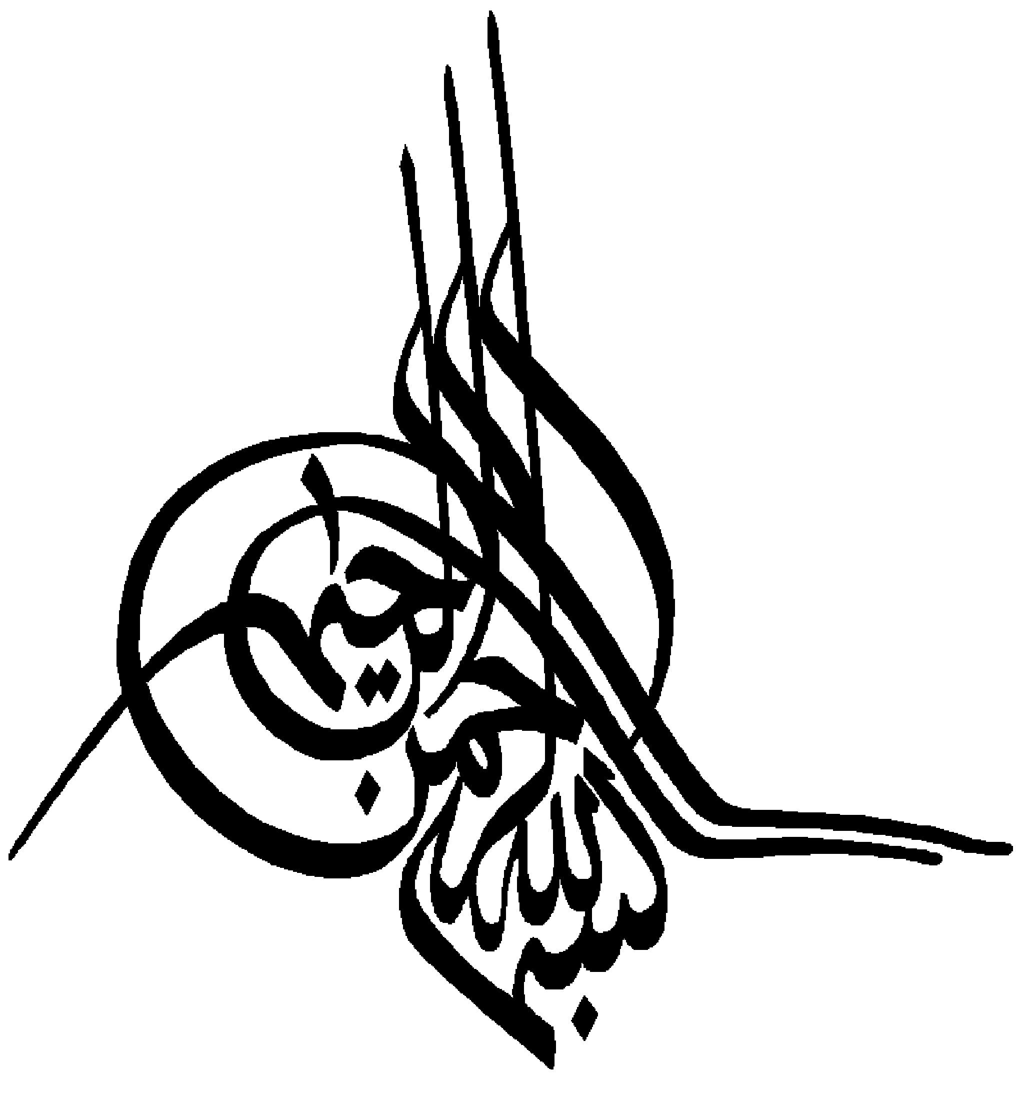
بسم الله الرحمن الرحيم

به نام خدا

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

مدول های کوهمولوژی موضعی مینی ماکس وانعکاسی

از:

سیده معصومه موسوی حسن کیاده

استاد راهنما:

دکتراحمد عباسی

تیر۱۳۸۹

تقدیم به

دوستداران علم و دانش

و

مادر و همسر عزیزم

تقدیر و تشکر

سپاس خداوند منان را که الطاف بی دریغش همواره شامل حال من در تمام مراحل سخت و دشوار زندگی بوده است.

بر خود واجب می دانم که از زحمات استاد ارجمند و گرامی، جناب آقای دکتر عباسی، کمال تشکر را داشته باشم که با راهنمایی های ارزنده ی خود، مرا در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند، همچنین از خانواده عزیزم، بخصوص خواهر زاده های دوست داشتنیم، که در نگارش این پایان نامه مرا همراهی نمودند، کمال سپاسگزاری را دارم.

فهرست

عنوان **صفحه**

چکیده.

مدول کوهمولوژی موضعی مینی ماکس وانعکاسی.
سیده معصومه موسوی حسن کیاده.

