C^*-جبر نیم‌گروهی از ایزومتری های جزئی

توسط

خیرالنسا انصار

رسالهٔ ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجهٔ

کارشناسی ارشد ریاضی محض آنالیز

زیر نظر

دکتر محمدرضا میری

۱۰ بهمن ۱۳۸۹

دانشکدهٔ ریاضی

دانشگاه بیرجند

بیرجند

قدردانی

تقدیم به پدر عزیزم که مهربانی اش بی دریغ بود و دلتنگی اش برایم بی پایان

و

تقدیم به مادرم، امیدم، شادیم، آرامشم، همه ي هستیم

تمام موفقیت هایم را مرهون دعاهاي تو هستم مادر.... و

تقدیم به برادران و خواهران مهربانم

C^* -جبر نیم‌گروهی از ایزومتری های جزئی

چکیده

در این پایان‌نامه C^*- جبر پوش وابسته به یک عمل جزئی از یک گروه گسسته شمارش‌پذیر روی فضای موضعاً فشرده به عنوان C^*- جبر گروهوار شرح داده شده است و نیز نشان داده شده است که C^*- جبر وابسته است به یک نیم‌گروه از ایزومتری‌های جزئی یک پارامتری که به طور قوی پیوسته هستند که توسط C^*- جبر گروهوار یا همان $C^*(\mathcal{G})$ معرفی می‌شوند. و یک تناظر یک به یک بین نمایش ناتباهیدگی از $C^*(\mathcal{G})$ و نیم‌گروهها ثابت شده است همچنین ثابت شده است که $C^*(\mathcal{G})$ شامل ایده آل J با $C_\circ((\circ, \infty), \mathcal{K})$ ایزومورفیک است و $C^*(\mathcal{G})\backslash J \simeq C_\circ(\mathbb{R})$ که درآن $\mathcal{K}$ جبر عملگرهای فشرده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: *نیم‌گروه، ایزومتری‌های جزئی، گروهوار، C^*- جبر گروهوار، نمایش*

فهرست مطالب

پیشگفتار:

بیش از بیست سال پیش روشهای جبر باناخ با موفقیت چشمگیری برای مطالعه معادله‌های وینر-هوپف استفاده شده است یعنی معادله‌هایی به شکل

$$[I + w(f)]\xi = \eta$$

دلیل بسیاری از این موفقیت‌ها بر اثر تولید یک C^*- جبر به‌وسیله همه $w(f)$ ها می‌باشد.
در طی ده سال گذشته علاقه برای یافتن ساختاری از C^*- جبرهای تولید شده توسط حاصل ضرب عملگرهای $Wiener - Hopf$ بیشتر شده است. [۸]
بیشترین استراتژی برای مطالعه C^*- جبرها روی سیستم‌های دینامیکی می‌باشد که تلفیقی از جبر و توپولوژی است اغلب در قالب گروهوار اتال یا گروهوار مجزا ارائه می‌شوند.
در فصل اول این پایان‌نامه به تعاریف و مفاهیم مورد نیاز در فصل‌های بعدی می‌پردازیم.
در فصل دوم نیم‌گروههای یک پارامتری روی فضای باناخ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و در فصل سوم گروهوار را معرفی می‌کنیم و ساختار آن روی C^*- جبرها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و C^*- جبر پوش از آن به عنوان C^*- جبر گروهوار بدست می‌آوریم نهایتاً در فصل آخر ارتباط یک C^*- جبر گروهوار و نیم گروه یک پارامتری از ایزومتری‌های جزئی را بیان خواهیم کرد. عمده مطالب این پایانامه از [۱۰] و [۱۱] و [۸] استفاده شده است.

فصل ۱

تعاریف ومفاهیم اولیه

دراین فصل تعاریف و مفاهیم مورد نیاز درفصل‌های بعدی را ارائه می‌دهیم.

