ابرفضا $H_{p,\alpha}$ ، $B$ و $A$ را بطور محض هم جدا می‌کند هرگاه وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ بطوریکه به ازای هر $x \in A$ ، $\langle p, x\rangle \leq \alpha - \varepsilon$ همچنین برای هر $x \in B$ ، $\langle p, x\rangle \geq \alpha + \varepsilon$.

**قضیه۱.۳.۳.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ و $B$ و $A$ دو زیر مجموعه ناتهی ، محدب و مجزای $X$ باشند آن‌گاه

۱) اگر $A^\circ \neq \emptyset$ آن‌گاه وجود دارد $\alpha \in R$ و $p \in X^*$ بقسمی‌که ابرفضا $H_{p,\alpha}$ ، $B$ و $A$ را از هم جدا می‌کند.

۲) فرض کنیم $x$ یک نقطه مرزی $A$ باشد و $A^\circ \neq \emptyset$ در اینصورت ابرفضایی مانند $H$ وجود دارد بطوریکه $x \in H$ و $A$ در یک طرف $H$ واقع است .

۳) اگر $A$ بسته و $B$ فشرده باشد آن‌گاه وجود دارد $\alpha \in R$ و $p \in X^*$ بطوریکه ابرفضا $H_{p,\alpha}$ ، $B$ و $A$ را بطور محض از هم جدا می‌کند.

**اثبات:** به [۵] مراجعه کنید.

**نتیجه۱.۳.۱.** اگر $X$ یک فضای باناخ و $A, B$ دو زیر مجموعه ناتهی ، محدب و مجزای $X$ باشند در این صورت اگر $A$ بسته و $B$ فشرده باشد آن‌گاه $p \in X^*$ وجود دارد بقسمی‌که به ازای هر ثابت $y \in B$ ،

$$\sup\{\langle p, x\rangle | x \in A\} < \langle p, y\rangle$$

**اثبات:** چون $A$ بسته و $B$ فشرده است طبق قضیه قبل وجود دارد $\alpha \in R$ و $p \in X^*$ بطوریکه ابرفضا $H_{p,\alpha}$ ، $A, B$ را بطور محض از هم جدا می‌کند یعنی وجود دارد $\varepsilon > 0$ بطوریکه به ازای هر $x \in A$ خواهیم داشت

$$\langle p, x\rangle \leq \alpha - \varepsilon$$

همچنین برای هر $x \in B$ ، $\langle p, x\rangle \geq \alpha + \varepsilon$ لذا به ازای هر $x \in A$ و ثابت $y \in B$ نتیجه می‌گیریم که

$$\sup\{\langle p, x\rangle | x \in A\} < \langle p, y\rangle \quad \text{لذا } \langle p, x\rangle \leq \alpha - \varepsilon < \alpha + \varepsilon \leq \langle p, y\rangle$$

**قضیه۴.۳.۱.** اگر $D$ یک زیر مجموعه از فضای باناخ $X$ باشد آن‌گاه

۱) اگر $(\text{co } D)^{\circ} \subseteq D$ آن‌گاه $D^{\circ}$ یک مجموعه محدب است .

۲) فرض کنیم $\emptyset \neq (\text{co } D)^{\circ} \subseteq D$ آن‌گاه $\overline{D} = \overline{[(\text{co } D)^{\circ}]}$ .

۳) اگر $\{C_n\}$ دنباله ای از مجموعه های بسته و محدب باشند بطوریکه درون آن ها ناتهی باشد و برای هر $n$ داشته باشیم $C_n \subseteq C_{n+1}$ آن‌گاه $(\cup C_n)^{\circ} \subseteq \cup C_n^{\circ}$

۴) فرض کنیم $A, B \subseteq X$ بطوریکه $A$ باز باشد همچنین $\overline{A \cap B} \subseteq B$ آن گاه $A \cap \overline{B} \subseteq A \cap B$ .

۵) اگر $D^{\circ}$ ناتهی و محدب باشد آن‌گاه $D^{\circ} = (\overline{D})^{\circ}$ .

**اثبات:** به [۵] مراجعه کنید.

**قضیه۵.۳.۱.** فرض کنیم $C$ یک مجموعه محدب باشد. اگر $x \in C^{\circ}$ و $y \in C$ آن‌گاه به ازای هر $\alpha \in (0,1]$ خواهیم داشت

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in \text{int } C$$

**اثبات:** به [۱۲] مراجعه کنید.

**تعریف۵.۳.۱ .** فرض کنیم $X$ یک فضای خطی باشد. تابع $f: X \to \overline{R}$ را محدب گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0,1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

**مثال۳.۳.۱.** اگر $X$ یک فضای نرم دار باشد تابع $f: X \to R$ با ضابطه $f(x) = \|x\|$ یک تابع محدب است.