فرض کنیم R حلقه ای جابجایی، نوتری و $\underline{a}$ ایده الی در R باشد. در این پایان نامه ابتدا برخی از خصوصیات مدول های انعکاسی را در حالتی که $(R, \underline{m})$، حلقه ای موضعی است، مورد بحث قرار می دهیم. همچنین در این حالت برای R ـ مدول با تولید متناهی M، به طوری که $Supp \frac{M}{\underline{a}M} \not\subseteq \{\underline{m}\}$ و $s = f - depth_{\underline{a}} M$ نشان می دهیم که به ازای $i < s$ ، $H^i_{\underline{a}}(M)$ آرتینی است، اما $H^s_{\underline{a}}(M)$، آ رتینی نیست. در ادامه در حالتی که R حلقه ای جابجایی، نوتری و دلخواه باشد، نتایجی در مورد مدول های مینی ماکس ارائه و پس از آن نشان می دهیم، مدول $Hom_R(\frac{R}{\underline{a}}, H^s_{\underline{a}}(M))$، آرتینی نیست، اما مینی ماکس است.

کلید واژه ها. مدول کوهمولوژی موضعی- مدول مینی ماکس- مدول انعکاسی- دنباله منظم- دنباله فیلتر منظم.

Abstract.

Minimax and Reflexive Local Cohomology Modules.

Mousavi Hasankiadeh Seedeh Masoumeh .

Let R be a commutative noetherian ring and $\underline{a}$ be an ideal of R. In this notes first we will disscuse on some propositions of reflexive Modules, in case that *(R , $\underline{m}$)* is local ring. we also show for a finite $R-$module, M , with $Supp\,\frac{M}{\underline{a}M} \not\subseteq \{\underline{m}\}$ and for $s = f-depth_{\underline{a}}M$, $H_{\underline{a}}^{i}(M)$ is Artinian for $i < s$ but $H_{\underline{a}}^{s}(M)$ is not artinian. In case that R is an arbitrary commutative and noetherian ring , we give some Informationes about Minimax modules and we will show that, $Hom_R(R/\underline{a}, H_{\underline{a}}^{s}(M))$ is not Artinian, but it is Minimax.

Key words. local cohomology module, Minimax module, Reflexive module, Regular sequence, Filter Regular sequence .

درسالهای اخیرهندسه جبری مورد توجه بسیاری قرار گرفته، و بالطبع مدولهای کوهمولوژی که یکی ازساختارهای جبراست درحوزه هندسه جبری کاربرد فراوانی یافته و رشد چشمگیری داشته است. به طوری که توجه بسیاری از ریاضیدانان را به خود معطوف کرده است. درزمینه کوهمولوژی موضعی ریاضیدانان زیادی از قبیل ایناخس، ملکرسون، شارپ و... تحقیقاتی انجام داده و نتایج ارزشمندی در این زمینه ارائه نموده اند. آنچه دراین پایان نامه به آن پرداخته می شود، معرفی نسخه جدیدی از مدولهای کوهمولوژی موضعی و آرتینی و بررسی شرایطی است که این مدو لها تحت آن شرایط مینی ماکس، انعکاسی می گردند. ساختار اصلی این پایان نامه، بر اساس مقاله زیر می باشد، که در فصل آخر این پایان نامه، بطور مفصل راجع به آن توضیح داده شده است.

[8] Borna.k,Sahandi.P,Yassemi.s, A new version of Artinian local cohomologhy modules, Canad. Math. Bull.vol.50(4). 2007,pp,508-602.

در فصل اول، مقدمات و مطالب پیشنیاز را بیان می کنیم و از آنجا که این قضایا در کتابها و مقالات مختلف به اثبات رسیده اند از اثبات آنها صرف نظر می کنیم و به کتابهای مربوطه ارجاع می دهیم.

در فصل دوم، برخی از خصوصیات مدولهای انعکاسی را در حالتی که R حلقه ای موضعی است مورد بحث قرار می دهیم و برخی از قضایای مربوط به آن را اثبات می کنیم. با استفاده از برهان بسیاری از قضایا در این فصل به راحتی می توان همان قضایا را برای حالتی که R حلقه ای دلخواه (نه لزوماً موضعی) نتیجه گرفت .

در فصل سوم، مدولهای کوهمولوژی موضعی را در زمانی که آرتینی هستند مورد بررسی قرار داده و تعاریف و قضایای مربوط به آن را با استفاده از مرجع [۸] بیان و اثبات می نماییم.

در فصل چهارم که مهمترین فصل این پایان نامه است، ابتدا خصوصیاتی از دنباله های منظم و فیلتر منظم را بیان کرده و در بخش دوم ابتدا مدول های مینی ماکس را توضیح داده و قضایایی مربوط به آن را اثبات می کنیم و پس از آن مدول های کوهمولوژی موضعی مینی ماکس و انعکاسی را بررسی می کنیم.

