دانشگاه تربیت دبیر شهید رجائی

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی کاربردی

یک روش هم محلی گسسته برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم با هسته منفرد ضعیف

نگارش:

نادر جلیلیان

استاد راهنما: دکتر حمید صفدری

استاد مشاور: دکتر حمید مسگرانی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مهر۱۳۹۲

باسمه تعالی

تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب **نادر جلیلیان** متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف(در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

نام و نام خانوادگی: **نادر جلیلیان**
امضاء

تائیدیه هیأت داوران

تقدیم به

هر آنکس که مرا ذره ای علم آموخت.

تقدیر و تشکر

من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق

"هر کس از بندگان خداوند تشکر نکند از خداوند تشکر نکرده است"

اینک که به فضل خداوند این پایان نامه به سرانجام رسیده است، وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی دریغ اساتید و سروران گرامی که در اجرای این پایان نامه مرا یاری فرموده‌اند قدردانی کنم. به ویژه از استاد ارجمندم جانب آقای دکتر حمید صفدری به خاطر زحمات و راهنمایی‌های فراوانشان، با سمت استاد راهنما و جانب آقای دکتر حمید مسگرانی به عنوان استاد مشاور، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همچنین از اساتید بزرگوار آقایان دکتر رضا ملاپور اصل و دکتر محسن شاهرضایی که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شده‌اند، نهایت تشکر را دارم.

همواره ازخداوند متعال سلامتی و توفیق روز افزون این عزیزان را خواهانم.

چکیده

برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل فردهلم خطی با هسته منفرد ضعیف به فرم

$$u^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n_0} a_i(t)u^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{n_0} \int_0^b g_i(t,s)k_i(t,s)u^{(i)}(s)d(s) + f(t)$$

یک روش هم محلی گسسته را بررسی می‌کنیم.

ابتدا معادله انتگرال را با استفاده از تغییر متغیر بازنویسی می‌کنیم، و روش هم‌محلی را روی یک شبکه مدرج به‌کار می‌بریم که تقریب همگرایی کلی به‌دست می‌آید. سپس برای مقادیر خاصی از پارامترها یک دامنه همگرایی بهینه از روش عددی طرح شده به دست می‌آوریم. در پایان برخی از نتایج تئوری بیان شده، توسط یک مثال عددی نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: معادلات انتگرال–دیفرانسیل با هسته منفرد ضعیف، روش کالوکیشن گسسته، انتگرال ضربی، شبکه بندی مدرج، درونیابی چندجمله‌ای تکه‌ای

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

فصل ۱

جبر خطی

۱.۱ مقدمه

نظریه معادلات انتگرال از مهمترین شاخه‌های آنالیز ریاضی است و بواسطه تبدیل مسائل مقدار مرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزئی و کارایی آن در اکثر شاخه‌های کاربردی ریاضی و فیزیک و همچنین در شاخه‌های مکانیک مانند سازه‌ها، استخراج معادن ، نفت و صنایع مخابرات اهمیت ویژه ای به خود اختصاص داده است. معادلات انتگرال دیفرانسیل فردهلم در مدل سازی مسایل فیزیکی زیادی به کار می‌روند که در [۷] کاربردها و منابع زیادی از کاربردهای معادلات انتگرال و انتگرال دیفرانسیل ذکر شده است.

معادله انتگرال دیفرانسیل ولترا توسط مولفان زیادی کار شده است([۷، ۵]). اما به معادلات نوع فردهلم توجه کمتری شده است. برخی آثار در مورد معادلات انتگرال دیفرانسیل فردهلم با هسته هموار وجود دارد ([۷، ۲]). تعداد خیلی کمی‌نوشته در مورد معالات انتگرال دیفرانسیل فردهلم با هسته منفرد ضیف وجود دارد ([۱۵، ۱٦]).

در [۸] روشی برای حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل فردهلم با هسته منفرد ضعیف، به روش هم محلی با استفاده از چند جمله‌های تکه‌ای بررسی شده است. همچنین در [۹] نیز حل عددی این معادلات به روش هم محلی و با استفاده از اسپلاین‌ها بررسی شده است. در [۱۰] نیز برای حل این معادلات از روش گالرکین استفاده شده است.

