دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (هندسه)

عنوان

فضاهای پوششی جهانی تعمیم یافته و گروه شکل

استاد راهنما

دکتر بهروز مشایخی فرد

نگارنده

فرید محمدپور

دی ۱۳۹۲


بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

مشخصات پایان‌نامه تحصیلی دانشجویان

دانشگاه فردوسی مشهد

عنوان: فضاهای پوششی جهانی تعمیم یافته و گروه شکل

نام نویسنده: فرید محمدپور

استاد راهنما: دکتر بهروز مشایخی فرد

دانشکده: علوم ریاضی گروه: ریاضی محض	رشته تحصیلی: ریاضی محض
تاریخ تصویب: ۱۳۹۲/۲/۳۰	تاریخ دفاع: ۱۳۹۲/۱۰/۲۴
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد	تعداد صفحات: ۸۹

چکیده پایان‌نامه : در این مقاله مشخصات کاملی از فضاهای پوششی را ارائه و پوشش جهانی و پوشش جهانی تعمیم یافته را معرفی می کنیم. در حقیقت، اگر فضای پیرافشرده و هاسدورف X، یک پوشش جهانی (کلاسیک) بپذیرد، آنگاه همریختی طبیعی $\varphi : \pi_1(X) \longrightarrow \check{\pi}_1(X)$ از گروه بنیادین به اولین گروه هموتوپی شکل یک یکریختی است. در ادامه، عکسی برای این مطلب ارائه می کنیم: یک فضای توپولوژیکی همبند مسیری X یک پوشش جهانی تعمیم یافته می پذیرد اگر $\varphi : \pi_1(X) \longrightarrow \check{\pi}_1(X)$ یک به یک باشد. یک شرط لازم برای ساختار استانداردی که منجر به پوشش جهانی تعمیم یافته می شود این است که X هاسدورف هموتوپیکی باشد. همچنین کافی است اگر $\pi_1(X)$ شمارش پذیر باشد. لذا این مقاله عمدتا بدنبال یافتن شرایطی است که تحت آنها، فضاهایی با گروه بنیادین ناشمارا پوشش جهانی تعمیم یافته می پذیرد. همچنین خواهیم دید، خاصیت یکتایی مسیر بالابر، نقش بسیار مهمی در این راستا ایفا می کند.

واژگان کلیدی: فضای پوشش جهانی، فضای پوشش جهانی کلاسیک، فضای پوشش جهانی تعمیم یافته، اولین گروه هموتوپی شکل.

امضای استاد راهنما: تاریخ:

اظهارنامه

عنوان پایان‌نامه : فضاهای پوششی جهانی تعمیم یافته و گروه شکل

اینجانب فرید محمدپور دانشجوی دوره کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد نویسنده پایان‌نامه تحت راهنمایی دکتر بهروز مشایخی فرد متعهد می‌شوم:

آ. تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده و از صحت و اصالت برخوردار است.

ب. در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.

ج. مطالب مندرج در این پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی به جایی ارائه نشده است.

د. کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه فردوسی مشهد است و مقالات مستخرج با نام "دانشگاه فردوسی مشهد " و یا "Ferdowsi University of Mashhad" به چاپ خواهد رسید.

هـ. حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از آن رعایت شده است.

و. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده(یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

ز. در کلیه مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده، اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی انسانی رعایت شده است.

تاریخ
امضای دانشجو

تقدیم به پدر صبور، مادر فداکار،

همسر عزیز و

برادر مهربانم

سپاس‌گزاری

استاد عزیز، جناب آقای دکتر بهروز مشایخی فرد
زیباترین سپاس‌ها را تقدیم به شما می‌کنم، به شما که دلسوزانه راهنمای من بودید، همدلی و همراهی‌تان را ارج می‌نهم و پایندگی و تندرستی‌تان را خالصانه آرزومندم.

همچنین از اساتید گران‌مایه، جناب آقای دکتر حمید ترابی و سرکار خانم دکتر هانیه میر ابراهیمی که کار داوری این پایان‌نامه را پذیرفته‌اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

فرصت را غنیمت شمرده و از تمامی اساتید دوران تحصیلم مخصوصاً جناب آقای دکتر بهروز مشایخی فرد و سرکار خانم دکتر هانیه میر ابراهیمی و سرکار خانم دکتر فاطمه هلن قانع که در این مدت بسیار از آنان آموختم، سپاسگزاری می‌کنم.