فصل اول

مقدمات و مطالب پیشنیاز

۱-۱ مطالب مقدماتی از جبرپیشرفته

در سراسر این پایان نامه، R حلقه ای جابجایی و یکدار می‌باشد.

قضیه ۱-۱-۱ (لم پنج کوتاه).

فرض کنیم Rحلقه بوده A, B, C و A', B', C'، $R-$ مدول باشند و دیاگرام زیر یک دیاگرام جابجایی با سطرهای دقیق باشد

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \to & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \to & \circ \\ & & \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \delta\downarrow & & \\ \circ & \to & A' & \xrightarrow[f']{} & B' & \xrightarrow[g']{} & C' & \to & \circ \end{array}$$

در این صورت،

۱) اگر α, δتکریختی باشند، آنگاه βنیز تکریختی است.

۲) اگر α, δبرو ریختی باشند، آنگاه βنیز برو ریختی است.

۳) اگر α, δیکریختی باشند، آنگاه β نیز یکریختی است.

برهان. (ر.ک[1,5.4]).

قضیه ۱-۱-۲(Adjoint Isomorphism) .

فرض کنیم R, Sدو حلقه (نه لزوما جابجائی) باشند**.** دراین صورت برای مدولهای $_R A$ ، $_S B_R$ و $_S C$، داریم،

$$Hom_S(B \otimes_R A, C) \cong Hom_R(A, Hom_S(B, C)).$$

به طور مشابه برای $R-$ مدولهای C_S ، $_R B_S$ و A_R، داریم،

$$Hom_S(A \otimes_R B, C) \cong Hom_R(A, Hom_S(B, C)).$$

برهان. (ر.**ک** [21, 2.11]).

قضیه ۱-۱-۳ (اجتناب از ایده‌ال‌های اول).

فرض کنیم که $n \geq 2$ و $p_1, p_2, \ldots p_n$ ، ایده‌ال‌هایی از حلقه R باشند که حداکثر دو تا ازآنها اول نباشد. فرض کنیم S زیر گروهی جمعی از R باشد که نسبت به ضرب بسته است. (مثلا ممکن است ایده‌ال R یا زیر حلقه R باشد) و فرض کنیم $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} p_i$. در این صورت به ازای i ای که $1 \leq i \leq n$، داریم، $S \subseteq p_i$.

برهان. (ر.ک [22 3.61]).

تعریف ۱-۱-۴. فرض کنیم R یک حلقه باشد. $S \subseteq R$ ، S رامجموعه بسته ضربی نامند، هرگاه،

الف) $1_R \in S$،

ب) به ازای هر $r,s \in S$، داشته باشیم $rs \in S$.

مثال ۱-۱-۵. به ازای هر $p \in Spec(R)$، مجموعه $R-p=\{x \in R \mid x \notin p\}$، بسته ضربی است.

تعریف ۱-۱-۶. مجموعه همه ایده‌ال های اول R را که شامل I باشند، را با نماد $V(I)$ یا $Var(I)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱-۱-۷. فرض کنیم I یک ایده‌ال R باشد. تعریف می‌کنیم،

$$\sqrt{I}=\{x \in R ; \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}.$$

بنا بر تعریف واضح است که، $I \subseteq \sqrt{I}$.

قضیه ۱-۱-۸. به ازای هر ایده‌ال I از R داریم، $\sqrt{I}=\bigcap_{p \in Var(I)} P$.

برهان. (ر.ک [22, 3.48]).

قضیه ۱-۱-۹. فرض کنیم R حلقه ای نوتری و I ایده الی در حلقه Rباشد. در این صورت عدد صحیح مثبتی مانند m موجود است، بطوریکه $(\sqrt{I})^m \subseteq I$.

برهان. (ر.ک[20,3.3.9]).

تعریف ۱-۱-۱۰. فرض کنیم M یک $R-$ مدول باشد. دراین صورت $r \in R$ را یک مقسوم علیه صفر در R نامیم، هر گاه $0 \neq m \in M$وجود داشته باشد که $rm=0$.

مجموعه مقسوم علیه‌های صفر M را با $zd_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱-۱-۱۱ (لم ناکایاما). فرض کنید I ایده الی سره از حلقه R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

i) I در هر ایده ال ماکسیمال R واقع است.

ii) برای هر $r \in I$، $1-r$ در R یکال است.

iii) به ازای هر $R-$ مدول با تولید متناهی M اگر $M=IM$، باشد، آنگاه $M=0$.

iv) اگر M یک $R-$ مدول با تولید متناهی و N زیر مدولی از آن باشد بطوری که $M=IM+N$، آنگاه $M=N$.

برهان. (ر.ک [1, 5.4]).

۱-۲ شرایط زنجیری

قضیه ۱-۲-۱. $R-$مدول M نوتری است اگر، و فقط اگر، هر زیر مدول M با تولید متناهی باشد.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.3]).