تعاریف و مطالب این فصل عمدتا از مراجع [؟، ؟، ؟، ؟، ؟] آورده شده است.

۱.۱.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید K مجموعه ای از اسکالرهای حقیقی $\mathbb{R}$ یا مختلط $\mathbb{C}$ و V مجموعه ای از بردارهای غیر تهی با دو عمل جمع و ضرب اسکالر به صورت باشد:

$$\forall u\, \forall v(u, v \in V \Rightarrow u+v \in V)$$

$$\forall u\, \forall k(u \in V,\ k \in K \Rightarrow ku \in V)$$

در این صورت V را یک فضای خطی یا فضای برداری روی میدان K گوئیم هرگاه شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$۱-\ \forall u\, \forall v\, \forall w[u, v, w \in V \Rightarrow (u+v)+w = u+(v+w)]$$

$$۲-\ \exists ۰\, \forall u[u \in V; ۰ \in V \Rightarrow u + ۰ = u]$$

$$۳-\ \forall u\, \exists{-u}[u \in V; (-u) \in V \Rightarrow u+(-u) = ۰]$$

$$۴-\ \forall u\, \forall v[u, v \in V \Rightarrow u+v = v+u]$$

$$۵-\ \forall u\, \forall v\, \forall k[u, v \in V;\ k \in K \Rightarrow k(u+v) = ku+kv]$$

$$۶-\ \forall u\, \forall a\, \forall b[u \in V;\ a, b \in K \Rightarrow (a+b)u = au+bu]$$

$$۷-\ \forall u\, \forall a\, \forall b[u \in V;\ a, b \in K \Rightarrow (ab)u = a(bu)]$$

$$۸-\ \exists ۱\, \forall u[u \in V;\ ۱ \in V] \Rightarrow ۱u = u$$

مشاهده می‌گردد که چهار خاصیت اول بیانگر یک گروه آبلی با عمل جمع می‌باشد، پس یک فضای برداری خود یک گروه آبلی می‌باشد.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه بردارهای V مستقل خطی نامیده می‌شوند اگر $\sum_{i=۱}^{k} c_i v_i = ۰$ باشد، داشته باشیم $c_i = ۰$، در غیر این صورت آنها را وابسته خطی می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$ تابعی است از $\mathbb{R}^n$ به توی $\mathbb{R}$ که در خواص زیر صدق می‌کند:

$$||.||: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{۱} - \forall X[X \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \|X\| \geqslant \text{۰}]$$

$$\text{۲} - \forall X[X \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X = (\text{۰}, ..., \text{۰}) = \text{۰} \Longleftrightarrow ||X||= \text{۰})]$$

$$\text{۳} - \forall X \ \forall \lambda[(X \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}) \Longrightarrow ||\lambda X||= |\lambda|.||X||]$$

$$\text{۴} - \forall X \ \forall Y[X \in \mathbb{R}^n, Y \in \mathbb{R}^n] \Longrightarrow \|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

تعریف ٤.١.١. اگر تابعی در خاصیت دوم از خواص نرم صدق نکند، شبه نرم[۱] نامیده می‌شود.

تعریف ٥.١.١. برای بردار $X = (x_{\text{۱}}, x_{\text{۲}}, ..., x_n)^t$، نرم‌های برداری به صورت زیر تعریف می‌شوند:

۱. نرم $L_{\text{۱}}$:

$$\|X\|_{\text{۱}} = \sum_{i=\text{۱}}^{n} |x_i|$$

۲. نرم $L_{\text{۲}}$:

$$\|X\|_{\text{۲}} = (\sum_{i=\text{۱}}^{n} |x_i|^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}$$

که نرم $L_{\text{۲}}$ را نرم اقلیدسی گویند.

