بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه پیام نور

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض (گرایش جبر)

دانشکده : علوم پایه

گروه علمی : ریاضی

مدول ها وحلقه های کاهش یافته

استاد راهنما : دکتر احمد خاکساری

استاد مشاور: دکتر محبوبه حسین یزدی

نگارش : خدامراد قیاسی

مرداد ۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه پیام نور

مرکز شیراز

تصویب پایان نامه / رساله

پایان نامه تحت عنوان :

مدول ها وحلقه های کاهش یافته

که توسط **خدامراد قیاسی** در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تائید می باشد . تاریخ دفاع: **۸۸/۵/۱۱** نمره: **۱۷/۵** درجه ارزشیابی : بسیار خوب

اعضاء هیأت داوران :

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر احمد خاکساری	استاد راهنما	استادیار	
۲- دکتر محبوبه حسین یزدی	استاد مشاور	استادیار	
۳- دکتر بهمن یوسفی	استاد داور	استاد	
۴- دکتر حسین توللی	نماینده تحصیلات تکمیلی	دانشیار	

تقدیم به

پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

و

خانواده صبورم

سپاسگزاری

خدارا سپاسگزارم کـه بـر بنـده اش منـت نهـاد و در زمـره ی دانـشجویان قـرار داد . الحمـدالله، و «ربّ زدنی علماً »

از زحمات بی دریغ ودلسوزانه استاد گرانقدر جنـاب آقـای دکتـر احمـد خاکـساری کـه بـا تجـارب گرانمایه خود ، راهنمایی دلسوز و راهگشای اینجانب بودند، نهایت سپاس وامتنان را دارم ، همچنین از اعضای محترم هیئت داوران ، سرکار خانم دکتر حسین یزدی و آقای دکتر یوسفی تشکر می کنم و از زحمات دکتر دانشخواه و دوست عزیز آقای فلکی که ما در نوشتن این پایان نامه یاری رساندند، کمال تشکر را دارم .

چکیده

مدول‌ها و حلقه های کاهش یافته

هدف ما در این پایان نامه بررسی مدول‌ها و حلقه های کاهش یافته است . یک حلقه کاهش یافته نامیده می شود هرگاه عنصر پوچ توان، جز صفر نداشته باشد . R- مدول M را کاهش یافته می‌نامند هرگاه برای هر $m\in M$، $a\in R$ اگر $a^2m=0$ آنگاه $aRm=0$.

در قسمت اول نشان می دهیم مدولهای کاهش یافته، متقارن و ZI و ps- آرمنداریز هستند و همچنین مدول‌های هموار ، روی حلقه های کاهش یافته ، کاهش یافته اند .

در قسمت دوم اولاً نشان می دهیم برای مدولهای نیمه اول یا یک مدول با رادیکال جیکوبسن صفر، مفاهیم کاهش یافته، متقارن ، ps- آرمنداریز و ZI معادل‌اند. ثانیاً مدول‌ها با رادیکال جیکوبسن صفر ، روی حلقه های Q چپ ، کاهش یافته اند .

در پایان ثابت می کنیم حلقه های نامنفرد جابجایی ، کاهش یافته اند و همچنین R- مدول نامنفرد M که R دوچپ یا M متقارن باشد کاهش یافته است .

فهرست

فصل اول

۱- مقدمه

۱- **مقدمه :** در این فصل به بیان چند تعریف و قضیه ومعرفی چند نماد که برای فهم مطالب این پایان نامه نیاز است می پردازیم .

در سراسر این پایان نامه R یک حلقه (نه لزوماً جابجایی) و M یک R- مدول غیر صفر ویکانی است.

تعریف ۱- ۱: حلقه

ساختمان جبری(R, + , o) ، $R \neq \phi$ را یک حلقه می نامند هرگاه

الف) ساختمان $(R,+)$ گروه آبلی باشد ،

ب) ساختمان (R, o) بسته و شرکت پذیر باشد .

پ) عمل ضرب وعمل جمع از چپ وراست دارای خاصیت پخشی باشد یعنی :

$$\forall a, b, c \in R \qquad a.(b+c) = a.b + a.c$$

$$\forall a, b, c \in R \qquad (b+c).a = b.a + c.a$$

از این به بعد حلقه(R,+, o) را فقط با R نشان می دهیم .

در صورتی که حلقه R تحت عمل ضرب دارای عنصر واحد باشد ، آنگاه R را حلقه یکدار یا حلقه با عنصر یکه می نامند .

اگر عناصر حلقه R تحت عمل ضرب جابجا پذیر باشند آنگاه R را حلقه جابجایی یا تعویض پذیر می‌خوانند .