قضیه ۱-۲-۲. حلقه R، نوتری است اگر، و فقط اگر، هر ایده‌ال آن با تولید متناهی باشد.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.5]).

قضیه ۱-۲-۳. فرض کنیم $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ دنباله دقیق از $R-$ مدول‌ها باشد. در این صورت، M نوتری (آرتینی) است اگر، و فقط اگر، M'' و M' نوتری (آرتینی) باشد.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.7]).

قضیه ۱-۲-۴. جمع مستقیم متناهی از $R-$ مدول‌های نوتری، نوتری است.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.9]).

قضیه ۱-۲-۵. هر $R-$مدول با تولید متناهی روی حلقه نوتری (آرتینی)، نوتری (آرتینی) است. به ویژه اگر R حلقه ای نوتری باشد، آنگاه $R-$مدول M نوتری است اگر، و فقط اگر، M با تولید متناهی باشد.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.10]).

قضیه ۱-۲-۶. حلقه R نوتری است، اگر و فقط اگر، هر زیر مدول یک مدول با تولید متناهی، با تولید متناهی باشد.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.11]).

تعریف ۱-۲-۷. فرض کنید M یک $R-$ مدول غیر صفر باشد. در این صورت M را ساده گوییم، هر گاه M هیچ زیر مدولی غیر از خودش و صفر نداشته باشد.

تعریف ۱-۲-۸. یک زنجیر از زیر مدول‌های M به صورت $M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_n = 0$، را یک زنجیر اشباع شده از M گوییم، هر گاه برای هر i، به طوری که $0 \leq i < n$، $\frac{M_i}{M_{i+1}}$، ساده باشد. n را طول این زنجیر اشباع گوییم و آن را با نماد $L(M)$، نشان می‌دهیم.

نکته ۱-۲-۹. طبق مطالب بیان شده در صفحه ۱۲ از مرجع [۱۶] ، اگر M یک $R-$ مدول ساده و مخالف صفر باشد، آنگاه ایده ال ماکزیمالی مانند m در R موجود است، به طوری که $M \cong \frac{R}{m}$.

قضیه ۱-۲-۱۰. R - مدول M ، دارای طول متناهی است اگر، و فقط اگر، M آرتینی و نوتری باشد.

برهان. (ر.ک [12, 2.3.17]).

نکته ۱-۲-۱۱. فرض کنیم که $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ یک دنباله دقیق از $R-$ مدول‌ها باشد. در این صورت

$$L(M) = L(M') + L(M'')$$

برهان. (ر.ک[5,6.9]).

۱-۳ حلقه و مدول کسرها

تعریف ۱-۳-۱. فرض کنیم که $f: M \to N$ یک همریختی R- مدول‌ها باشد و $S \subseteq R$ بسته ضربی باشد. تعریف می‌کنیم،

$$S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$$

به طوری که به ازای هر $m \in M$ و هر $s \in S$، $S^{-1}f\,(\frac{m}{s}) = \frac{f\,(m)}{s}$. در این صورت، $S^{-1}f$ یک $S^{-1}R$ همریختی است.

قضیه ۱-۳-۲. فرض کنیم L, M, N مدول‌هایی روی حلقه R, S زیر مجموعه بسته ضربی و $f, f' : L \to M$ و $g: M \to N$، R-همریختی باشند. در این صورت،

۱) $S^{-1}(f+f') = S^{-1}f + S^{-1}f'$.

۲) $S^{-1}(gof) = (S^{-1}g)o(S^{-1}f)$.

۳) $S^{-1}(Id_M) = Id_{S^{-1}M}$، که در آن Id_M، همریختی همانی M است.

۴) $S^{-1}(\frac{M}{N}) \cong \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$.

۵) اگر f یکریختی باشد، آنگاه $S^{-1}f$ نیز یکریختی است.

برهان. (ر.ک [22, 8.9]).

قضیه ۱-۳-۳. فرض کنیم دنباله $L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$، دنباله‌ای دقیق باشد. در این صورت، دنباله $S^{-1}L \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}N$ نیز دقیق است.

برهان. (ر.ک [22, 9.9]).

تعریف ۱-۳-۴. فرض کنیم M یک R- مدول باشد. در این صورت، مجموعه $Supp(M) = \{p \in Spec(R) \mid M_p \neq \circ\}$، را تکیه‌گاه M روی R می‌گوییم. از این رو، $p \in Supp(M)$ اگر، و تنها اگر، $\circ \neq m \in M$، موجود باشد که داشته باشیم $(\circ :_R m) \subseteq p$.

تعریف ۱-۳-۵. فرض می‌کنیم R حلقه‌ای نوتری و M یک R- مدول باشد. در این صورت،

$$Ass\,(M) = \{p \in spec\,(R) \mid \exists \circ \neq m \in M ; p = (\circ \underset{R}{:} m)\}.$$

رامجموعه ایده‌ال‌های اول وابسته به M می‌گوییم.