در انتها به رسم ادب از برادرم آقای دکتر وحید محمدپور و دوستان عزیزم آقایان مجتبی محرری و حمیدرضا عاشوری که در تدوین این پایان‌نامه کمک شایانی به اینجانب نمودند، تشکر کرده و خوشبختی، سعادت و کامیابی‌شان را آرزو می‌کنم.

فرید محمدپور

دی ۹۲

مقدمه

در فصل اول این پایان نامه، به طور مختصر به یادآوری مفاهیم مهمی از جبر، توپولوژی و توپولوژی جبری می پردازیم. مفاهیمی که پایه ی اساسی مطالب فصل های بعدی را تشکیل می دهند. طبیعی است برقراری ارتباط با مطالب فصل های بعدی، مستلزم تسلط نسبی بر مفاهیم فصل اول است.

در فصل دوم، مفاهیم بنیادین فضاهای پوششی را بیان می کنیم. مبحث فضاهای پوششی دارای گستردگی فراوانی در بخش های مختلف توپولوژی و توپولوژی جبری می باشد و از لم ها و قضایای متعددی برخوردار است. بنابراین فصل دوم را به مفاهیمی از فضاهای پوششی اختصاص داده ایم که مورد استفاده در فصل های سوم و پنجم هستند. تعاریفی همچون فضای پوشش جهانی، پوشش جهانی تعمیم یافته و لم بالابر از مهمترین آنهاست.

در فصل سوم ساختار مهمی را مطرح می کنیم و با معرفی توپولوژی مناسبی بر آن ضمن تضمین خاصیت همبند مسیری موضعی برای $\tilde{X}$، نشان می دهیم این ساختار با داشتن خاصیت یکتایی مسیر بالابر، نه تنها دارای پوشش جهانی تعمیم یافته است بلکه از پوشش جهانی کلاسیک هم بهره مند می شود.

فصل چهارم که از سه بخش تشکیل شده است، در نگاه اول کاملا متفاوت از فصل های قبلی است، چرا که در آن مقدماتی از همبافت ها، دستگاه معکوس و نظریه شکل را بیان کرده ایم. در حقیقت با بیان این مطالب، اولین گروه هموتوپی شکل را معرفی می کنیم و با استفاده از همریختی بین گروه بنیادین و اولین گروه هموتوپی شکل، آماده می شویم تا هدف اصلی مقاله را در فصل پنجم ارائه کنیم.

در فصل پنجم (فصل اصلی پایان نامه)، شرایط وجود پوشش جهانی تعمیم یافته را بررسی می کنیم و نشان می دهیم شرط لازم و کافی برای وجود پوشش جهانی تعمیم یافته، هاسدورف هموتوپیکی بودن X و شمارایی گروه بنیادین آن است. در نهایت بدنبال شرایطی خواهیم بود که وجود پوشش جهانی تعمیم یافته را برای فضاهایی بررسی کنیم که گروه بنیادین ناشمارا دارند، که این مطلب را با استفاده از دو گزاره ی ۸.۱.۵ و ۹.۱.۵ و ارتباط آنها با اولین گروه هموتوپی شکل بدست می آوریم.

مطالب این پایان‌نامه بر اساس مقاله

Hanspeter Fischer and Andreas Zastrow, Generalized universal covering spaces and the shape group, Fundamenta Mathematicae 197 (2007) 167-196.

تدوین شده است.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیاز ها و تعاریف اولیه

در این فصل نمادها، تعاریف و قضایای مورد نیاز را که برای این پایان‌نامه مورد نیاز است، بیان می‌کنیم. مجموعه‌ی اعداد طبیعی، اعداد صحیح، اعداد گویا و اعداد حقیقی را به‌ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ نمایش می‌دهیم.