۳. نرم L_p :

$$\|X\|_p = (\sum_{i=\text{۱}}^{n} |x_i|^p)^{\frac{\text{۱}}{p}}$$

٤. نرم L_∞ :

$$\|X\|_\infty = \max_i |x_i|$$

لم ٦.١.١. (نامساوی کوشی-شوارتز)[۲] به ازای هر دو بردار X و Y از $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$\sum_{i=\text{۱}}^{n} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=\text{۱}}^{n} |x_i|^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} (\sum_{i=\text{۱}}^{n} |y_i|^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} = \|X\|_{\text{۲}} \|Y\|_{\text{۲}}$$

---

[۱] Semi norm

[۲] cauchy-schwarz

تعریف ۷.۱.۱. تابع $(.,.) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ با خواص زیر، یک ضرب داخلی است:

۱ − $\forall X(X \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X,X) \geq 0)$

۲ − $\forall X(X \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X = 0 \Longleftrightarrow (X,X) = 0))$

۳ − $\forall X\ \forall Y\ \forall \alpha((X,Y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}) \Longrightarrow (\alpha X, Y) = \alpha(X,Y))$

۴ − $\forall X\ \forall Y(X,Y \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X,Y) = (Y,X))$

۵ − $\forall X\ \forall Y\ \forall Z(X,Y,Z \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow (X+Y,Z) = (X,Z) + (Y,Z))$

تعریف ۸.۱.۱. برای هر ضرب داخلی، یک نرم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|X\| = (X,X)^{\frac{1}{2}}$$

تعریف ۹.۱.۱. دنباله X_n کوشی است هرگاه:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m,n \in \mathbb{N} \quad if \quad m,n > N \Longrightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$$

هر دنباله همگرا کوشی است ولی هر دنباله کوشی لزوما همگرا نیست.

تعریف ۱۰.۱.۱. فضایی که در آن هر دنباله کوشی، همگرا باشد را فضای کامل گویند. مانند فضای $\mathbb{R}^k$ و فضای فشرده[۳].

تعریف ۱۱.۱.۱. یک فضای نرم دار خطی کامل را فضای باناخ[٤] گوئیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. یک فضای ضرب داخلی کامل را فضای هیلبرت می‌نامیم. از تعریف چنین بر می‌آید که فضای ضرب داخلی V فضای هیلبرت است هر گاه یک فضای باناخ تحت نرم القایی توسط ضرب داخلی باشد.

مثال: فضای خطی $L_2[a,b]$ همراه با ضرب داخلی $<x,y>= \int_a^b x(t)y(t)dt$ یک فضای هیلبرت است.

تعریف ۱۳.۱.۱. در فضای ضرب داخلی X دو عضو x,y را بر هم عمود گوئیم و با نماد $x \perp y$ نمایش می‌دهیم هرگاه $<x,y>= 0$ برقرار باشد.

[۳] Impact

[٤] Banach

تعریف ۱۴.۱.۱. زیر مجموعه S از فضای ضرب داخلی X را متعامد گوئیم هرگاه:

$$\forall x, y \in S \quad < x, y >= ۰$$

تعریف ۱۵.۱.۱. زیر مجموعه متعامد S از فضای داخلی X را متعامد یکه گوئیم هرگاه:

$$\forall x \in S \qquad \|x\| = ۱$$

تعریف ۱۶.۱.۱. مکمل متعامد زیر مجموعهS از فضای ضرب داخلی X را با $S^{\perp}$ نمایش می‌دهیم، و عبارت است از مجموعه‌ی عضوهایی از X که بر S عمود باشد:

$$S^{\perp} = \{y \in X | y \perp S\}$$

تعریف ۱۷.۱.۱. برای $۱ \leq p < \infty$ فرض کنیم $L^p(\mathbb{R})$ عبارتست از فضای همه توابع اندازه پذیر روی $\mathbb{R}$ بطوری که :

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx)^{\frac{۱}{p}} < \infty & if \quad ۱ \leq p < \infty \\ sup_{x \in (a,b)} f(x) < \infty & if \qquad p = \infty \end{cases}$$

اگر $p = ۲$ آنگاه $L^۲(\mathbb{R})$ فضای همه توابع انتگرال پذیر مربعی با ضرب داخلی و با نرم زیر خواهد بود:

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x)\bar{g}(x) dx$$

$$\|f\|_۲^۲ =< f, f >= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^۲ dx$$