۱.۱ C^*- جبر

تعریف ۱.۱.۱. جبر نرم‌دار A روی میدان F که توسط نرم $\| . \|$ فضای باناخ باشد، به قسمی که برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم:

$$\| ab \| \leqslant \| a \| \| b \|$$

جبر باناخ می‌نامیم.

مثال ۱.۱.۱. یک کلاس مهم از جبرهای باناخ، جبر همه توابع پیوسته(حقیقی یا مختلط مقدار)روی فضای هاسدورف فشرده است. اعمال جبری آن جمع و ضرب نقطه به نقطه

از توابع است. اگر X فضای هاسدورف فشرده باشد این جبر را با $C(X)$ نشان می‌دهیم . $C(X)$ با نرم زیر یک فضای باناخ است.

$$\| f \| = \sup\{| f(x) | \ : \ x \in X\}$$

البته همانی $C(X)$ تابع ثابت ۱ است و۱ $= \| 1 \|$ همچنین

$$\| f.g \| = \sup\{| f(x) | . | g(x) | \ : \ x \in X\} \leqslant \sup\{| f(x) | \ : \ x \in X\}. \sup\{| g(x) | \ : \ x \in X\} = \| f \| . \| g \|$$

پس از مطالب بالا و این حقیقت که $C(X)$ با نرم داده شده یک فضای باناخ است نتیجه می‌گیریم که $C(X)$ یک جبر باناخ است.

تعریف ۲.۱.۱. یک کامل سازی برای فضای خطی نرم‌دار X، یک فضای باناخ Y است به قسمی که یک یکریختی طولپا از X به توی زیر فضای خطی چگالی از Y وجود داشته باشد.

تعریف ۳.۱.۱. یک برگشت جبری روی A نگاشت $x \longmapsto x^*$ از A به A که برای هر $x, y \in A, \lambda \in \mathbb{C}$ در روابط زیر صدق کند:

۱) $(x + y)^* = x^* + y^*$

۲) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

۳) $(xy)^* = y^* x^*$

۴) $x^{**} = x$

صدق می‌کند وجبر مجهز به یک برگشت، یک $*$- جبر نامیده می‌شود و $*$- جبر باناخ که در رابطه $\forall x \quad \| x \|^{۲} = \| xx^* \|$ صدق کند یک C^*- جبر نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱.

تعریف ۵.۱.۱. جبر A همراه با یک برگشت را $*$- جبر (جبرستاره) گویند همچنین جبر نرم‌دار روی اعداد مختلط به همراه یک بر گشت جبری را $*$- جبر نرم‌دار می‌نامیم. درنهایت هر $*$- جبر نرم‌دار کامل را، $*$- جبر باناخ گوییم.

تعریف ۶.۱.۱. یک $*$- جبر باناخ که $(x \in A) \quad \| x \|^{۲} = \| x^*x \|$ را یک B^*- جبرگوییم.

تعریف ۷.۱.۱. فضای باناخ متشکل از همه‌ی عملگرهای خطی وکراندار روی فضای هیلبرت H را با نماد $B(H)$ نشان می‌دهیم هر $*$- زیرجبر بسته از هر $B(H)$ را یک C^*- جبر گوییم. هر C^*- جبر یک B^*- جبر است و بالعکس. پس هر B^*- جبر و C^*- بیانگر یک مفهوم هستند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض می‌کنیم A جبری همراه با یک برگشت باشد زیر مجموعه M از A راخود الحاق می‌نامیم اگر نسبت به $*$ بسته باشد یعنی برای $a \in M$ نتیجه دهد $a^* \in M$.

مثال ۲.۱.۱.

۱. اگر H یک فضای هیلبرت باشد $B(H)$ مجموعه‌ی عملگرهای کراندار روی H با عمل الحاق به عنوان برگشت یک C^*- جبر است.