۱.۱ پیش نیازهای جبری

تعریف ۱.۱.۱. [۴] یک رسته[۱] ، یک رده $\mathcal{C}$ از اشیا[۲] است (که با $A, B, C, \cdots$ نمایش داده می‌شود) همراه با

۱. یک رده از مجموعه‌های مجزا، یکی برای هر جفت از اشیا در $\mathcal{C}$. (که با $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ نمایش داده می‌شود و به عناصر آن ریخت[۳] از A به B می‌گویند)

۲. برای هر سه‌تایی (A, B, C) از اشیا $\mathcal{C}$، یک تابع

$$o : Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(g, f) \longmapsto gof$$

(که در آن به gof ترکیب دو ریخت f و g گفته می‌شود) موجود باشد که در دو اصل زیر صدق کند

---

[۱] category

[۲] object

[۳] morphism

۱. (شرکت‌پذیری) اگر $f:A\longrightarrow B$، $g:B\longrightarrow C$ و $h:C\longrightarrow D$ ریخت‌هایی در $\mathcal{C}$ باشند، آنگاه $ho(gof)=(hog)of$.

۲. (ریخت همانی) برای هر شی B در $\mathcal{C}$، ریخت $\textbf{1}_B:B\longrightarrow B$ موجود باشد به قسمی که برای هر $f:A\longrightarrow B$ و هر $g:B\longrightarrow C$ داشته باشیم $go\textbf{1}_B=g$ و $\textbf{1}_Bof=f$.

[۴] در رسته $\mathcal{C}$، ریخت $f:A\longrightarrow B$ هم ارزی[۴] نامیده می‌شود هرگاه ریخت $g:B\longrightarrow A$ در $\mathcal{C}$ وجود داشته باشد که $gof=\textbf{1}_A$ و $fog=\textbf{1}_B$. اگر $f:A\longrightarrow B$ هم‌ارزی باشد، A و B را هم ارز[۵] گویند.

تعریف ۲.۱.۱. [۷] فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. رسته $\mathcal{C}'\subset\mathcal{C}$ زیر رسته[۶] نامیده می‌شود هرگاه

۱. اشیای $\mathcal{C}'$، اشیای $\mathcal{C}$ باشد.

۲. برای اشیای X' و Y' از $\mathcal{C}'$ داشته باشیم، $Hom_{\mathcal{C}'}(X',Y')\subset Hom_{\mathcal{C}}(X',Y')$.

۳. اگر $f':X'\longrightarrow Y'$ و $g':Y'\longrightarrow Z'$ اشیایی در $\mathcal{C}'$ باشند، آنگاه ترکیب $g'of'$ در $\mathcal{C}'$ همان ترکیب $g'of'$ در $\mathcal{C}$ باشد.

همچنین $\mathcal{C}'$ یک زیر رسته کامل[۷] از رسته $\mathcal{C}$ نامیده می‌شود، هرگاه $\mathcal{C}'$ یک زیررسته از $\mathcal{C}$ باشد و برای اشیای X' و Y' در $\mathcal{C}'$ داشته باشیم، $Hom_{\mathcal{C}'}(X',Y')=Hom_{\mathcal{C}}(X',Y')$.

مثال ۳.۱.۱. [۶] رسته Top_* که اشیای آن، همه جفت مرتب‌های $(X,x_\circ)$ است که X یک فضای توپولوژیک است و $x_\circ\in X$. Top_* یک زیررسته از Top[۲] است، (زیرفضاها در اینجا تک نقطه‌ای هستند). این رسته، رسته فضاهای توپولوژیک نقطه‌دار نامیده می‌شود. $x_\circ$ نقطه پایه $(X,x_\circ)$ نامیده می‌شود و به ریخت‌های این رسته، نگاشت‌های نقطه‌دار گویند.

[۴] equivalence

[۵] equivalent

[۶] subcategory

[۷] full subcategory

اکنون به ارائه یک تعریف می‌پردازیم که در ساختن رسته‌ای جدید از روی یک رسته دلخواه، به ما کمک می‌کند.

تعریف ۴.۱.۱. [۶] یک همنهشتی[۸] روی رسته $\mathcal{C}$، رابطه هم‌ارزی $\sim$ روی رده $\bigcup_{(A,B)} Hom(A,B)$ از همه ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ است بطوریکه

۱. اگر $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ و $f \sim f'$، آنگاه نتیجه شود $f' \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

۲. اگر $f \sim f'$ و $g \sim g'$ و ترکیب gof موجود باشد، آنگاه نتیجه شود که $gof \sim g'of'$.