تعریف ۱۸.۱.۱. $C[a, b]$ عبارتست از فضای باناخ تمام توابع پیوسته $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ با نرم زیر:

$$\|x\| = \|x\|_{C[a,b]} = max_{t \in [a,b]} |x(t)| \; ; \quad x \in C[a, b]$$

تعریف ۱۹.۱.۱. $C^۱[a, b]$ عبارت است از فضای باناخ توابع مشتق پذیر پیوسته $x : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ با نرم زیر:

$$\|x\|_{C^۱[a,b]} = \|x\|_{C[a,b]} + \|x'\|_{C[a,b]} \; ; \quad x \in C^۱[a, b]$$

تعریف ۲۰.۱.۱. $L^\infty(a,b)$ عبارت است از مجموعه توابع اندازه پذیر $x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ به طوری که :

$$inf_{\Omega\subset[a,b]:\mu(\Omega)=0} sup_{t\in[a,b]\Omega}|x(t)| < \infty$$

به طوری که $\mu(\Omega)$ اندازه لبسگو[۵] از مجموعه Ω باشد.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای باناخ هستند. $\mathcal{L}(X,Y)$ عبات است از فضای باناخ همه عملگرهای پیوسته خطی $A : X \longrightarrow Y$ با نرم زیر :

$$\|A\| = \|A\|_{\mathcal{L}(x,y)} = sup_{x\in X,\|x|\leqslant 1}\|Ax| = sup_{x\in X,x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|};\ (A\in\mathcal{L}(X,Y))$$

قضیه ۲۲.۱.۱. فرض کنید X, Y, Z فضاهای نرم دار باشند و $A : X \longrightarrow Y$ و $B : Y \longrightarrow Z$ عملگرهای خطی کراندار باشند. آنگاه ضرب $BA : X \longrightarrow Z$ فشرده است اگر یکی از دو عملگر A یا B فشرده باشد.

قضیه ۲۳.۱.۱. (متناوب فردهلم)[۶] فرض کنید X یک فضای باناخ باشد، و $A\in\mathcal{L}(X,Y)$ یک عملگر فشرده باشد. آنگاه معادله $x = Ax + g$ که $g \in X$ یک جواب یکتای $x \in X$ دارد، اگر و فقط اگر معادله همگن $z = Az$ فقط دارای جواب بدیهی $z = 0$ باشد. در چنین حالتی، عملگر $I - A$ دارای معکوس کراندار $(I-A)^{-1} \in \mathcal{L}(X,X)$ خواهد بود.

تعریف ۲۴.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو زیر مجموعه از فضای برداری باشند، منظور از یک نگاشت[۷] یعنی به هر عضو X عضوی یکتا از Y نسبت دهیم. به چنین نگاشتی یک عملگر[۸] می‌گویند، و به صورت معادله عملگری $\tau x = y$ نوشته می‌شود که در آن τ یک نگاشت از $x \in X$ به $y \in Y$ می‌باشد. به مجموعه اعضایی که عملگر τ روی آنها تعریف شده است، دامنه عملگر گفته می‌شود و با $D(\tau)$ نشان می‌دهیم.

---

[۵] Lebesgue

[۶] Fredholm alternative

[۷] Mapping

[۸] Operator

تعریف ۲۵.۱.۱. عملگر τ را خطی گوییم هرگاه دامنه اش یک فضای خطی باشد و برای هر $x, y \in D(\tau)$ و $\alpha, \beta \in F$ داشته باشیم:

$$\tau(\alpha x + \beta y) = \alpha\tau x + \beta\tau y$$

تعریف ۲۶.۱.۱. عملگر τ را یک به گوییم اگر:

$$\tau x_۱ = \tau x_۲ \Longrightarrow x_۱ = x_۲$$

تعریف ۲۷.۱.۱. عملگر τ را پوشا گوییم هرگاه :

$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \Longrightarrow y = \tau x$$

قضیه ۲۸.۱.۱. اگر $\tau : X \longrightarrow Y$ یک به یک و پوشا باشد، آنگاه τ معکوس پذیر است.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای خطی نرم دار باشند. عملگر خطی $\tau : X \longrightarrow Y$ را کراندار می‌گوییم اگر $c < \infty$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ داشته باشیم:

$$\|\tau x_۱ - \tau x_۲\| \leqslant c\|x_۱ - x_۲\|$$

به این رابطه، پیوستگی لیپ شوتس[۹] می‌گویند. و به مقدار $\mu(\tau) = inf\ c$ کران عملگر τ روی X می‌گویند.