۲. جبر باناخ $C(X)$ متشکل از همه‌ی توابع پیوسته مختلط مقدار روی فضای هاسدورف فشرده X یک C^*- جبر است با عمل برگشت $f \longmapsto \bar{f}$ به‌طوری‌که f تابع مختلط مزدوج f است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض می‌کنیم A, B دو C^*- جبر باشند نگاشتی مانند $\phi : A \longrightarrow B$ را $*$- همریختی می‌نامیم اگر همریختی بوده یعنی خطی وضربی باشد و علاوه بر این داشته باشیم :

$$\phi(a^*) = \phi(a)^* \qquad \forall a \in A$$

اگر A, B یکدار باشند، گاهی اوقات به تعریف $*$- همریختی شرط $\phi(1_A) = 1_B$ اضافه می‌شود و نیز $*$- همریختی‌های یک به یک را $*$- یکریختی می‌نامیم.

قضیه ۱.۱.۱. *اگر φ یک $*$- همریختی از $*$- جبر باناخ A به توی C^*- جبر B باشد آنگاه :*

$$\| \varphi(x) \| \leq \| x \| \qquad (\forall x \in A)$$

برای اثبات به (۲.۲۴.۴) از [۹] رجوع شود.

نکته: اگر برگشت پیوسته باشد (درحالت خاص اگر A یک $*$- جبر باشد) بستار یک $*$- زیرجبر نیز یک $*$-زیرجبر است واضح است که $*$- زیرجبر بسته B از A که شامل عضو همانی A است خود یک جبر باناخ با برگشت است اگر A یک C^*- جبر باشد آنگاه B نیز چنین است. دراین حالت B را یک C^*- زیرجبر A می‌نامند.

تعریف ۱۰.۱.۱. هر زیرجبر خود الحاق جبر باناخ A یک $*$- زیرجبر از A نامیده می‌شود و یک $*$- زیرجبر بسته از C^* - جبر A را یک C^*- زیرجبر از A می‌نامیم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم A یک C^*- جبر باشد نمایشی از A روی فضای هیلبرت مانند H یک $*$- همریختی مانند:

$$\phi : A \longmapsto B(H)$$

است اگر یک به یک باشد، نمایش صادق نامیده می‌شود .

قضیه ۲.۱.۱. *هر C^*- جبر A دارای نمایشی صادق است.*

برای اثبات به (۴.۱.۸) از [۹] رجوع شود.

تبصره ۱. قضیه‌ی اخیر بیان این مطلب است که هر C^*- جبر با یک C^*- زیرجبر بسته از $B(H)$، فضای توابع خطی وکراندار روی یک فضای هیلبرت مانند H یکریخت است. بنابراین از این پس گاهی عناصر یک C^*- جبر را به عنوان عملگرهای روی یک فضای هیلبرت در نظر می‌گیریم.

تعریف ۱۲.۱.۱. اگر بردار x در H زیر فضای خطی

$$\varphi(U)x = \{\varphi(a)x : a \in U\}$$

و چگال در H باشد، آنگاه φ را یک نمایش دوری(مدار) و x را یک بردار دوری برای φ می‌نامند.

تعریف ۱۳.۱.۱. دو نمایش $(H_۱, \varphi_۱), (H_۲, \varphi_۲)$ از C^*- جبر A هم‌ارز یکانی هستند اگر یک عملگر یکانی $U : H_۱ \longrightarrow H_۲$ موجود باشد به‌طوری‌که $\varphi_۲(a) = U\varphi_۱(a)U^*$ برای $a \in A$

هم‌ارز یکانی یک رابطه هم‌ارزی است .

تعریف ۱۴.۱.۱. عنصر U یکانی است اگر $UU^* = U^*U = I$ و اگر $U^*U = I$ آنگاه U یک ایزومتری است و اگر $UU^* = I$ آنگاه U یک کوایزومتری می‌باشد.

قضیه ۳.۱.۱. *فرض کنید A, B $*$- جبر باشند و φ یک $*$- همریختی از A به B باشد آنگاه برای هر $x \in A$ داریم :*

$$\parallel \varphi(x) \parallel \leqslant \parallel x \parallel \text{ و}$$

$$sp(\varphi(x)) \subseteq \varphi(x)$$

خصوصاً φ پیوسته است همچنین اگر φ یک $*$- یکریختی باشد آنگاه $\parallel x \parallel = \parallel \varphi(x) \parallel$.