قضیه ۱-۳-۶. فرض کنیم R حلقه ای نوتری باشد. در این صورت، $M \neq \circ$ اگر، و فقط اگر، $Ass(M) \neq \phi$.

برهان : (ر.ک[20,1.3.3]).

قضیه۱-۳-۷. فرض کنیم دنباله $\circ \to M' \to M \to M'' \to \circ$، دنباله ای دقیق باشد. در این صورت، $Ass(M) \subseteq Ass(M') \bigcup Ass(M'')$.

برهان: (ر.ک[20,1.3.7]).

قضیه ۱-۳-۸. اگر R یک حلقه نوتری و M یک $R-$ مدول باشد، آنگاه $zd(M) = \bigcup_{p \in Ass(M)} P$.

برهان. (ر.ک [20, 9.36]).

قضیه ۱-۳-۹. اگر M یک $R-$ مدول نوتری باشد، آنگاه $Ass(M)$، یک مجموعه متناهی است.

برهان. (ر.ک [12, 2.4.9]).

قضیه ۱-۳-۱۰. فرض کنیم M یک $R-$مدول و S یک زیر مجموعه بسته ضربی باشد. در این صورت،

$$S^{-1}R \otimes M \cong S^{-1}M$$

برهان. (ر.ک [12, 2.2.4]).

قضیه ۱-۳-۱۱. فرض کنید M یک $R-$مدول باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند:

i) $M = \circ$.

ii) $M_p = \circ$ برای هر ایده‌ال اول P از R.

iii) $M_{\underline{m}} = \circ$ برای هر ایده‌ال ماکسیمال $\underline{m}$ از R.

برهان. (ر.ک [5,3.8]).

نکته ۱-۳-۱۲. فرض کنید M ، $R-$ مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

$$Supp(M) = V(Ann(M)).$$

(که در آن $Ann(M) = (\circ :_R M)$)

برهان. (ر.ک. (تمرین v-۱۹ صفحه ۴۶ از [۵])).

نکته۱-۳-۱۳. فرض کنیم I ایده الی از حلقه R باشد. در این صورت

$$V(I) = Supp(\frac{R}{I}).$$

برهان . . (ر.ک. تمرین ii -۱۹ صفحه۴۶ از [۵]).

تعریف ۱-۳-۱۴. فرض کنید R یک حلقه باشد. بعد حلقه R به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\dim R = Sup\{n \mid \exists P_\circ \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n ; P_i \in Spec(R)\}.$$

و برای R– مدول M، بعد مدول را به صورت زیر تعریف می شود،

$$\dim M = Sup\{n \mid \exists P_\circ \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n ; P_i \in Supp(M)\}.$$

قضیه ۱-۳-۱۵. فرض کنیم M یک R–مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت داریم

$$\dim M = \dim(\frac{R}{Ann(M)}).$$

برهان. (ر.ک[12,2.4.15]).

نکته ۱-۳-۱۶. فرض کنید که R حلقه‌ای موضعی و نوتری با ایده‌ال ماکسیمال $\underline{m}$ و M یک R–مدول مخالف صفر و با تولید متناهی باشد، همین طور فرض کنیم r عضو M- منظم (عضوغیرمقسوم علیه صفر M) باشد

$$\dim(\frac{M}{rM}) = \dim M - 1.$$

برهان. حالت خاصی از تمرین ۱۶.۱، در صفحه ۱۳۲، مرجع[۱۶] است.

قضیه ۱-۳-۱۷. فرض کنید M یک R– مدول باتولید متناهی باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند:

i) M دارای طول متناهی است،

ii) $\dim(M) = \circ$

iii) $Ass(M) \subseteq Max(R)$

iv) $Supp(M) \subseteq Max(R)$، (که در آن $Max(R)$ مجموعه همه ایده الهای ماکسیمال حلقه R است).

برهان. (ر.ک[20, 1.6.9]).

قضیه ۱-۳-۱۸. فرض کنید R حلقه ای نوتری و M یک R– مدول با تولید متناهی به طوریکه $L(M) < \infty$ باشد. در این صورت $Ass(M) = Supp(M)$.

برهان. (**ر.ک**[20, 1.6.10]).

قضیه ۱-۳-۱۹. فرض کنیم R حلقه ای نوتری و M یک R – مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت به ازای هر ایده ال اول $p \in Supp(M)$، R – همریختی غیر صفر $\mu : M \to \frac{R}{P}$ وجود دارد.