تعریف ۱-۲ :

هرگاه عناصر مجموعه $R^* = R - \{o\}$ تحت عمل ضرب وارون پذیر باشند آنگاه R را حلقه بخشی یا حلقه تقسیم می نامیم . در صورتی که مجموعه $R^* = R - \{o\}$ تحت عمل ضرب یکدار وعناصرش تعویض پذیر و وارون پذیر باشند آنگاه R یک میدان است .

تذکر ۱-۳ : به آسانی می توان نشان داد که هر یک از مجموعه های C,R,Q,Z تحت اعمال جمع وضرب معمولی اعداد یک حلقه جابجایی ویکدار هستند.

مقسوم علیه صفر ؛

تعریف ۱-۴ :

هرگاه R حلقه ای دلخواه باشد آنگاه عنصر $o \neq a \in R$ را یک مقسوم علیه چپ صفر می نامند در صورتی که :

$\exists 0 \neq b \in R \qquad s.t \qquad a.b=0$

تعریف ۱- ۵ :

حوزه درست : هر حلقه جابه جایی و یکدار که فاقد مقسوم علیه صفر باشد یک حوزه درست نامیده می شود .

مثال : هر یک از مجموعه های C,R,Q,Z تحت اعمال ضرب وجمع معمولی اعداد یک حوزه درست می باشند .

ایده آل ها ؛

تعریف ۱- ۶ : زیر حلقه I از حلقه دلخواه R رایک ایده آل راست می نامند هرگاه :

$\forall r \in R, \forall a \in I \qquad a.r \in I$

به همین نحو I را ایده آل چپ حلقه R می نامند در صورتی که

$\forall r \in R, \forall a \in I \quad , r.a \in I$

واضح است که اگر حلقه R تعویض پذیر باشد آنگاه هر ایده آل راست در حلقه R یک ایده آل چپ در آن نیز است .

تعریف ۱-۷ : حلقه R را ساده گویند هرگاه دارای هیچ ایده آل غیر بدیهی نباشد .

تعریف ۱-۸ :

هرگاه R یک حلقه ای تعویض پذیر ویکدار باشد در صورتی که هر ایده آل R یک ایده آل اصلی باشد آنگاه R را یک حلقه ایده آل های اصلی می نامند و در صورتی که R یک حوزه درست باشد آنگاه R را یک حلقه درست با ایده آل اصلی می خوانند .

مثال : حلقه $(Z,+,.)$ یک حلقه ایده آل های اصلی است .

تعریف ۱-۹ : (ایده آل ماکسیمال)

در حلقه تعویض پذیر R ایده آل M را ایده آل ماکسیمال می نامند هرگاه :

$$\forall N \leq R, M \subseteq N \subseteq R \Rightarrow M=N \quad \text{or} \quad M=R$$

مثال : در حلقه Z ایده آل $M=(p)$ که در آن p عددیست اول ، یک ایده آل ماکسیمال است .

پوچ رادیکال یک ایده آل :

تعریف ۱-۱۰ : هرگاه R حلقه ای تعویض پذیر و I ایده آل از حلقه R باشد ، در این صورت پوچرادیکال I را با نماد $\sqrt{I}$ نمایش داده که بصورت زیر تعریف می شود :

$$\sqrt{I}=\{a\in R:\exists n\in N, a \text{ وابسته به } \quad s.t\ a^n \in I\}$$

تعریف ۱-۱۱ : ایده آل I از حلقه R را ایده آل پوچ می نامند، هرگاه همه عناصر I پوچ توان باشد

$$\forall a\in I \qquad \exists n\in N \qquad s\cdot t \qquad a^n=0$$

تعریف ۱-۱۲ : ایده آل I از حلقه R را ایده آل پوچ توان می نامند هرگاه

$$\exists n\in N \qquad s\cdot t \qquad I^n=\{0\}$$

مثال : در حلقه Z_8 ایده آل $I=\{0,2,4\}$ یک ایده آل پوچ توان است ، زیرا $I^3=\{0\}$

بطورکلی درحلقه $Z_p{}^n$ که درآن p عددی اول و $n\succ 1$ ، ایده آل $(p)=p.Z_p{}^n$ ، ایده آل پوچ توان‌است.