برای اثبات به (۴.۱.۹) از [۹] رجوع شود.

قضیه ۴.۱.۱. *اگر A, B C^*- جبر باشند و φ یک $*$- همریختی از A به B آنگاه $\varphi(A)$ یک C^*- زیرجبر از B است.*

برای اثبات به (۴.۱.۹) از [۹] رجوع شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. نمایش φ از C^*- جبر A روی H را نمایش ناتباهیده گویند اگر برای هر ξ غیر صفر در H عضو x در $\varphi(A)$ موجود باشد به قسمی که $x\xi \neq 0$ باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر A یک C^*- زیر جبر از $B(H)$ باشد A را تحویل ناپذیر می‌نامیم اگر تنها زیرفضاهای پایای آن ۰ یا $B(H)$ باشند.

تعریف ۱۷.۱.۱. اگر $\varphi_{i\in I}$ خانواده‌ای از نمایش‌ها از یک C^*– جبر A روی فضای‌های هیلبرت H_i باشند، آنگاه جمع مستقیم این خانواده نمایش φ از A روی H است که :

$$H = \sum_{i\in I} H_i \qquad , \qquad \varphi = \sum_{i\in I} \varphi_i$$

یعنی $(\sum_{i\in I} \varphi_i)a)(\sum_{i\in I} \xi_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(A)\xi_i$، برای هر $a \in A$ و $\xi \in H_i$ که ξ_i است.

تعریف ۱۸.۱.۱. عضو A از C^*- جبر U را مثبت می‌گویند اگر A خود الحاق باشد و $sp(A) \subseteq [0, \infty)$ اگر A مثبت باشد می‌نویسیم $A \geq 0$.

حال فرض کنید که M زیرفضای خود الحاق از U باشد که شامل همانی I از U است بنابراین $M^+ = \{A \in M; A \geq 0\}$.

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید U یک C^*- جبر باشد نرم $\| \ . \ \|_*$ روی U را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\| A \|_* = sup\{\| \varphi(A) \| : A \in U\}$$

که φ نمایشی از U باشد. از قبل داریم که برای هر $A \in U$ کامل سازی U تحت $\| \ . \ \|_*$ یک C^*- جبرمی‌باشد این C^*- جبر را C^*- جبر پوش می‌نامند و با $C^*(U)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید G یک گروه موضعاً فشرده باشد. همچنین فرض کنید μ یک اندازه‌ی رادون غیر صفر روی G باشد. آنگاه μ را یک اندازه‌ی هار چپ یا به‌طور ساده یک اندازه هار است اگر تحت تبدیل چپ پایا باشد یعنی

$$\mu(SE) = \mu(E)$$

برای هر $S \in G$ و هر مجموعه‌ی برل E. به طور مشابه اندازه هار راست را روی G می‌توان تعریف کرد.

تعریف ۲۱.۱.۱. یک همریختی پیوسته Δ به نام تابع مدولار از G به اعداد حقیقی مثبت را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\mu(SE) = \Delta(S)\mu(E)$$

برای هر $S \in G$ و هر مجموعه برل E.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنید G گروه موضعاً فشرده با اندازه هار چپ μ و تابع مدولار Δ باشد. فرض کنید که $L^1(G)$ فضای باناخ از همه‌ی توابع انتگرال‌پذیر روی G (از G به $\mathbb{C}$) باشد که نسبت به اندازه هار چپ با نرم زیر مجهز می‌شود

$$\| f \|_{۱} = \{\int_G | f(s) | d\mu(s) : f \in L^{۱}(G)\}$$

یک ضرب و یک برگشت روی $L^{۱}(G)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$(f * g)(t) = \int_G f(s)g(s^{-۱}t)d\mu(s) \quad : \ f, g \in L^{۱}(G)$$

$$f^*(t) = \Delta(t)^{-۱}\overline{f(t^{-۱})}$$

آنگاه $L^{۱}(G)$ یک جبر باناخ با برگشت است. همچنین $L^{۱}(G)$ یک C^*- جبر است .