قضیه ۵.۱.۱. [۶] فرض کنید $\mathcal{C}$ یک رسته با همنهشتی $\sim$ باشد و $[f]$، رده هم‌ارزی ریخت f را نشان دهد. $\mathcal{C}'$ را بصورت زیر تعریف می‌کنند

$$Obj\,\mathcal{C}' = Obj\,\mathcal{C}$$

$$Hom_{\mathcal{C}'}(A,B) = \{[f] : f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)\}$$

$$[g]o[f] = [gof]$$

در این صورت، $\mathcal{C}'$ یک رسته است.

این رسته را رسته خارج قسمتی[۹] از $\mathcal{C}$ می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. [۴] فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. یک تابعگون پادورد[۱۰] $\mathbf{T}$ از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، (که با $\mathbf{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ نمایش داده می‌شود)، یک جفت از توابع است (که هردو با $\mathbf{T}$ نشان داده می‌شوند) که یکی تابع شی است و به هر شی C از $\mathcal{C}$، یک شی $\mathbf{T}(C)$ از $\mathcal{D}$ را نظیر می‌کند؛ و دیگری تابع ریخت است که به هر ریخت $f : C \longrightarrow C'$ از $\mathcal{C}$، یک ریخت $\mathbf{T}(f) : \mathbf{T}(C') \longrightarrow \mathbf{T}(C)$ از $\mathcal{D}$ را نظیر می‌کند به‌طوری‌که

۱. برای هر ریخت همانی 1_C از $\mathcal{C}$، $\mathbf{T}(1_C) = 1_{\mathbf{T}(C)}$.

[۸] congruence

[۹] quotient category

[۱۰] contravariant functor

۲. برای هر دو ریخت f و g که ترکیب gof تعریف شده باشد، $\mathbf{T}(gof) = \mathbf{T}(f)o\mathbf{T}(g)$.

قضیه ۷.۱.۱. [۶] فرض کنید $\mathbf{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ یک تابعگون باشد، در این صورت اگر اشیا A و B در رسته $\mathcal{C}$ هم‌ارز باشند، آنگاه اشیا $\mathbf{F}(A)$ و $\mathbf{F}(B)$ در رسته $\mathcal{D}$ هم‌ارز خواهند شد.

با استفاده از تمرینی در صفحه ۱۲ در [۶]، نکته زیر را داریم.

نکته ۸.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته و $\sim$ یک تجانس روی $\mathcal{C}$ باشد. اگر $\mathbf{T} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ یک تابعگون باشد که $\mathbf{T}(f) = \mathbf{T}(g)$ وقتی که $f \sim g$، آنگاه $\mathbf{T}$، یک تابعگون $\mathbf{T}' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{D}$ (که $\mathcal{C}'$ رسته خارج قسمتی از $\mathcal{C}$ است) القا می‌کند که برای هر شی X داریم $\mathbf{T}'(X) = \mathbf{T}(X)$ و برای هر ریخت f، داریم $\mathbf{T}'([f]) = \mathbf{T}(f)$.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X یک مجموعه (فضای توپولوژی) باشد، در این صورت گوییم G روی X عمل[۱۱] می کند اگر نگاشت $G \times X \longrightarrow X$ با ضابطه ی $(g, x) \longrightarrow gx$ موجود باشد به طوری که

۱. $(gg')x = g(g'x)$.

۲. $e(x) = x$.

که در آن e عنصر همانی G، $g' \in G$ و $x \in X$. در شرایطی که G روی X عمل می کند، X یک G-مجموعه (G-فضا) نامیده می شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد که روی X عمل می کند و نیز فرض کنیم $x \in X$. در این صورت پایدار ساز[۱۲] x را مجموعه ی تمام عناصری از G تعریف می کنیم که x را ثابت نگه می دارند.

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\} \subset G$$

تعریف ۱۱.۱.۱. عمل گروه G، روی X آزادانه[۱۳] است اگر و فقط اگر تمام پایدار ساز های آن بدیهی باشند.

[۱۱] action

[۱۲] stabilizer

[۱۳] freely

تعریف ۱۲.۱.۱. عمل گروه G، روی X متعددی[۱۴] است اگر برای هر دو عنصر $x,y\in X$، عنصر $g\in G$ موجود است به طوری که $gx=y$. در این حالت X، G-مجموعه (G-فضا) متعددی نامیده می شود.