تعریف ۳۰.۱.۱. (تابع هموار) تابع $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ را هموار نامند اگر مشتق‌های جزیی آن از هر مرتبه‌ای موجود و پیوسته باشند.

تعریف ۳۱.۱.۱. عملگر τ در x را پیوسته گوییم اگر برای هر دنباله‌ی x_n همگرا به x داشته باشیم:

$$lim_{n \longrightarrow \infty}\|\tau x_n - \tau x\| = ۰$$

قضیه ۳۲.۱.۱. عملگر خطی τ پیوسته است اگر و فقط اگر کراندار باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. فرض کنید X، Y، U و V فضاهای باناخ باشند. یک عملگر خطی $T : X \to Y$ فشرده نامیده می‌شود اگر زیر مجموعه کراندار X را روی زیر مجموعه نسبتا کراندار Y بنگارد. به

[۹] Lipschutz

طور معادل، $T: X \to Y$ فشرده است اگر برای هر دنباله کراندار $(u_n) \subset X$، دنباله (Tu_n) شامل یک زیر دنباله باشد که در Y همگراست. عملگرهای فشرده خطی کراندار هستند. همچنین برای عملگرهای فشرده خطی $T_۱, T_۲ : X \to Y$ و $\alpha_۱, \alpha_۲ \in K$، عملگر $\alpha_۱ T_۱ + \alpha_۲ T_۲ : X \to Y$ فشرده است.

همچنین اگر $T : X \to Y$ یک عملگر فشرده خطی، و $A : U \to X$ و $B : Y \to V$ عملگرهای کراندار خطی باشند، آنگاه عملگرهای $T : X \to Y$ و $BT : X$ فشرده هستند.

تعریف ۳٤.۱.۱. فرض کنید x_n یک دنباله از اعداد حقیقی باشد که به حد $\bar{x}$ میل کند. گوییم نرخ همگرایی حداقل خطی است اگر عدد ثابت $c < ۱$ و عدد صحیح N وجود داشته باشند به طوری که:

$$|x_{n+۱} - \bar{x}| \leqslant c|x_n - \bar{x}| \;\;,\;\; (n \geqslant N)$$

تعریف ۳۵.۱.۱. نرخ همگرایی حداقل فوق خطی است اگر یک دنباله λ_n همگرا به صفر و یک عدد صحیح N وجود داشته باشند به طوری که :

$$|x_{n+۱} - \bar{x}| \leqslant \lambda_n|x_n - \bar{x}| \;\;,\;\; (n \geqslant N)$$

تعریف ۳٦.۱.۱. نرخ یا سرعت همگرایی حداقل از مرتبه ۲ است اگریک ثابت c (نه لزوما کمتر از یک) و یک عدد صحیح N وجود داشته باشند به طوری که:

$$|x_{n+۱} - \bar{x}| \leqslant c|x_n - \bar{x}|^۲ \;\;,\;\; (n \geqslant N)$$

حال به طور کلی می‌توان مرتبه همگرایی را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۳۷.۱.۱. می‌گوییم نرخ یا سرعت همگرایی حداقل از مرتبه p است اگر اعداد ثابت و مثبت p و c و عدد صحیح N وجود داشته باشند، به طوری که:

$$|x_{n+۱} - \bar{x}| \leqslant c|x_n - \bar{x}|^p \;\;,\;\; (n \geqslant N)$$

تعریف ۳۸.۱.۱. (اوی بزرگ(O)): اگر $f(h)$ و $g(h)$ دو تابع از h باشند، و $g(h) \neq ۰$ و داشته باشیم:

$$lim_{h \to ۰} \frac{f(h)}{g(h)} = c \neq ۰$$

در این صورت گوییم $f(h)=O(g(h))$

در حالت خاصی که $g(h)=h^p$، که در آن p عدد حقیقی مثبتی است، داریم:

$$f(h)=O(h^p)$$

هرچه p بزرگتر باشد $f(h)$ سریعتر به صفر میل می‌کند.