تعریف ۱- ۱۳ : یک ایده آل P از حلقه جابجایی یکدار R اول نامیده می شود ، هرگاه $ab\in p$ که $a,b\in R$ آنگاه یکی از a یا b عضو p باشد .تعریف کلی تری از ایده آل اول بصورت زیر می باشد :

یک ایده آل P از حلقه جابجایی یکدار R را اول گوییم هرگاه $P\neq R$ و به ازای هر ایده آل B,A در R؛

$$AB\subset P \Rightarrow B\subseteq P \quad or \quad A\subseteq P$$

تذکر ۱-۱۴ : واضح است که هر ایده آل اول یک ایده آل اولیه است زیرا اگر قرار دهیم :

$$a,b\in Q \quad \Rightarrow a\in P \quad or \quad b\in P$$
$$\Rightarrow a\in P \quad or \quad b\in P\subset\sqrt{P}$$

رادیکال جیکوبسن :

تعریف ۱-۱۵ : هرگاه R حلقه تعویض پذیر و یکدار باشد آنگاه رادیکال جیکوبسن R را که به صورت radR نشان می دهند عبارتند از : $rad\, R = \cap \{M,$ است R یک ایده آل ماکسیمال $M\}$

در صورتی که داشته باشیم $radR = \{o\}$ انگاه R را نیم ساده می نامند .

مثال : $(Z,+,o)$ یک حلقه ایده آل اصلی است و ایده آل $I=(n)$ درآن ماکسیمال است اگروفقط اگر n عددی اول باشد ، اکنون می نویسیم $rad\, Z = \cap \{(n)$ و n عددیست اول؛$\}$

اما می دانیم عدد صحیح غیر صفری که بر تمامی اعد اد اول بخش پذیر باشد وجود ندارد ، زیرا بایستی داشته باشیم $rad\, Z = \{o\}$ یعنی Z یک حلقه نیم ساده است .

تعریف ۱- ۱۶ : فرض کنید R حلقه باشد ، R هم ایده آل چپ ماکسیمال دارد و هم ایده آل راست ماکسیمال . اشتراک ماکسیمال های چپ ماکسیمال R را با $J_L(R)$ و اشتراک راست ماکسیمال R را با $J_L(R)$ نمایش می دهیم ؛ یعنی :

$J_L(R) = \cap \{m|$ است R ایده آل چپ ماکسیمال $m\}$ $J_r(R) = \cap \{m|$ است R ایده آل راست ماکسیمال $m\}$

پوچ ساز:

تعریف ۱ -۱۷ : فرض کنید M ، R- مدولی دوری باشد پس عضوی مثل x از M موجود است که $M= Rx$. تابع $\varphi: R \to M$ را بصورت $\varphi(r)= rx$ تعریف می کنیم .

واضح است که φ، R هم ریختی ای پوشا مدول چپ R به R– مدول، M است .

هسته φمجموعه ی :

$$\ker \varphi = \{r \in R : rx = 0 \}$$

است که در نظریه مدول ها نقش ویژه ای را بازی می کند که به آن مجموعه پوچ ساز x گویند وآن را با $L(x)$ نشان می دهند.

تـــذکر ۱-۱۸ : $L(x)$ زیـر مـدولی از R مـدول چـپ R اســت ، بنـابراین ایـده آل چپـی از حلقه R می‌باشد.

تذکر ۱-۱۹ : لزومـی نـدارد کـه پـوچ سـاز را فقـط بـرای مولـد R– مـدول دوری تعریـف کنـیم . اگر I ایده‌آل چپی از R باشد و $x \in M$ (M یک R– مدول دلخواه)

$$L(x) = \{r \in I : r\, x = 0 \}$$

و پوچ ساز M در I را نیز با $L_I(M)$ نمایش وتعریف می کنیم .

$$L(M) = L_I(M) = \bigcap_{x \in M} L_I(x) = \{ r \in I : rx = 0 ,\ x \in M \quad \text{برای هر} \}$$

تعریف ۱- ۲۰: فرض کنید M ، R – مدولی غیر صفر باشد Mرا ساده می نامیم هرگـاه o,M تنهـا زیر مدول های M باشند .

قضیه ۱–۲۱ : فرض کنید R حلقه باشد ، در این صورت :

$$J_L(R) = \cap\, L(\mathrm{M})$$

مدول – R, M

چپ ساده است

$$J_r(R) = \cap\, L(\mathrm{M})$$

مدول – R,M

راست ساده است

تعریف ۱–۲۲ : فرض کنید R حلقه باشد ، رادیکال جیکوبسن حلقه R که با J(R) نمایش می‌دهیم

$$J(R) := J_L(R) = J_r(R)$$

رادیکال پوچ حلقه ها :

تعریف ۱–۲۳: فرض کنید R حلقه ای جابه جایی و I ایده آلی از R باشد . رادیکال I را که با $\sqrt{I}$

نمایش می دهیم ، به صورت : $\sqrt{I} = \{ r \in R : r^n \in I,\ n$ به ازای عدد طبیعی مثل $\}$

تعریف می‌کنیم. بالاخص $\sqrt{o}$ را با NiL (R) نمایش می‌دهیم و آن را رادیکال پوچ حلقه Rمی‌نامیم.