تعریف ۱۳.۱.۱. فرض کنیم X و Y، به ترتیب، دو فضای متریک با مترهای d_X و d_Y باشند. یک نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ طولپا یا حافظ متر[۱۵] است، اگر برای هر $a,b\in X$ داشته باشیم

$$d_Y(f(a),f(b))=d_X(a,b)$$

تعریف ۱۴.۱.۱. دو فضای متریک X و Y را هم متر[۱۶] می نامیم اگر یک نگاشت حافظ متر یک به یک و پوشا از X بتوی Y موجود باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. مجموعه ی نگاشت های حافظ متر و دوسویی از فضای متریک X بتوی خودش، تشکیل یک گروه می دهد که به گروه حافظ متر[۱۷] معروف است.

۲.۱ پیش‌نیازهای توپولوژیکی

کلیه مطالب این قسمت و قسمت بعد از [۶] آورده شده‌اند، جز تعاریف و قضایایی که مرجع‌شان در ابتدا بیان شده است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه است و τ_f گردایه ی تمام زیر مجموعه های U از X است به طوری که $X-U$ متناهی یا تمام X باشد. در این صورت τ_f تشکیل یک توپولوژی بر X می دهد که به توپولوژی متمم متناهی[۱۸] معروف است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X فضایی توپولوژیک باشد. گردایه ی $\mathcal{A}$ از زیر مجموعه های X را متناهی موضعی[۱۹] خوانیم در صورتی که هر نقطه ی X همسایگی ای داشته باشد که فقط تعداد متناهی از اعضای $\mathcal{A}$ را قطع کند.

[۱۴] transitively

[۱۵] isometry

[۱۶] isometric

[۱۷] isometry group

[۱۸] finite complement topology

[۱۹] locally finite

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{A}$ گردایه ای از زیر مجموعه های فضای X باشد. گردایه ی $\mathcal{B}$ از زیر مجموعه های X را یک تظریف[۲۰] $\mathcal{A}$ خوانیم (یا گوییم $\mathcal{A}$ را تظریف می کند) در صورتی که به ازای هر عضو $\mathcal{B}$ مانند B، عضوی مانند A از $\mathcal{A}$ یافت شود به طوری که حاوی B باشد. اگر اعضای $\mathcal{B}$ مجموعه های باز باشند، $\mathcal{B}$ را یک تظریف باز $\mathcal{A}$ نامیم؛ اگر اعضای $\mathcal{B}$ بسته باشند، $\mathcal{B}$ را یک تظریف بسته ی $\mathcal{A}$ می نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. فضای X را پیرا فشرده[۲۱] خوانیم در صورتی که هاسدورف باشد و هر پوشش باز آن مانند $\mathcal{U}$ دارای یک تظریف باز متناهی موضعی مانند $\mathcal{B}$ است که X را می پوشاند.

تعریف ۵.۲.۱. اگر (X, τ) یک فضای توپولوژیک و $S \subseteq X$، آنگاه S در X چگال[۲۲] است اگر $\bar{S} = X$. (بستار S برابر X است).

مثال ۶.۲.۱. $\mathbb{Q}$ در $\mathbb{R}$ چگال است، یعنی $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

تعریف ۷.۲.۱. فضای توپولوژیک (X, τ) را تفکیک پذیر[۲۳] نامیم اگر یک زیر مجموعه ی شمارای S از X وجود دارد که در X چگال است.

تعریف ۸.۲.۱. یک سطح توپولوژیکی، یک فضای توپولوژیکی هاسدورف و شمارای دوم است به طوری که هر نقطه ی آن دارای همسایگی همسانریخت با زیر مجموعه ی بازی از صفحه ی اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ است.

تعریف ۹.۲.۱. یک سطح بسته[۲۴] سطحی فشرده و بدون مرز است.

تعریف ۱۰.۲.۱. لم چسب[۲۵] : فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد که اجتماع متناهی از زیرمجموعه‌های بسته است؛ $X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$. اگر برای یک فضای Y، نگاشت‌های پیوسته $f_i : X_i \longrightarrow Y$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که برای هر i, j داشته باشیم $f_i |_{X_i \cap X_j} = f_j |_{X_i \cap X_j}$، در این صورت نگاشت پیوسته یکتای $f : X \longrightarrow Y$ موجود است بطوریکه برای هر i، $f |_{X_i} = f_i$.

