دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایاننامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

بسط مجانبی مقادیر ویژه برای مسائل اشتورم ـ لیوویل منظم دارای پارامتر ویژه در شرایط مرزی

اساتید راهنما

آقای دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام

آقای دکتر حسین خیری

پژوهشگر

محمدحسین هاشمی نژاد بوذری

مهر ۱۳۸۸

نام خانوادگی دانشجو: هاشمی نژاد بوذری نام: محمدحسین

عنوان: بسط مجانبی مقادیر ویژه برای مسائل اشتورم ـ لیوویل منظم دارای پارامتر ویژه در شرایط مرزی

اساتید راهنما : آقای دکتر علی‌اصغر جدیری اکبرفام، آقای دکتر حسین خیری

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۸۸ تعداد صفحه: ۸۴

کلید واژه‌ها: مسائل اشتورم ـ لیوویل ، مقادیر ویژه ، پارامتر ویژه ، مجانبی

چکیده

در این پایاننامه بسط مجانبی مقادیر ویژه متناظر با مساله اشتورم ـ لیوویل منظم را به دست می‌آوریم که در شرط مرزی و اولیه آن پارامتر λ مستقل از x ظاهر شده است روش کار مبتنی بر جواب های مجانبی معادله ریکاتی متناظر است که با روش تراجعی جملات آن مشخص شده‌اند در حقیقت هدف ما یافتن جواب مجانبی معادله ریکاتی بر حسب توان های بزرگتر $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ وقتی که $\lambda \to \infty$ می‌باشد.

بسم الله الرحمن الرحیم

معبودم! ای بود و نبودم! خدای من! عشق من! ای برتر از اندیشهٔ ناتوانم! ای همهٔ هستی من! ای زیباترین، ای کاملترین و ای بهترین آفرینندگان! نمی‌دانم کدامین واژه را به کار برم تا از بابت این آرامشی که به من عطا کردی تشکر کرده باشم. یا الهی و ربی من لی غیرک.

درود و سپاس یگانهٔ جاوید را که آرام گیرد دلها با یاد او و آرامش پذیرد پریشان عالمی با نام او. سپاس و صدها سپاس به پاس بهترین نعمتی که به ما عطا فرمودی: نعمت خداوندیت.

می دانم که نخواهم توانست سپاس خود را در قالب کلمات در آورده و شکرگزار تو باشم. لذا از کلام مولای متقیان علی (ع) کمک می گیرم و

«گواهی می‌دهم که خدا یکتاست، انبازی ندارد و بی‌همتاست. گواهیی از روی اعتقاد و ایمان، بی آمیغ برآمده از امتحان؛ و گواهی می‌دهم که محمّد(ص) بندهٔ او و پیامبر اوست. او را بفرستاد با دینی آشکار، و با نشانه‌هایی پدیدار، و قرآنی نبشته در علم پروردگار. که نوری است رخشان، و چراغی است فروزان، و دستورهایش روشن و عیان. تا گَردِ دودلی از دلها بزداید، و با حجّت و دلیل مُلزم فرماید.

پاک خدایا! چه بزرگ است آنچه می‌بینم از خلقت تو؛ و چه خُرد است، بزرگی آن در کنار قدرت تو؛ و چه با عظمت است آنچه می‌بینم از ملکوت تو، و چه ناچیز است برابر آنچه بر ما نهان است از سلطنت تو، و چه فراگیر است نعمت تو در این جهان؛ و چه اندک است در کنار نعمتهای آن جهان.

خدایا! اگر در پرسش خود درمانم یا راهِ پرسیدن را ندانم، صلاحِ کارم را به من نما و دلم را بدانچه رستگاری من در آن است متوجه فرما! که چنین کار از راهنماییهای تو ناشناخته نیست و از کفایتهای تو نه.»

تقدیم به:

مادر

و

پدر عزیزم

تقدیر و تشکر

در طول دوران تحصیلاتم اساتید بسیاری بوده‌اند که هر یک نقش بسزایی در پیشرفت اینجانب داشته‌اند. در این میان اساتیدی نیز هستند که همچون ستاره‌ای تابناک در آسمان علم و دانش و انسانیت درخشیده‌اند و گوشه‌ای از تاریکی جهل مرا به نور علم خود مزین کرده‌اند. می‌دانم که هیچ کلمه‌ای را یارای آن نیست که گوشه‌ای از زحمات اساتید گرانقدرم جناب آقای دکتر جدیری و جناب آقای دکتر خیری همچنین خانواده ایشان را که بارها و بارها از نظر علمی و همینطور روحی و روانی پشتیبان من بوده‌اند، جبران نماید. تنها کاری که می‌توانم در حال حاضر انجام دهم آن است که به این دو استاد گرامی بگویم سپاسگذارم.

همچنین، می‌دانم که تا پایان عمر خود نخواهم توانست ذره‌ای از محبتهای دوست و برادر عزیزم جناب آقای تن آرا را جبران کنم.

بر خود لازم می‌دانم از بابت زحمات اساتید دیگرم از جمله جناب آقای دکتر رحیمی، آقای دکتر شهمراد، آقای دکتر دستمالچی و خانم دکتر بهرامی و دوستانی که در طول دوران تحصیل مشوق من بوده‌اند، تشکر نمایم. در پایان از زحمات جناب آقای دکتر مراثی داور جلسه دفاعیه خود، تشکر می‌کنم.

محمدحسین هاشمی‌نژاد بوذری

مهر ۱۳۸۸

تبریز، ایران

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

برای اکثر معادلات دیفرانسیل و توابع انتگرالی نمی‌توان جواب دقیق پیدا کرد. پیدا کردن جواب دقیق در معادلات به ما کمک می‌کند تا تحلیلی دقیق از آن معادله داشته باشیم اما همیشه این امر میسر نیست، برای حل این مشکل از روش‌های عددی و مجانبی می‌توان استفاده کرد، که روش های عددی بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند.
آنالیز مجانبی شاخه‌ای از آنالیز است که در آن تکنیک‌هایی برای بدست آوردن تقریبی جوابها برای مسایلی که پارامتر یا بعضی از متغیرها در معادلات یا انتگرال ها بزرگ یا کوچک می‌شوند، ارائه می‌شود. اگر چه ایده مجانبی در قرن هیجده و نوزده شناخته شد اما پوانکاره اولین کسی بود که تعریفی از آنچه امروز بسط مجانبی می‌نامیم ارایه کرد.
هدف اصلی در این پایاننامه که پژوهشی مبتنی بر [۵] می‌باشد یافتن توزیع مجانبی مقادیر ویژه مساله اشتورم — لیوویل زیر است:

$$(*)\begin{cases} \tau y := -y'' + qy = \lambda y, \qquad t \in [a,b] \\ a_1 y(a) - a_2 y'(a) = \lambda(a_1' y(a) - a_2' y'(a)), \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0, \qquad \beta \in [0,\pi) \end{cases}$$

که در آن پارامتر ویژه در شرایط مرزی ظاهر شده است. ترتیب ارائه مطالب به شرح زیر می‌باشد:

در فصل ۱ به تعاریف و نتایج اولیه نظریه اشتورم — لیوویل اشاره شده است.

در فصل ۲ توزیع مجانبی مقادیر ویژه معادله

$$y'' + (\lambda x^{\alpha} - q(x))y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0, \quad \alpha > 0, \qquad x \in [0, 1],$$

مورد بررسی قرار گرفته است.

در فصل ۳ توزیع مجانبی مقادیر ویژه مساله $(*)$ مورد مطالعه قرار گرفته است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ مقدمه

نظریهٔ عمومی مقادیر ویژه، توابع ویژه و بسط برحسب توابع ویژه یکی از عمیق‌ترین و غنی‌ترین بخشهای ریاضیات نوین است و محاسبهٔ مقادیر ویژه نقش نسبتاً مهمی در زمینه‌های ریاضی و فیزیک دارد. در فرموله کردن اکثر سیستم‌های فیزیکی مانند پاندلها و میله‌های ارتعاش منجر به معادله اشتورم — لیوویل، با بدست آوردن مقادیر ویژه و توابع ویژه می‌توان این پدیده های فیزیکی را مورد مطالعه قرار داد. در این فصل ابتدا معادلات دیفرانسیل معمولی و مسائل مقدار مرزی [1] سپس مسایل اشتورم ـ لیوویل را معرفی نموده ونظریه‌ها و قضایای مربوطه رامورد مطالعه قرار داده و در آخر تعاریف آنالیز مجانبی را بیان می‌کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل معمولی

بسیاری از قوانین عمومی طبیعت، طبیعی‌ترین بیان خود را در زبان معادلات دیفرانسیل می‌یابند. در هر روند طبیعی، متغیرهای مربوطه و میزان تغییرات آنها به وسیلهٔ اصول علمی حاکم بر آن روند، به یکدیگر مربوط می‌شوند. هنگامی که این ارتباط با علائم ریاضی بیان شود، نتیجه اغلب یک معادله دیفرانسیلی است. اکثر سیستم‌های فیزیکی از طریق همین معادلات دیفرانسیل بیان می‌شوند.

تعریف ۱.۱ هر معادله مشتمل بر یک متغیر وابسته و مشتقاتش نسبت به یک یا چند متغیر مستقل را معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند.

[1] Boundary Value Problems

تعریف ۲.۱ مرتبهٔ هر معادله دیفرانسیل، مرتبهٔ بالاترین مشتق موجود در معادله است.

معادلات دیفرانسیل با توجه به مشتقات در آن، به دو صورت: معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل جزئی هستند که تعریف هر یک را در زیر می آوریم.

تعریف ۳.۱ معادلهٔ دیفرانسیل معمولی یا ODE[2] معادله‌ای است که تنها یک متغیر مستقل در آن وجود دارد و بنابراین تمام مشتقات موجود در آن مشتقات معمولی هستند. فرم کلی معادله دیفرانسیل معمولی به صورت

$$f(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{۱.۱}$$

است که x متغیر مستقل و y متغیر وابسته به x است.

تعریف ۴.۱ معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی یا PDE[3] معادله‌ای است که مشتمل بر بیش از یک متغیر مستقل است. بنابراین مشتقات موجود در آن، مشتقات جزئی هستند.

تعریف ۵.۱ معادله دیفرانسیل معمولی را خطی گویند اگر دارای فرم

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = Q(x)$$

باشد. یعنی معادله نسبت به y و مشتقاتش خطی است.

حل معادله دیفرانسیل معمولی یعنی جستجوی یک تابع نامعلوم که این تابع نامعلوم باید در فرم (۱.۱) صدق کند.

---

[2] Ordinary Differential Equations

[3] Partial Differential Equations

قضیه ۶.۱ (قضیه اساسی وجودی و یکتائی): فرض کنیم تابع $f(x,y)$ دردامنه $D=\{(x,y): a\leq x\leq b\ ,\ -\infty<y<\infty\}$ تعریف شده و پیوسته باشد، که در آن a و b متناهی‌اند، بعلاوه ثابت L چنان وجود داشته باشد که برای هر (x,y) و (x,y^*) متعلق به D داشته باشیم:

$$|f(x,y)-f(x,y^*)|\leq L|y-y^*|$$

در اینصورت، جواب یکتائی از $y'=f(x,y)$ مانند $y(x)$ وجود دارد بطوریکه این جواب در D پیوسته و مشتق‌پذیر است.

اثبات: ر.ک. به [۱۷].

قبل از پرداختن به جزئیات، بعضی علامتها را که مورد استفاده قرار خواهند گرفت، توضیح می‌دهیم.

فرض کنیم I بازه‌ای از اعداد حقیقی با درون غیرخالی بوده و f تابع انتگرال‌پذیر تعریف شده روی I باشد، نماد های زیر را بکار خواهیم برد:

$$C^n(I)=\Big\{f:I\rightarrow R|\ \text{پیوسته است } r=0,1,...,n \text{ برای } I \text{ روی بازه } f^{(r)}\Big\}$$
$$L^1(I)=\Big\{f:I\rightarrow R|\int_I|f(x)|dx<+\infty\Big\}$$
$$L^2(I)=\Big\{f:I\rightarrow R|\int_I|f(x)|^2dx<+\infty\Big\}$$

۳.۱ مسائل مقدار مرزی

مسائل فیزیکی که به جای وابستهٔ زمانی بودن وابستهٔ مکانی هستند، غالباً برحسب معادلات دیفرانسیل با شرایط اعمال شده در بیش از یک نقطه بیان می‌شوند. مسائل مقدار مرزی دو

نقطه‌ای در حالت کلی، شامل یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوم به شکل

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad a \leq x \leq b, \tag{۲.۱}$$

به همراه شرایط مرزی

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta,$$

هستند. شرایطی که تضمین می‌کند مسئله مقدار مرزی فوق دارای جواب است.

قضیه ۷.۱ در مساله مقدار مرزی (۲.۱) فرض کنیم که $f(x, y, y')$ بر روی ناحیهٔ

$$R = \{(x, y, y') : a \leq x \leq b \ , \ -\infty < y < \infty \ , \ \infty < y' < \infty\}$$

پیوسته باشد. بعلاوه $\frac{\partial f}{\partial y}$ و $\frac{\partial f}{\partial y'}$ بر روی R پیوسته باشند هرگاه

۱. به ازای هر $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0 \ , \ \ (x, y, y') \in R$

۲. یک ثابت M وجود داشته باشد که

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')\right| \leq M \ , \quad (x, y, y') \in R \quad \text{به ازای هر}$$

آنگاه مسئله مقدار مرزی مفروض جواب منحصر به فرد دارد.

اثبات : ر.ک. [۱۵].

مثال ۸.۱ مسئله مقدار مرزی

$$y'' + e^{-xy} + \sin y' = 0, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

$$y(1) = y(2) = 0$$

را می‌توان به صورت

$$f(x, y, y') = -e^{-xy} - \sin y',$$

نیز نوشت چون

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') = xe^{-xy} > 0$$

و

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')\right| = |-\cos y'| \leq 1$$

بنابراین مسئله دارای جواب منحصر به فرد است.

نتیجه ۹.۱ اگر مسئله مقدار مرزی

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x), \quad a \leq x \leq b,$$

$$y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta,$$

در شرایط زیر صدق کند:

الف) $p(x), q(x), r(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشند،

ب) $q(x) \geq 0$ بر $[a, b]$.

آنگاه مسئله فوق دارای جواب منحصر بفرد است.

۱.۳.۱ مسائل مقدار مرزی همگن

معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم

$$A(x)u'' + B(x)u' + C(x)u = f(x) \tag{۳.۱}$$

را بر بازه‌ی $[a,b]$ در نظر می‌گیریم. در اینجا فرض می‌شود که توابع A، A'، B، C و f به ازای هر x در این بازه پیوسته باشند و $A(x) > 0$، اگر $A' = B$ آنگاه معادلهٔ (۲.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{d}{dx}\left[A(x)\frac{du}{dx}\right] + C(x)u = f(x) \qquad (۴.۱)$$

معادله (۴.۱) را صورت خودالحاق معادله (۳.۱) می‌نامیم که همواره می‌توان با ضرب طرفین معادله(۳.۱) در $(\frac{1}{A}e^{\int \frac{B}{A}dx})$ به خودالحاق تبدیل کرد.

در این بخش یافتن جوابی از معادله

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = 0, \qquad a \le x \le b, \qquad (۵.۱)$$

با شرایط جدا شدنی

$$B_1(u) = \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0$$
$$B_2(u) = \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0 \qquad (۶.۱)$$

را بررسی می‌کنیم. در اینجا ضرایب α، β، γ و δ ثابت‌های حقیقی هستند و $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ و $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ و همچنین p و q بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته هستند و $p(x) > 0$.

حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که جوابهای مسئله فوق را بدست می‌دهد.

قضیه ۱۰.۱ مسئله (۵.۱) و (۶.۱) دارای جواب غیربدیهی است اگر و تنها اگر برای هر دو جواب مستقل خطی u_1 و u_2 از معادله (۵.۱)، شرط

$$\begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (۷.۱)$$

برقرار باشد. در این حالت همهٔ جوابهای مسئله به صورت $v(x) = Cu(x)$ می‌باشند، که در آن u جوابی غیربدیهی از مسئله و C ثابتی اختیاری است.

اثبات. فرض کنیم u_1 و u_2 بر بازهٔ $[a, b]$ دو جواب مستقل خطی معادله (۵.۱) باشند. وجود این گونه جواب‌ها از شرایط وضع شده، بر p و q و نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی نتیجه می‌شود. همچنین فرض می‌کنیم u یک جواب غیربدیهی مسئله (۵.۱) با مقدار مرزی (۶.۱) باشد. در این صورت ثابت‌هایی مانند C_1 و C_2 که هر دو صفر نیستند وجود دارد، به طوری‌که $x \in [a, b]$ و $u(x) = C_1u_1(x) + C_2u_2(x)$ چون u در شرایط مرزی (۶.۱) صدق می‌کند و به دلیل خطی بودن این شرایط خواهیم داشت:

$$B_1(u) = C_1B_1(u_1) + C_2B_2(u_2) = 0$$
$$B_2(u) = C_1B_2(u_1) + C_2B_2(u_2) = 0 \tag{۸.۱}$$

چون C_1 و C_2 هر دو صفر نیستند، پس دترمینان ضرایب باید صفر باشد؛ یعنی

$$\begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} = 0$$

و این همان شرط (۷.۱) است. □

از طرف دیگر اگر شرط (۷.۱) برقرار باشد، آنگاه هر معادله‌ی (۸.۱) مضرب ثابتی از معادلهٔ دیگر است. بنابراین برای بدست آوردن یک جواب غیربدیهی مسئله، می‌توان یکی از معادلات (۸.۱) را به دلخواه به کار برد. برای مثال، اگر در معادلهٔ اول قرار دهیم $C_1 = B_1(u_2) \quad , \quad C_2 = -B_1(u_1)$ خواهیم داشت:

$$u(x) = B_1(u_2)u_1(x) - B_1(u_1)u_2(x)$$

که جواب غیربدیهی از (۵.۱) و (۶.۱) است. از طرفی، از خطی و همگن بودن معادلهٔ (۵.۱) نتیجه می‌شود که به ازای هر C، $v(x) = Cu(x)$ جوابی از مسئله است. لذا بی‌نهایت جواب غیربدیهی برای مسئله بدست می‌آید.

برای تحقیق درستی آخرین قسمت قضیه، فرض می‌کنیم v جواب دیگری از مسئله باشد. در این صورت چون u و v هر دو در معادلهٔ اول شرایط مرزی (۶.۱) صدق می‌کنند، لذا داریم:

$$\alpha u(a) + \beta u'(a) = 0$$

$$\alpha v(a) + \beta v'(a) = 0$$

که دستگاهی از معادلات همگن برای ثابت‌های α و β است. می‌دانیم که α و β هر دو صفر نیستند. از این رو، دترمینان دستگاه باید صفر باشد؛ یعنی

$$w(u,v,a) = \begin{vmatrix} u(a) & u'(a) \\ v(a) & v'(a) \end{vmatrix} = 0 \tag{۹.۱}$$

این دترمینان رونسکینی[4] u و v در $x = a$ است. اینک یادآور می‌شویم که وقتی رونسکینی دو جواب معادله (۵.۱) در یک نقطه در بازهٔ $[a,b]$ صفر شود، رونسکینی بر این بازه متحد صفر می‌گردد. بنابراین از (۹.۱) نتیجه می‌شود که به ازای هر $x \in [a,b]$ ، $w(u,v,x) = 0$ که در نتیجه u و v دو جواب معادلهٔ (۵.۱) وابسته خطی هستند؛ یعنی $v(x) = Cu(x)$ به ازای ثابت C.

مثال ۱۱.۱ مسئله $u'' + \frac{1}{4}u = 0$ با مقادیر مرزی $u(0) = u(\pi) = 0$ دارای جواب عمومی $u(x) = C_1 \sin\frac{x}{2} + C_2 \cos\frac{x}{2}$ است. بنابراین با فرض اینکه $u_1 = \sin\frac{x}{2}$ و $u_2 = \cos\frac{x}{2}$ است، داریم:

$$\begin{vmatrix} B_1(u_1) & B_1(u_2) \\ B_2(u_1) & B_2(u_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\frac{0}{2} & \cos\frac{0}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

یعنی شرط وجود جواب غیربدیهی برقرار نیست. لذا برای مسئله مفروض جواب غیربدیهی نداریم و این کاملاً با حل مسئله نیز مشخص می‌شود. از شرط $u(0) = 0$ داریم $C_2 = 0$، و از شرط $u(\pi) = 0$ داریم $C_1 \sin\frac{\pi}{2} = 0$ و نتیجه می‌شود $C_1 = 0$ لذا فقط جواب بدیهی $u = 0$ را داریم.

---
[4] Wronskian

۲.۳.۱ مسائل مقدار مرزی ناهمگن

مساله مقدار مرزی

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right] + q(x)u = f(x) \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \qquad (۱۰.۱)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن f بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است.

ابتدا معادله (۱۰.۱) را با این فرض که جواب بدیهی تنها جواب مسالهٔ همگن متناظر آن باشد، در نظر می‌گیریم. در این بخش مشاهده می‌کنیم که اگر قسمت همگن معادلهٔ (۱۰.۱) دارای جواب غیربدیهی باشد آنگاه معادلهٔ (۱۰.۱) یا اصلاً جواب ندارد یا بی‌نهایت جواب خواهیم داشت.

حال قضیه‌ای را ثابت می‌کنیم که جواب مسئله فوق را می‌دهد.

قضیه ۱۲.۱ با به کار بردن روش تغییر پارامترها، نشان می‌دهیم که جواب معادلهٔ (۱۰.۱) به صورت زیر است:

$$u(x) = \int_a^b G(x, \delta) f(\delta) d\delta$$

که در آن

$$G(x, \delta) = \begin{cases} \dfrac{u_1(x)u_2(\delta)}{p(\delta)w(\delta; u_1, u_2)} & a \le x \le \delta \\[2ex] \dfrac{u_1(\delta)u_2(x)}{p(\delta)w(\delta; u_1, u_2)} & \delta \le x \le b \end{cases}$$

و $G(x, \delta)$ به تابع گرین[5] معروف است.

[5] Green Function