برهان. چون M با تولید متناهی است و $p \in Supp(M)$، پس $M_p \neq 0$ و بنابر لم ناکایاما $\frac{M_p}{pM_p} \neq \circ$. فرض کنیم $\frac{R_p}{pR_p}$، میدان کسرهای حوزه صحیح $\frac{R}{p}$، باشد. با توجه به اینکه $\frac{M_p}{pM_p}$، یک فضای برداری روی میدان $\frac{R_p}{pR_p}$، است و همچنین با توجه به اینکه $\frac{M_p}{pM_p} \neq \circ$، نگاشت غیرصفر $h: \frac{M_p}{pM_p} \longrightarrow \frac{Rp}{pRp}$، وجود دارد. فرض کنیم $(x_i)_{i=1}^n$ مولدهای M باشند و $\overline{x_i}$ تصویر x_i در $\frac{R}{p}$ - مدول $\frac{M_p}{pM_p}$، باشد. با توجه به اینکه میدان کسرهای حوزه صحیح $\frac{R}{p}$، همان پوشش انژکتیو $\frac{R}{p}$، است بنابر این $\frac{R_p}{pR_p}$، توسیع اساسی $\frac{R}{p}$، است. همچنین به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، داریم $h(\overline{x_i}) \in \frac{R_p}{pR_p}$. بنابراین به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $\alpha_i \in \frac{R}{p}$، وجود دارد به طوری که $\alpha_i h(\overline{x_i}) \in \frac{R}{p}$. از طرفی M با تولید متناهی است پس $\alpha \in \frac{R}{p}$، موجود است به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $\alpha h(\overline{x_i}) \in \frac{R}{p}$. پس تابع مرکب غیرصفر زیر وجود دارد

$$\mu : M \to M_p \to \frac{M_p}{pM_p} \xrightarrow{g} \frac{R}{p}.$$

که در آن $g = \alpha h$ و این اثبات را کامل می سازد.

قضیه ۱-۳-۲۰.

فرض کنیم R حلقه ای نوتری M یک $R-$مدول با تولید متناهی و N یک $R-$مدول باشد. در این صورت

$$Ass(Hom_R(M,N)) = Ass(N) \cap Supp(M).$$

برهان. می دانیم که M تصویر همریخت یک مدول آزاد با رتبه متناهی است، یعنی بروریختی زیر وجود دارد،

$$\phi : F \cong R^n \to M.$$

با اثر دادن فانکتور پادورد و دقیق چپ $Hom(\ -, N)$، بروریختی بالا به تکریختی زیر تبدیل می شود

$$\circ \to Hom(M,N) \to Hom(R^n, N).$$

از طرفی

$$Hom(R^n, N) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} Hom(R,N) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} N \cong N^n.$$

بنابراین

$$Ass(Hom(M,N)) \subseteq Ass(Hom(R^n,N)) = Ass(N^n) \subseteq Ass(N).$$

یعنی $Ass(Hom(M,N)) \subseteq Ass(N)$، از طرفی داریم

$$Ass(Hom(M,N)) \subseteq Supp(Hom(M,N)).$$

لذا به ازای هر $p \in Ass(Hom(M,N))$. خواهیم داشت، $p \in Supp(Hom(M,N))$. در این صورت $Hom_{R_p}(M_p,N_p) \neq 0$ یعنی $M_p \neq 0$ لذا $p \in Supp(M)$. از این رو،

$$Ass(Hom(M,N)) \subseteq Ass(N) \cap Supp(M).$$

برعکس، فرض می کنیم $p \in Ass(N) \cap Supp(M)$. بنابراین طبق لم (۱-۳-۱۹) همریختی، $\mu : M \to \frac{R}{p}$ وجود دارد. تکریختی $\lambda : \frac{R}{p} \to N$ ، نیز وجود دارد، به طوری که $\lambda o\mu : M \to N$، عضو غیر صفری از $Hom(M,N)$، می باشد. ثابت می کنیم $p = Ann(\lambda o\mu)$. فرض کنیم $x \in p$. در این صورت $x\lambda = 0$ یعنی به ازای $m \in M$، داریم، $x\lambda(\mu(m)) = 0$، لذا $x \in Ann(\lambda o\mu)$. اینک فرض می کنیم $x \in Ann(\lambda o\mu)$، یعنی به ازای هر $m \in M$، $x\lambda o\mu(m) = 0$.

پس،

$$\lambda o\mu(xm) = 0 \Rightarrow \mu(xm) = 0 \Rightarrow x\mu(m) = 0.$$

از آنجا که μ یک همریختی نا صفر است، لذا $0 \neq m \in M$ موجود است بطوری که $\mu(m) \neq 0$، بنابر این $r \in R - p$ وجود دارد که $\mu(m) = r + p$.

پس،

$$x(r+p) = 0 \Rightarrow xr \in p \Rightarrow x \in p.$$

۴-۱ رسته (کاتاگوری) و فانکتور

تعاریف اولیه از رسته و فانکتور در مرجع [۱] آمده است. ما در این فصل به ارائه چند تعریف و قضیه مورد نیاز دراین پایان نامه اکتفا می کنیم.