[۲۰] refinement
[۲۱] paracompact
[۲۲] dense
[۲۳] separable
[۲۴] closed surface
[۲۵] gluing lemma

لم چسب برای فضایی که اجتماع دلخواه از زیرمجموعه های باز است، نیز درست است.

تعریف ۱.۲.۱۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $p : X \longrightarrow Y$ نگاشتی پوشا باشد. نگاشت p را یک نگاشت خارج قسمتی[۲۶] خوانیم در صورتی که هر زیر مجموعه از Y مانند U، در Y باز باشد اگر و فقط اگر $p^{-1}(U)$ در X باز باشد.

تعریف ۱.۲.۱۲. اگر X یک فضای توپولوژیک، A مجموعه‌ای دلخواه و $p : X \longrightarrow A$ نگاشتی پوشا باشد، آنگاه تنها یک توپولوژی τ در A وجود دارد که p نسبت به آن نگاشت خارج قسمتی است. این توپولوژی به توپولوژی خارج قسمتی[۲۷] القا شده بوسیله p، موسوم است که آن متشکل از زیرمجموعه‌هایی مانند U از A است که $p^{-1}(U)$ در X باز باشند.

قضیه ۱.۲.۱۳. [۳] فرض کنید X فضایی متریک باشد، در این صورت X هاسدورف است.

قضیه ۱.۲.۱۴. [۳] اگر فضای توپولوژیکی X، همبند مسیری باشد، آنگاه همبند است.

تعریف ۱.۲.۱۵. در فضای مفروض X، رابطه هم‌ارزی $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم، $x \sim y$ اگر وفقط اگر زیرمجموعه همبندی وجود داشته باشد که شامل x و y باشد. رده‌های هم‌ارزی حاصل از آن را، مولفه[۲۸] های X می‌گوییم. رابطه هم‌ارزی دیگری بر فضای X چنین تعریف می‌کنیم، $x \sim y$ اگر و فقط اگر مسیری در X از x به y وجود داشته باشد. رده‌های هم‌ارزی این رابطه را مولفه های مسیری[۲۹] X می‌خوانیم. مولفه‌های (مسیری) X، زیرمجموعه‌های جدا از هم و همبند (مسیری) X هستند که اجتماع آنها مساوی X است. و هر زیرمجموعه همبند (مسیری) X، فقط یکی از آنها را قطع می‌کند.

اکنون به معرفی ساختار یک تابعگون می‌پردازیم.

[۲۶] quotient map
[۲۷] quotient topology
[۲۸] component
[۲۹] path components

تعریف ۱.۲.۱۶. تعریف می‌کنیم $\pi_\circ(X)$ را مجموعه همه مولفه‌های مسیری فضای توپولوژیکی X. اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک نگاشت پیوسته باشد، آنگاه $\pi_\circ(f) : \pi_\circ(X) \longrightarrow \pi_\circ(Y)$ را تابعی معرفی می‌کنیم که به هر مولفه مسیری C از X، مولفه مسیری یکتایی از Y شامل $f(C)$ را نظیر کند.

قضیه ۱.۲.۱۷. $\pi_\circ : Top \longrightarrow Sets$ یک تابعگون است. علاوه بر این، اگر $f \simeq g$، آنگاه $\pi_\circ(f) = \pi_\circ(g)$.

نتیجه ۱.۲.۱۸. اگر X و Y از یک نوع هموتوپی باشند، آنگاه دارای تعداد مولفه‌های مسیری یکسانی هستند.

تعریف ۱.۲.۱۹. یک فضای X، همبند مسیری موضعی[۳۰] نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، یک همسایگی باز V از x وجود دارد به‌طوری‌که $V \subset U$ و هر دو نقطه در V، توسط مسیری در U به هم متصل شوند.

در نتیجه ۱.۲.۲۱، نشان داده خواهد شد که برای V انتخاب شده، هر دو نقطه در V، را می‌توان به وسیله مسیری در خود V، به هم متصل کرد؛ به عبارتی، V همبند مسیری است.