در واقع : $NiL(R) = \{ r \in R : r^n = o, n$ به ازای عدد طبیعی مثل $\}$

مجموعه تمام اعضای پوچ توان R است .

تذکر ۱-۲۴ : به ازای هر ایده ال از حلقه جابه جایی R مثل I ، $\sqrt{I}$ ایده آلی از R است بالاخص رادیکال پوچ R نیز ایده آل از حلقه R است .

قضیه ۱- ۲۵ : فرض کنیدR حلقه جابه جایی باشد ، I ایده آلی سره از آن در این صورت ،

$$\sqrt{I} = \bigcap_{P \in \text{spec}(R)} P$$

که در آن spec (R) مجموعه تمام ایده آل های اول تمام حلقه R است . بالاخص :

$$NiL(R) = \bigcap_{P \in \text{spec}(R)} P \quad ,$$

هم ریختی ها :

تعریف ۱-۲۶ : فرض کنید M,N دو R – مدول باشند، تابع$\varphi: M \to N$ را R- هم ریختی می نامیم

هرگاه ۱) برای هر $x, y \in M$ $\quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$

۲) برای هر $x \in M$, $r \in M$, $\quad \varphi(rx) = r\varphi(x)$

تعریف ۱-۲۷ : فرض کنید M,Nدو R – مدول باشند ، مجموعه تمام R- هم ریختی های از M به N را با $Hom_R(M,N)$ نمایش می دهیم . یعنی :

$$Hom_R(M,N) = \{\varphi : R \text{ همریختی است } \varphi: M \to N\}$$

به آسانی می توان نشان داد که این مجموعه با عمل جمع معمولی توابع یک گروه آبلی است در نتیجه : $Hom_R(M,N)$ یک Z- مدول است .

قضیه ۱-۲۸ : فرض کنید R حلقه جابه جایی باشد وM,N دو R – مدول باشند ، در این صورت $Hom_R(M,N)$ ساختار R- مدولی است .

مدول آزاد :

مدول ها تعمیم فضای برداری هستند . در واقع اگر در تعریف R – مدول ، به جای حلقه R میدان F را جایگزین کنیم آنچه بدست می آید F- فضای برداری است .

تعریف ۱-۲۹: فرض کنیدF، R – مدول باشد ، مجموعه مولد X برای F را پایه برای F می نامیم هرگاه مستقل خطی باشد، یعنی به ازای هرn عضو از X که متمایز باشند ،مثل $x_1 , . . . ,x_n$ و هر n عضو ازR مثل $r_1 , . . . , r_n$ ، $\sum_{i=1}^{n} r_i x_i = 0$ نتیجه دهد $r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$

تعریف ۱-۳۰: فرض کنیدF ، R – مدول باشد . F را آزاد می نامیم هرگاه F پایه داشته باشد .

نتیجه ۱-۳۱:هرفضای برداری ، به عنوان مدول ، آزاد است .

تذکر ۱- ۳۲ : به راحتی می توانیم به Z_2,Z_3 ساختار Z_6 - مدولی نسبت دهیم که هیچ کدام به عنوان Z_6 – مدول،آزاد نباشند . در نتیجه ،چنین نیست که تمام مدول ها آزاد باشند ، یعنی پایه داشته باشند .

مدول ساده ونیم ساده :

مدول ساده ۱-۳۳ : فرض کنید M ، R- مدولی غیر صفر باشد M راساده گویند اگر تنها زیرمدول‌های آن o,M باشند .

مثال ۱-۳۴ : فرض کنید p عددی اول باشد ، دراین صورت گروه آبلی $Z/pZ=Z_p$ زیرگروه غیربدیهی ندارد .وقتی Z_p را به عنوان Z- مدول در نظر می گیریم ، زیرمدول هایش حقیقاً همان زیرگروه های Z_p ، به عنوان گروه هستند . پس Z_p بعنوان Z- مدول ،زیرمدول غیر بدیهی ندارد ودرنتیجه Z_p به عنوان Z- مدول، ساده است .

قضیه ۱-۳۵ : فرض کنیدM ، R- مدول غیر صفر باشد در این صورت شرایط زیر معادل اند :

۱) M ، R- مدول ساده است .

۲) M دوری است وهرعضو غیر صفرش مولدی از آن است .

۳) ایده آل چپ ماکسیمالی ازR مثل m موجود است که $M \cong \frac{R}{m}$.