تعریف ۱-۴-۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. منظور از یک فانکتور همورد $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ، عبارت است از،

۱) تابعی از $obj(\mathcal{C})$ به $obj(\mathcal{D})$.

۲) تابعی از مورفیسم‌های $\mathcal{C}$ به مورفیسم‌های $\mathcal{D}$ به طوری که به ازای هر $A, B \in obj(\mathcal{C})$، اگر $f : A \to B$ آنگاه $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B)$، یک مورفیسم در $\mathcal{D}$ باشد. همچنین به ازای هر $A, B, C \in obj(\mathcal{C})$ و هر $f \in Hom(A,B)$ و $g \in Hom(B,C)$، داشته باشیم،

$\mathcal{F}(gof) = \mathcal{F}(g) o \mathcal{F}(f)$ و همچنین، $\mathcal{F}(Id_A) = Id_{\mathcal{F}(A)}$.

تعریف ۱-۴-۲. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ و E سه رسته باشند، یک فانکتور دو متغیره همورد مانند $\mathcal{F} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to E$ چنان است که

آ) به ازای هر $M \in obj(\mathcal{C})$، $\mathcal{F}(M, -) : \mathcal{D} \to E$ یک فانکتور همورد است.

ب) به ازای $N \in obj(\mathcal{D})$، $\mathcal{F}(-, N) : \mathcal{C} \to E$، یک فانکتور همورد است.

ج) همچنین به ازای هر $f \in Hom(M', M)$ و $g \in Hom(N', N)$، به طوری $M, M' \in obj(\mathcal{C})$ و $N, N' \in obj(\mathcal{D})$، دیاگرام زیر جابجایی باشد.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(M', N') & \xrightarrow{\mathcal{F}(M',g)} & \mathcal{F}(M', N) \\ \mathcal{F}(f, N') \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}(f, N) \\ \mathcal{F}(M, N') & \xrightarrow{\mathcal{F}(M,g)} & \mathcal{F}(M, N). \end{array}$$

به عنوان مثال فانکتور تانسور یک فانکتور دو متغیره همورد است.

تعریف ۱-۴-۳. فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. منظور از $\mathcal{C}^{\circ}$ رسته ای است که،

آ) $obj(\mathcal{C}^{\circ}) = obj(\mathcal{C})$.

ب) به ازای هر A و B از اشیاء $\mathcal{C}$ برای مورفیسم $f : A \to B$، در $\mathcal{C}$، $f^{\circ} : B \to A$، یک مورفیسم در $\mathcal{C}^{\circ}$ است.

تعریف ۱-۴-۴. $\mathcal{F} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to E$، را یک فانکتور دو متغیر پادورد روی مؤلفه اول و همورد روی مؤلفه دوم نامیم، هر گاه $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{D} \to E$، با توجه به تعریف (۱-۴-۲) یک فانکتور دو متغیره همورد باشد.به عنوان مثال فانکتور $Hom(-,-) : \mathcal{C}_R \times \mathcal{C}_R \to \mathcal{C}_R$ یک فانکتور دو متغیرهٔ همورد روی مؤلفه دوم و پادورد روی مؤلفه اول می‌باشد، که در آن $\mathcal{C}_R$ رسته $R-$ مدول هاست.

تعریف ۱-۴-۵. فرض کنیم $\mathcal{F}, \mathcal{T} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ دو فانکتور همورد باشند، یک تبدیل طبیعی $\delta : \mathcal{F} \to \mathcal{T}$ یک کلاس از مورفیسم های $\delta_A : \mathcal{F}(A) \to \mathcal{T}(A)$، برای هر $A \in obj(\mathcal{C})$، می باشد، بطوری که برای هر مورفیسم $f : A \to B$، در $\mathcal{C}$ نمودار زیر جابجا یی باشد.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightarrow{\delta_A} & \mathcal{T}(A) \\ \mathcal{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{T}(f) \\ \mathcal{F}(B) & \xrightarrow{\delta_B} & \mathcal{T}(B). \end{array}$$

δ را یک هم ارزی طبیعی (یکریختی طبیعی) می‌نامیم، اگر به ازای هر $A \in obj(\mathcal{C})$، δ_A یک هم ارزی باشد.