قضیه ۱.۲.۲۰. یک فضای توپولوژیکی X، همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر مولفه‌های مسیری زیرمجموعه‌های باز X، در X باز باشند. در حالت خاص، اگر X همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفه‌های مسیری اش، باز هستند.

نتیجه ۱.۲.۲۱. فضای توپولوژیک X، همبند مسیری موضعی است اگر و فقط اگر برای هر $x \in X$ و هر همسایگی باز U از x، یک همسایگی باز همبند مسیری V از x موجود باشد بطوریکه $x \in V \subseteq U$.

قضیه ۱.۲.۲۲. اگر X، همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه مولفه‌های هر زیرمجموعه باز X، با مولفه‌های مسیری‌اش، منطبق است. در حالت خاص، مولفه‌های X، بر مولفه‌های مسیری X، منطبق است.

نتیجه ۱.۲.۲۳. اگر X، همبند و همبند مسیری موضعی باشد، آنگاه X، همبند مسیری است.

[۳۰] locally path connected

تعریف ۲۴.۲.۱. یک فضای توپولوژیکی X، همبند موضعی[۳۱] نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه از X، یک همسایگی باز همبند داشته باشد.

بطور مشابه می‌توان نشان داد که یک فضای توپولوژیکی، همبند موضعی است اگر و فقط اگر مولفه‌های زیرمجموعه‌های بازش، باز باشند. همچنین، هر فضای همبند مسیری موضعی، همبند موضعی است.

تعریف ۲۵.۲.۱. فضای-T_1، یک فضای توپولوژیکی X با خاصیت زیر است

برای هر $x, y \in X$، اگر $x \neq y$، آنگاه مجموعه ی بازی شامل x موجود است به طوری که شامل y نیست.

مثال ۲۶.۲.۱. خط حقیقی $\mathbb{R}$ را با توپولوژی معمولی در نظر بگیرید. برای هر دو نقطه ی x و y در $\mathbb{R}$، مجموعه ی بازی شامل x موجود است که شامل y نیست. بنابراین خط حقیقی $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی یک فضای-T_1 است.

لم ۲۷.۲.۱. یک فضای توپولوژیکی X، فضای-T_1 است اگر و فقط اگر هر مجموعه ی تک عنصری $\{p\}$ از X بسته باشد.

قضیه ۲۸.۲.۱. یک فضای توپولوژیک X با توپولوژی τ یک فضای-T_1 است اگر و فقط اگر τ شامل توپولوژی متمم متناهی روی X باشد.

قضیه ۲۹.۲.۱. فرض کنید $T = (S, \tau)$ توپولوژی متمم متناهی روی مجموعه ی S با حداقل دو نقطه ی متمایز باشد. در این صورت T یک فضای-T_1 است.

برهان. فرض کنید $x, y \in S$، در این صورت $S \setminus \{x\}$ مجموعه ی بازی از T شامل y است که x را ندارد و $S \setminus \{y\}$ هم مجموعه ی بازی از T شامل x است که y را ندارد. بنابراین T در تعریف فضای-T_1 صدق کرده و قضیه ثابت است. $\square$

[۳۱] locally connected

تعریف ۳۰.۲.۱. فرض کنیم Y یک فضا و $y_۰ \in Y$ باشد. همچنین فرض کنیم Λ مجموعه ای اندیس گذار است. گردایه ی $\mathcal{A} = \{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ از زیر مجموعه های Y را پایه ی پالایه[۳۲] ی $y_۰$ در Y گوییم هرگاه دو شرط زیر برقرار باشند:

۱. برای هر $\alpha \in \Lambda$، $A_\alpha \neq \emptyset$.

۲. به ازای هر $\alpha, \beta \in \Lambda$، $\gamma \in \Lambda$ موجود است به طوری که $A_\gamma \subset A_\alpha \cap A_\beta$.

لم ۳۱.۲.۱. فرض کنیم Y یک فضا باشد و $y_۰ \in Y$. در این صورت خانواده $\mathcal{U}(y_۰)$ از همه ی همسایگی های $y_۰$ یک پایه ی پالایه ی در Y است. (که آن را همسایگی پایه ی پالایه ی $y_۰$ در Y می‌نامیم)

تعریف ۳۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{B} = \{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ پایه ی پالایه ای در Y باشد. در این صورت $\mathcal{B}$ را همگرا به $y_۰$ گوییم، $(\mathcal{B} \to y_۰)$ اگر به ازای هر همسایگی U از $y_۰$، $A_\alpha \in \mathcal{B}$ موجود باشد به طوری که $A_\alpha \subset U$.