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر G گسسته باشد $L^{۱}(G)$ را با $l^{۱}(G)$ نشان می‌دهیم که شامل همه‌ی توابع مختلط f روی G است به‌قسمی‌که در شرط زیر صدق کند :

$$\| f \| = \sum_{g \in G} \|f(g)\| < \infty$$

قوانین ضرب و بر گشت به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(f_{۱}.f_{۲})(g) = \sum_{h \in G} f_{۱}(h)f_{۲}(h^{-۱}g)$$

$$f^*(g) = \overline{f(g^{-۱})}$$

تعریف ۲۴.۱.۱. C^*- جبر پوش از $L^{۱}(G)$ C^*- جبر گروهی از G است و با $C^*(G)$ نمایش داده می‌شود یعنی $C^*(G)$ کامل سازی $L^{۱}(G)$ تحت نرم $\| . \|_*$ است که

$$\| f \|_* = sup\| \pi(f) \|$$

که π روی همه‌ی نمایش‌های $L^{۱}(G)$ می‌چرخد.

تعریف ۲۵.۱.۱. یک نمایش یکانی U از G روی فضای هیلبرت H یک همسانریختی $U(t) \longrightarrow t$ از G به گروه یکانی $U(H)$ از $B(H)$ است که در توپولوژی ضعیف یا

قوی عملگری پیوسته است . $U(H)$ در این تعریف، متشکل از همه‌ی عضوهای یکانی $B(H)$ است که تشکیل گروه می‌دهد باید توجه کنیم که توپولوژی‌های عملگری ضعیف یا عملگری قوی روی $U(H)$ برهم منطبق‌اند.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید $L^2(G)$ فضای هیلبرت همه‌ی توابع انتگرال‌پذیر دوم روی G نسبت به اندازه‌ی هار چپ باشد که بوسیله

$$(\lambda(g)f)(h) = f(g^{-1}h) \qquad (h \in G)$$

تعریف می‌شود و

$$\lambda : G \longrightarrow U(L^2(G))$$
$$g \longrightarrow \lambda g$$

یک نمایش صادق از G روی $L^2(G)$ است که نمایش منظم چپ G نامیده می‌شود. λ به طور قوی پیوسته است بنابراین λ یک نمایش یکانی از G است.

تعریف ۲۷.۱.۱. فرض کنید λ یک نمایش چپ منظم از G است نمایش λ به یک نمایش ناتباهیده از $L^1(G)$ توسیع می‌یابد به صورت زیر :

$$\lambda : L^1(G) \longrightarrow B(L^2(G))$$
$$x \longrightarrow \lambda(x)$$

به‌قسمی‌که :

$$(\lambda(x)\eta)(t) = \int_G x(s)\eta(s^{-1}t)ds \qquad \eta \in L^2(G), x \in L^1(G))$$

بستار نرمی $\lambda(L^1(G))$ در $B(L^2(G))$، C^*- جبرگروهی تحویل یافته از G نامیده می‌شود و با $C_r^*(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۸.۱.۱. اگر H فضای هیلبرت و $B(H)$ مجموعه عملگرهای خطی وکراندار روی H باشد T را نیم‌گروه گوییم :

$i)T(0) = I$ (عملگر همانی روی X است I)

$ii)T(s+t) = T(s)T(t) \qquad \forall s,t \geqslant 0$

نیم‌گروه $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ را به‌طور قوی پیوسته یا C_0- پیوسته گوییم هرگاه برای تمام $x \in X$ $lim_{t\longrightarrow 0}T(t)x = x$ وآن را به طور یکنواخت پیوسته می‌نامیم هرگاه:

$$lim_{t\longrightarrow o} \parallel T(t) - I \parallel = 0$$

و عملگر A تعریف شده روی $D(A) = \{x \in X : \quad lim_{t\longrightarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t}\}$ که حد آن موجود باشد با ضابطه $A(x) = lim_{x\longrightarrow 0}\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{dT(t)x}{dt}\ |_{t=0}$ مولد بی‌نهایت کوچک نیم‌گروه $T(t)$ گوییم.