تعریف ۱-۴-۶. فانکتور همورد $\mathcal{F}$ را در نظر می‌گیریم، $\mathcal{F}$ را دقیق چپ گوییم، هر گاه به ازای هر دنباله دقیق از $R-$ همریختی‌ها به صورت $\circ \to A \to B \to C$ دنباله زیر دقیق باشد.

$$\circ \to \mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(C).$$

$\mathcal{F}$ را دقیق راست گوییم هرگاه به ازای دقیق بودن $A \to B \to C \to \circ$ دنباله زیر دقیق باشد

$$\mathcal{F}(A) \to \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(C) \to \circ.$$

تعریف ۱-۴-۷. فانکتور پادورد $\mathcal{F}$ را دقیق چپ گوییم، هر گاه به ازای هر دنباله دقیق $A \to B \to C \to \circ$ دنباله زیر دقیق باشد

$$\circ \to \mathcal{F}(C) \to \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A).$$

و فانکتور پادورد $\mathcal{F}$ را دقیق راست گوییم، هرگاه به ازای دقیق بودن $\circ \to A \to B \to C$ دنباله زیر دقیق باشد

$$\mathcal{F}(C) \to \mathcal{F}(B) \to \mathcal{F}(A) \to \circ.$$

تعریف ۱-۴-۸. فانکتور $\mathcal{F}$ را دقیق گوییم، هرگاه هم دقیق چپ و هم دقیق راست باشد.

به عنوان مثال فانکتور تانسور یک فانکتور دقیق راست و فانکتورهای $Hom(-,N)$ و $Hom(M,-)$، دقیق چپ هستند.

۱-۵ مدول‌های پروژکتیو (تصویری) و انژکتیو

قضیه ۱-۵-۱. $R-$ مدول P پروژکتیو است اگر، و تنها اگر، فانکتور همورد $Hom(P,-)$، دقیق باشد.

برهان. (ر.ک[21,3.11]).

قضیه ۱-۵-۲. $R-$ مدول E، انژکتیو است اگر، و تنها اگر، فانکتور پادورد $Hom(-,E)$، دقیق باشد.

برهان. (ر.ک[21,3.16]).

قضیه ۱-۵-۳. هر $R-$ مدول نگاره همریخت ای از یک $R-$ مدول آزاد می‌باشد

برهان. (ر.ک[21,3.3]).

قضیه ۱-۵-۴. حلقه R– نوتری است اگر، و تنها اگر، هر جمع مستقیم از R– مدول‌های انژکتیو، انژکتیو باشد.

برهان. (ر.ک[12,3.1.17]).

قضیه ۱-۵-۵. فرض کنید S, R دو حلقه (نه لزوماً جابجایی) باشند. در این صورت برای R– مدولهای C_S ،${}_R B_S$ ،${}_R A$ به طوریکه A ، مدولی با تولید متناهی و پروژکتیو است، داریم

$$Hom_S(B, C) \otimes_R A \cong Hom_S(Hom_R(A, B), C).$$

برهان. (ر.ک [21, 3.59])

۱-۶ حد مستقیم

تعریف ۱-۶-۱. مجموعه مرتب جزیی $(I, \leq)$ را یک مجموعه جهت‌دار گوییم، هرگاه به ازای هر $\alpha, \beta \in I$ ، $\gamma \in I$ موجود باشد. به طوریکه، $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

تعریف ۱-۶-۲. فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته و I یک مجموعه جهت‌دار باشد. فانکتورهمورد $\mathcal{F} : I \to \mathcal{C}$ را یک دستگاه مستقیم در $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس گذار I گوییم. به عبارت دقیق تر به ازای هر $i \in I$ شی A_i در $\mathcal{C}$ موجود و برای $i, j \in I$ که $i \leq j$، مورفیسم $\pi_{ji} : A_i \to A_j$ وجود دارد به طوری که

۱) اگر $i=j$، آنگاه $\pi_{ii} : A_i \to A_i$ مورفیسم همانی باشد،

۲) اگر $i \leq j \leq k$، آنگاه $\pi_{kj}\pi_{ji} = \pi_{ki}$.

این دستگاه مستقیم را با $\{A_i, \pi_{ji}\}_I$، نمایش می دهیم.

مثال ۱-۶-۳. فرض کنیم M یک R– مدول باشد و $\mathcal{C}$ گردایه تمام زیر مدول‌های با تولید متناهی M باشد. در این صورت $\mathcal{C}$ یک دستگاه مستقیم است.

تعریف ۱-۶-۴. فرض کنیم $\{A_i, \pi_{ji}\}_{i \leq j}$، یک دستگاه مستقیم و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. شیء $A_\infty \in \mathcal{C}$، با مورفیسم‌هایی که از $A_i \xrightarrow{\pi_i} A_\infty$، تعریف می‌شوند، یک حد مستقیم برای دستگاه مستقیم نامیده می شود، اگر به ازای هر $i \leq j$، نمودار زیر جابجایی باشد.

$$\begin{tikzcd} A_\infty & \\ A_i \arrow[u, "\pi_i"] \arrow[r, "\pi_{ji}"'] & A_j \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

و به ازای هر $X \in \mathcal{C}$ و هر خانواده از مورفیسم های $\theta_i : A_i \to X$ که نمودار زیر جابجایی باشد،

$$\begin{tikzcd} & X & \\ A_i \arrow[ur, "\theta_i"] \arrow[rr, "\pi_{ji}"'] & & A_j \arrow[ul, "\theta_j"'] \end{tikzcd}$$