قضیه ۳۳.۲.۱. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع است. در این صورت f در $x_۰ \in X$ پیوسته است اگر و تنها اگر پایه ی پالایه ی $f(L(x_۰))$ همگرا به $f(x_۰)$ باشد. ($L(x_۰)$ پایه ی پالایه ای از همسایگی های $x_۰$ در X است.)

تعریف ۳۴.۲.۱. فرض کنیم $f : X \to Y$ یک تابع است و $\mathcal{B} = \{A_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ پایه ی پالایه ی $x_۰$ در X باشد. در این صورت $f(\mathcal{B}) = \{f(A_\alpha) | A_\alpha \in \mathcal{B}\}$ پایه ی پالایه ی $f(x_۰)$ در Y می‌باشد.

۳.۱ پیش نیازهای توپولوژی جبری

در ابتدا فرض کنید $\mathbb{R}^{n+۱}$ فضای اقلیدسی $n+۱$-بعدی باشد. اگر $x = (x_۱, \cdots, x_{n+۱}) \in \mathbb{R}^{n+۱}$، آنگاه نرم x به صورت $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=۱}^{n+۱} x_i^۲}$ تعریف می‌شود(در حالتی که $n = ۱$، داریم $\|x\| = |x|$). حال تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+۱} : \|x\| = ۱\}$$

[۳۲] Filter base

و به آن n-کره[۳۳] (به شعاع ۱ و به مرکز مبدا) می‌گوییم. توجه داریم که ۰-کره $\mathbf{S}^{\circ}$، شامل دو نقطه $\{-۱, ۱\}$ است. همچنین تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq ۱\}$$

و به آن n-دیسک[۳۴] می‌گوییم. مشاهده می‌شود که $\mathbf{S}^{n-۱} \subset \mathbf{D}^n \subset \mathbb{R}^n$. در واقع $\mathbf{S}^{n-۱}$ مرز $\mathbf{D}^n$ در $\mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۱.۳.۱. فرض کنید $f_i : X \longrightarrow Y$ و $g_i : Y \longrightarrow Z$ برای $i = \circ, ۱$ پیوسته باشند. اگر $f_\circ \simeq f_۱$ و $g_\circ \simeq g_۱$، آنگاه $g_\circ o f_\circ \simeq g_۱ o f_۱$؛ یعنی $[g_\circ o f_\circ] = [g_۱ o f_۱]$.

نتیجه ۲.۳.۱. هموتوپی، یک تجانس روی رسته Top است.

حال با استفاده از این نتیجه، به تعریف مهم زیر می‌رسیم.

تعریف ۳.۳.۱. رسته خارج قسمتی بدست آمده از رسته Top با تجانس هموتوپی را رسته هموتوپی نامیده و با $hTop$ نمایش می‌دهند.

با استفاده از ۱۷.۲.۱، می‌توانیم تابعگون $\pi_\circ$ را از رسته $hTop$ به رسته $Sets$ تعریف کنیم. بدین ترتیب، اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک هم‌ارزی هموتوپی باشد یا به عبارتی $[f]$، یک هم‌ارزی در $hTop$ باشد، آنگاه $\pi_\circ([f])$ یک هم‌ارزی در رسته $Sets$ می‌باشد.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و $y_\circ \in Y$. نگاشت ثابت در $y_\circ$، یک تابع $c : X \longrightarrow Y$ است که برای هر $x \in X$، داریم $c(x) = y_\circ$. یک نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$، پوچ هموتوپ[۳۵] نامیده می‌شود هرگاه نگاشت ثابت $c : X \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد که $f \simeq c$. فضای توپولوژیک X را انقباض پذیر[۳۶] گویند هرگاه ۱_X پوچ هموتوپ باشد.

نتیجه بعد نشان می‌دهد که فضاهای انقباض پذیر، ساده‌ترین اشیا در رسته $hTop$ هستند.

[۳۳] n-sphere

[۳۴] n-disk

[۳۵] null homotopic

[۳۶] contractible