مثال ۳.۱.۱. نیم‌گروه e^{tA} نیم‌گروه قویاً پیوسته می‌باشد.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم F, G دوتابع اندازه‌پذیر لبگ باشند که روی $(-\infty, \infty)$ تعریف می‌شوند تابع $F * G$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(F * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t-s)G(s)ds$$

برای همه‌ی مقادیر که انتگرال روی آن‌ها وجود دارد که تابع $F * G$ تلفیق یا پیچش F, G نامیده می‌شود.

۲.۱ توپولوژی

تعریف ۱.۲.۱. اگر X مجموعه‌ی دلخواهی باشد، گردایه همه‌ی زیر مجموعه‌های آن تشکیل توپوژی‌ای در X می‌دهد که به توپولوژی گسسته موسوم است.
به ازای هر مجموعه دلخواه X گردایه همه‌ی زیر مجموعه‌های یک عضوی X پایه ای برای توپولوژی گسسته در X است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم X,Y دو فضای توپولوژیک باشند توپولوژی حاصلضربی در $X \times Y$ توپولوژِی است که پایه آن گردایه B متشکل از همه‌ی مجموعه‌هایی به‌صورت $u \times v$ است که در آن u زیر مجموعه بازی از v, X زیر مجموعه بازی از Y است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنیم X فضای توپولوژیک باشد. جداسازی از X عبارت است از زوج U,V از زیر مجموعه‌های باز ناتهی از هم جدا شونده X که اجتماعشان مساوی X است. فضای X را همبند خوانند هرگاه برای آن هیچ جداسازی وجود نداشته باشد.

تعریف ۴.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده هاسدورف باشداگر $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ تابعی کراندار باشد آنگاه تعریف می‌کنیم :

$$\parallel f \parallel_\infty = \sup\{|f(x)| \qquad , x \in X\}$$

$\parallel . \parallel_\infty$ یک نرم در فضای توابع کراندار روی X یعنی $B(X)$ است و $(B(X), \parallel . \parallel \infty)$ یک فضای باناخ است همچنین:
$C_b = \{f \in B(X)\ \}$ به‌طوری‌که f پیوسته باشد و $C_\circ(X) = \{f \in C_b\}$ که f در بی‌نهایت صفر می‌شوند.

قضیه ۱.۲.۱. *فرض کنید X یک فضای موضعاً فشرده و $K \subset X$ فشرده باشد. اگر $f \in C(K)$ ، آنگاه وجود دارد $F \in C(K)$ به‌قسمی که $F \mid_K = f$.*

برای اثبات به (۴.۳۴) از [۶] رجوع شود.

۳.۱ گروهوار

تعریف ۱.۳.۱. یک گروهوار، یک مجموعه $\mathcal{G}$ به همراه نگاشت ضرب $(x,y) \longmapsto xy$ از $\mathfrak{G}$ به $\mathcal{G}$ که $\mathfrak{G}$ زیر مجموعه‌ای از $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ که مجموعه جفت‌های ترکیب‌پذیر نامیده می‌شود و نگاشت معکوس $x^{-1} \longrightarrow x$ از $\mathcal{G}$ به $\mathcal{G}$ به‌قسمی‌که در روابط زیر صدق کند :

$i)$ $(x^{-1})^{-1} = x$

$ii)$ اگر $(x,y),(y,z) \in \mathfrak{G}$ آنگاه $(xy,z),(x,yz) \in \mathfrak{G}$ و $(xyz) = x(yz)$

$iii)$ $(x^{-1},x) \in \mathcal{G}$ و اگر $(x,y) \in \mathfrak{G}$ آنگاه $x^{-1}(xy) = y$