تعریف ۳۹.۱.۱. (اوی کوچک(o)): اگر $f(h)$ و $g(h)$ دو تابع از h باشند، و همواره $g(h)\neq ۰$ و داشته باشیم:

$$lim_{h\to ۰}\frac{f(h)}{g(h)}=۰$$

در این صورت گوییم $f(h)=o(g(h))$ و اگر $g(h)=h^p$ آن گاه: $f(h)=o(h^p)$ به عبارت دیگر، $f(h)$ سریعتر از h^p به صفر میل می‌کند.

۲.۱.۱ فضای وزن دار[۱۰] $C^{m,\mathrm{v}}(۰,۱)$

برای $m\geqslant ۱$ و $\mathrm{v}<۱$، فضای توابع $C^{m,\mathrm{v}}(۰,۱)$ عبارت است از توابع $f\in C^m(۰,۱)$، که در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$|f^{(j)}(x)|\leqslant c_f\begin{cases} ۱ & ;\ j+\mathrm{v}-۱<۰ \\ ۱+|log\ \rho(x)|; & j+\mathrm{v}-۱=۰\ \ ;\ ۰<x<۱;\ j=۰,...,m \\ \rho(x)^{-j-\mathrm{v}+۱} & ;\ j+\mathrm{v}-۱>۰ \end{cases}$$

که در آن $\rho(x)=min\{x,۱-x\}$ فاصله $x\in(۰,۱)$ تا مرز بازه $(۰,۱)$ است. حال توابع وزن[۱۱] زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\omega_\lambda(x)=\begin{cases} ۱ & ;\ \lambda<۰ \\ ۱/(۱+|log\rho(x)|); & \lambda=۰\ ;\ ۰<x<۱\ ;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ \rho(x)^\lambda & ;\ \lambda>۰ \end{cases}$$

که از نرم زیر استفاده می‌کنند:

---
[۱۰] Weighted Space

[۱۱] weight functions

$$\|f\|_{C^{m,v}(0,1)} = \sum_{j=0}^{m} sup_{0<x<1}\omega_{j+v-1}(x)|f^{(j)}(x)|$$

و $C^{m,v}(0,1)$ یک فضای باناخ است.

۲.۱ شبکه بندی‌ها

برای یک $N \in \mathbb{N}$ داده شده، فرض می‌کنیم

$$\Pi_N = \{t_0, t_1, ..., t_N : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = T\} \qquad (۱.۱)$$

یک افراز[۱۲](شبکه‌بندی) از بازه $[0,T]$ (برای سادگی در نماد گذاری از اندیس N در $t_n = t_n^{(N)}$ که نشان دهنده تعلق نقاط گره به N است، صرف نظر کرده ایم) باشد.

تعریف ۱.۲.۱. یک شبکه را منظم[۱۳] نامیم اگر وقتی که $N \longrightarrow \infty$ آن گاه:

$$max_{n=1,...,N}(t_n - t_{n-1}) \longrightarrow 0 \qquad (۲.۱)$$

یک دنباله از شبکه‌ها برای $[0,T]$ شبه یکنواخت[۱٤] نامیده می‌شود اگر یک ثابت Θ مستقل از N وجود داشته باشد به طوری که:

$$max_{n=1,...,N}(t_n - t_{n-1})/min_{n=1,...,N}(t_n - t_{n-1}) \leqslant \Theta\ ;\ n \in \mathbb{N} \qquad (۳.۱)$$

از نماد $\Pi_N = \Pi_{N,\Theta}$ برای شبکه شبه یکنواخت استفاده می‌کنیم. اگر $\Theta = 1$ آنگاه $\Pi_{N,1}$ یک شبکه یکنواخت است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر نقاط گره Π_N توسط رابطه زیر داده شوند:

$$t_n = T(\frac{n}{N})^r;\quad r \geqslant 1;\ \ n = 0, 1, ..., N \qquad (٤.۱)$$

آنگاه $\Pi_N = \Pi_N^r$ یک شبکه مدرج[۱۵] نامیده می‌شود.

---

[۱۲]Grid

[۱۳]-Regular

[۱٤]Quasi-uniform

[۱۵]Graded grid