اثبات قضیه : (۲)$\rightarrow$ (۱) فرض کنید x عضوی دلخواه و غیرصفر ازM باشد .دراین صورت Rx، زیرمدولی غیرصفر از M است وچون M ساده است ، لذا لزوماً $M=Rx$.این نشان می دهد که M دوری است و هر عضو غیرصفراز آن مولدش است .

(۳) $\rightarrow$ (۲) : فرض کنید x عضوی دلخواه وغیر صفرازMباشد. در این صورت $M=Rx$ و چون $Rx \cong R/Ann(x)$, $M \cong R/Ann(x)$ یا با فرض $m:=Ann(x)$ ، $M \cong R/m$. حال ثابت می کنیم m اید ه ال چپ ماکسیمالی از R است .

ایده آل چپ بودن m واضح است .

برای اثبات ماکسیمال بودنش ، فرض کنید I ایده آل چپ دیگری از R باشد و $m \subseteq I \subseteq R$.از $m \subseteq I$ نتیجه می گیریم که عضوی از I مثل r موجود است که عضو m نیست .پس $rx \neq o$ و درنتیجه بنا به فرض rx مولدی برای M است ، یعنی $M=R(rx)$.

در نتیجه با توجه به اینکه x عضوی از M است باید عضوی از R مثل s موجود باشد که $x=srx$.

تساوی اخیر ایجاب می کند که $(1-sr)x=o$ ، پس $1-sr \in m \subseteq I$ که چون $sr \in I$ نتیجه می‌دهد $1 \in I$ یا $I=R$. پس لزوماً ایده آل چپ ماکسیمالی از R است .

(۱) ← (۳) ، R/m به عنوان حلقه ، ایده آل چپ غیربدیهی ندارد پس R/m ،R- مدول زیرمدولی غیربدیهی ندارد . چون $M \cong R/m$، M زیرمدول غیر بدیهی ندارد، یعنی ساده است .

تعریف ۱-۳۶:

$Hom_R(M,M)$ ساختار گروه آبلی دارد. این گروه را با $HOm_R(M,M) := E_R(M)$ نمایش می دهیم و به آن گروه درون ریختی M می گوییم .به راحتی می توانیم بررسی کنیم که $E_R(M)$ با عمل ترکیب توابع، به حلقه یکدار تبدیل می شود .

لم شور ۱-۳۷:

فرض کنید M ،R- مدولی ساده باشد . در این صورت $E_R(M)$ حلقه تقسیم است .

برهان: می دانیم $E_R(M)$ حلقه ای یکد اراست . اگر φ عضو غیرصفر از $E_R(M)$ باشد ،R- یکریختی است. (زیرا M، R مدولی ساده وهرR- همریختی از M به Mیا R-همریختی صفر است و یا R- یک‌ریختی است.) پس $\varphi^{-1} : M \to M$ عضوی از $E_R(M)$ است و $\varphi\varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = 1_M$، در نتیجه φ وارون پذیر است .چون هر عضو غیرصفر $E_R(M)$ وارون پذیر است ، $E_R(M)$ حلقه تقسیم است .

مدل های نیم ساده :

تعریف ۱-۳۸: فرض کنید M ، R – مدول باشد . Mرا نیم ساده می گوییم هرگاه به ازای هر زیرمدول از M مثل K ، زیرمدولی ازM مثل P موجود باشد که $M = K \oplus P$.

تذکر ۱-۳۹ :توجه کنید که هر مدول ساده ، نیم ساده است و همچنین ،مدولo که ساده نیست ، نیم‌ساده است. فضاهای برداری متناهی بعد نیز ، به عنوان مدول ، نیم ساده هستند .

قضیه ۱-۴۰ : فرض کنیدM ،R- مدولی نیم ساده باشد در این صورت ، هرزیر مدول از M و هر مدول خارج قسمتی ازM نیز نیم ساده است .

قضیه ۱-۴۱ : فرض کنیدR حلقه باشد .دراین صورت شرایط زیرمعادل اند .

۱) R حلقه ای نیم ساده است ،

۲) هرR- مدول انژکتیو است .

مدول های تاب دار :

قضیه ۱-۴۲ : فرض کنیم A یک مدول چپ روی دامنه صحیح R بوده وبه ازای هر $a\in A$ ،

$$O_a=\{r\in R \mid ra=o\}$$

۱) به ازای هر $a \in A$ ، O_a ایده آلی از R است .

۲) $A_t=\{ a \in A \mid O_a\neq o \}$ زیرمدولی ازA است .

۳) به ازای هر$a\in A$ یک یکریختی از مدول های چپ مانند $R/O_a \cong Ra = \{ra \mid r \in R\}$