$iv)$ $(x,x^{-1}) \in \mathfrak{G}$ و اگر $(z,x) \in \mathcal{G}$ آنگاه $(zx)x^{-1} = z$

اگر $x \in \mathcal{G}$ آنگاه $d(x) = x^{-1}x$ دامنه و $r(x) = xx^{-1}$ برد x نامیده می‌شود

جفت (x,y) ترکیب‌پذیر است اگر و فقط اگر برد y با دامنه x برابر باشد

$\mathcal{G}^{\circ} = d(\mathcal{G}) = r(\mathcal{G})$ فضای یکه‌ی $\mathcal{G}$ نامیده می‌شود که عضوهای آن یکه‌ها هستند بدین معنی که $r(x)x = x, xd(x) = x$

تعریف ۲.۳.۱. یک گروهوار توپولوژیک، یک گروهوار $\mathcal{G}$ به همراه یک توپولوژی سازگار با ساختار گروهواری که در خواص زیر صدق کند :

$i)$ نگاشت $x^{-1} \longrightarrow x$ از $\mathcal{G}$ به $\mathcal{G}$ پیوسته است .

$ii)$ نگاشت $xy \longrightarrow (x,y)$ از $\mathfrak{G}$ به $\mathcal{G}$ پیوسته است که $\mathfrak{G}$ توپولوژی القایی از $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ دارد.

تعریف ۳.۳.۱. فضای همه توابع پیوسته مختلط مقدار روی G با تکیه‌گاه (محمل) فشرده را با $C_c(G)$ نشان می‌دهند یعنی $C_c(G)$ فضای تمام توابع پیوسته $f : G \longrightarrow \mathbb{C}$ است

به‌طوری‌که $suppf = \overline{\{x \in G : f(x) \neq 0\}}$ فشرده باشد.

تعریف ۴.۳.۱. برای $f, g \in C_c(\mathcal{G})$ که $\mathcal{G}$ یک گروهوار توپولوژیک است و برای هر $x \in \mathcal{G}$ تعریف :

$$(f * g)(x) = \sum f(y)g(z)$$

$$f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

که در آن و $\mathcal{G}^2\mathcal{G}^2 \supseteq \mathfrak{G} \ni (y, z)$ و $x = yz$

تحت این اعمال $C_c\mathcal{G}$ یک $*$- جبر توپولوژیک است.

تعریف ۵.۳.۱. برای هر $f \in C_c(\mathcal{G})$ تعریف می‌کنیم :

$$\| f \| := sup \| \pi(f) \|$$

که سوپریمم روی همه‌ی نمایش‌های π از $C_c(\mathcal{G})$ روی فضای هیلبرت H گرفته شده است. C^*- جبر $\mathcal{G}$ که با $C^*(\mathcal{G})$ نمایش داده می‌شود کامل سازی $C_c(\mathcal{G})$ تحت نرم $\| . \|$ است.

فصل ۲

نیم گروه های جزئی یک پارامتری

کوشی در سال ۱۸۳۱در کلاس درس آنالیزش این سوال را مطرح کرد. ″ تمام توابع روی اعداد حقیقی مانند $\phi(x)$ را بیابید که برای هردو عدد حقیقی x, y در رابطه $\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y)$ صدق کند″. با نمادهای مدرن و با حذف شرط پیوستگی این پرسش را می‌توان به صورت زیر بازگو کرد:

تمام توابع $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ را که در شرط

$$\begin{cases} T(s+t) = T(s)T(t) \qquad s, t > 0 \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

صدق می‌کنند را بیابید به وضوح تمام توابع نمایی $t \longrightarrow e^{tA}$ برای همه‌ی اعداد مختلط جواب مسئله بالا هستند. کوشی این حدس را نیز مطرح کرد که تنها توابع نمایی می‌توانند جواب این پرسش باشند اکنون می‌توان سوال کوشی را به صورت کلی زیر مطرح کرد: