وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده متناهی از نگاشت‌ها

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

سجاد زارعی

استاد راهنما: دکتر جمال روئین

شهریور ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به پدر و مادرم

قدردانی و تشکر

خدای بزرگ را شاکرم که به من توانایی و سلامت عطا فرمود تا بتوانم این مرحله از زندگی‌ام را پشت سر بگذارم.

از پدر و مادر فداکارم و برادران و خواهران مهربانم که در تمامی مراحل زندگی پشتیبان و حامی بنده بودند، تشکر می کنم.

از استاد ارجمند جناب آقای دکتر جمال روئین به خاطر زحماتی در طی این سه سال برای من کشیده‌اند و برای من یک الگوی اخلاقی بوده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم. هم‌چنین از تمامی اساتید بخش ریاضی بلاخص از آقایان دکتر زارع نهندی، دکتر ورسائی، دکتر بهرام صادقی بی غم و دکتر میثم نصیری که افتخار شاگردی ایشان را داشتم، سپاسگذاری می‌کنم.

از دوستان عزیزم که در این مدت خاطرات خوبی برای من به وجود آورده‌اند کمال تشکر را دارم.

چکیده

نظریه نقطه ثابت به عنوان یکی از شاخه‌های آنالیز غیرخطی، ابزاری مهم برای حل معادلات غیرخطی است. موضوعی که در این پایان‌نامه مورد مطالعه قرار می‌گیرد، بررسی تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های انقباضی، انقباضی مجانبی، انقباضی مجانبی ناالحاق و انقباضی مجانبی کلی در فضاهای باناخ حقیقی و باناخ به‌طور یکنواخت محدب با استفاده از روش‌های تکراری می‌باشد. بدین‌گونه که یک روش تکراری معرفی شده، سپس قضایای همگرایی روش تکراری به نقطه ثابت مشترک نگاشت‌ها در این فضاها بررسی می‌شود.

واژه‌های کلیدی: نگاشت انقباضی؛ نگاشت انقباضی مجانبی؛ نگاشت انقباضی مجانبی کلی؛ کاملاً پیوستگی؛ خاصیت کادک—کلی؛ به‌طور یکنواخت محدب؛ دمی بسته

فهرست

۲ نگاشت‌های خاص

۳ تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده متناهی از نگاشت‌های انقباضی مجانبی کلی در فضاهای باناخ

۴ تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های مجانبی نا‌الحاق در فضاهای باناخ

مقدمه

آنالیز تابعی غیرخطی، اکنون به شکل یک شاخه بسیار گسترده و فعال با کاربردهای بسیار وسیع در رشته‌های مختلف از جمله فیزیک، شیمی، زیست، مهندسی، آمار، اقتصاد، علوم اجتماعی، پزشکی و... در ریاضیات امروز در دنیا مطرح است. حل بسیاری از مسائل در این رشته‌ها، منجر به حل معادلات غیرخطی می‌شود که به عنوان مثال می‌توان به رفتار مواد پلاستیکی، امواج سطحی سیالات، حرکت سیالات ویسکوز، نوسانات غیرخطی، تابش گرمایی، فرآیندهای درون راکتورهای هسته‌ای و ... اشاره کرد.
به خاطر اهمیت این رشته مشاهده می‌کنیم که در اغلب دانشگاه‌های معتبر دنیا، مراکز تحقیقاتی با این نام یا نام‌های مشابه آن، وابسته به دانشکده‌های مختلف دانشگاه، که لزوماً به بخش ریاضی محدود نمی‌شوند تاسیس شده است و حتی در بعضی موارد به دانشکده‌های اقتصاد و پزشکی وابسته هستند.
با توجه به وسعت مباحث مختلف در آنالیز غیرخطی به اختصار می‌توان از شاخه‌های زیر در این زمینه نام برد؛

- نظریه نقطه ثابت.
- اپراتورهای یکنوا (خطی و غیرخطی)؛ نظریه نیم‌گروه‌ها و معادلات تحولی.
- روش‌های تغییراتی و مسائل بهینه‌یابی.

که بررسی عمقی هر یک از آن‌ها نیاز به گذراندن چندین درس در دوره‌های تحصیلات تکمیلی دارد. لذا ما در این پایان‌نامه به شاخه خاص نظریه نقطه ثابت می‌پردازیم که یک ابزار مهم برای حل معادلات غیرخطی است که توسط باناخ [۱] پایه‌گذاری و به وسیله شاودر، براک، کیرک [۲] و... گسترش یافت. قضیه نقطه ثابت باناخ برای اثبات قضیه پیکارد—لیندلف [۳] در مورد وجود و یگانگی جواب برای معادلات دیفرانسیل و قضیه نقطه ثابت شاودر برای اثبات قضیه پئانو [۵] در مورد وجود جواب برای معادلات دیفرانسیل استفاده شده است. در نظریه نقطه ثابت سه مسئله زیر مطرح هست:

---

[۱] Banach

[۲] Schauder, Bruk, Kirk

[۳] Picard-Lindelof

[۵] Peano

- وجود و یگانگی نقطه ثابت.
- ساختار مجموعه نقاط ثابت.
- روش‌های تقریب نقاط ثابت و همگرایی آن‌ها.

موضوعی که در این پایان‌نامه مورد مطالعه قرار می‌گیرد، بررسی تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های انقباضی، انقباضی مجانبی، انقباضی مجانبی ناالحاق و انقباضی مجانبی کلی در فضاهای باناخ حقیقی و باناخ به طور یکنواخت با استفاده از روش‌های تکراری می‌باشد.
اگر K زیر مجموعه‌ای ناتهی از فضای نرمدار خطی حقیقی E باشد، نگاشت $T: K \to K$ را انقباضی گوئیم هرگاه برای هر x و y متعلق به K، رابطه

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|.$$

برقرار باشد. همچنین اگر دنباله نامنفی μ_n که $\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ چنان موجود باشد که برای تمام x و y متعلق به K، رابطه

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + \mu_n)\|x - y\|,$$

را داشته باشیم آن‌گاه نگاشت انقباضی مجانبی نامیده می‌شود. این کلاس از نگاشت‌ها به عنوان تعمیمی از نگاشت‌های انقباضی، توسط گئوبل [1] و کیرک [۱۵] معرفی شدند. آن‌ها اثبات کردند که اگر K زیر مجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از فضای نرمدار خطی حقیقی E باشد و $T: K \to K$ نگاشتی انقباضی باشد، در آن صورت T دارای نقطه ثابتی می‌باشد. افراد بسیاری به تقریب نقطه ثابت نگاشت‌های انقباضی و نگاشت‌های تعمیم یافته آن، با استفاده از روش‌های تکرار پرداخته‌اند[۶، ۲۳، ۲۴، ۲۸]. چیدیوم[2] در [۱۲] قضایای همگرایی قوی و ضعیف را برای نگاشت‌های انقباضی مجانبی ناالحاق در فضاهای باناخ اثبات کرد و نتایج مربوط به مقالات قبلی را بهبود بخشید و توسعه داد. اخیراً آلبر[3] در [۱] یک کلاس تعمیم یافته از نگاشت‌های انقباضی مجانبی به نام نگاشت‌های انقباضی مجانبی کلی معرفی کرد و روش‌های تقریب نقطه ثابت این نگاشت‌ها را در فضاهای باناخ مورد مطالعه قرار داد.

---
[1] Geobel
[2] Chidume
[3] Alber

نگاشت $T:K\to K$ انقباضی مجانبی کلی نامیده می‌شود اگر دنباله‌های نامنفی $\{\mu_n\}$ و $\{l_n\}$ که $\mu_n, l_n \to 0$ وقتی $n\to\infty$ و همچنین تابع پیوسته و اکیداً صعودی $\Phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ که $\Phi(0)=0$ چنان موجود باشد که برای هر x و y متعلق به K، رابطه

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x-y\| + \mu_n \Phi(\|x-y\|) + l_n,$$

برای $n\geq 1$ برقرار باشد. در دو دهه‌ی اخیر محققان زیادی تحقیقات خود را به توسعه بخشیدن روش‌های تکرار برای تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از کلاس‌های نگاشت‌های غیر خطی اختصاص داده‌اند [۲، ۷، ۸، ۱۶، ۱۸، ۱۹، ۲۲، ۲۹، ۳۰]. در سال ۲۰۰۶ چیدیوم و بشیر علی [1] روش تکراری، برای تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های انقباضی مجانبی ناالحاق ارائه کردند. همچنین چیدیوم و اُفدو[2] روش تکراری دیگری برای تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های انقباضی مجانبی کلی ارائه کردند که در این پایان‌نامه ما به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

این پایان‌نامه درچهار فصل به صورت زیر تنظیم شده است:
در فصل اول برخی از مفاهیم اولیه آنالیز تابعی را آوردیم که در شکل‌گیری نظریه نقطه ثابت نقش اساسی را ایفا می‌کنند. قضایای مهم مربوط به متریک‌پذیری و نرم‌پذیری را بیان کردیم. سپس به بررسی اصول همگرایی در فضاهای باناخ پرداختیم. فضای باناخ به طور یکنواخت محدب را معرفی کردیم که از تحدب خوبی برخوردار است و در همگرایی روش‌های تکراری نقش اساسی ایفا می‌کنند. در پایان نیز مفاهیم کاملا پیوستگی و فشردگی را برای یک نگاشت معرفی کرده و قضایایی در مورد آن‌ها را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم به معرفی نگاشت‌های مهمی می‌پردازیم که عمده کار ما با این سری نگاشت‌ها می‌باشد که نگاشت‌های انقباضی، انقباضی مجانبی، انقباضی مجانبی از نوع میانی، شبه—انقباضی مجانبی، انقباضی مجانبی کلی، شبه—انقباضی کلی، دوگانی و دِمی‌بسته از جمله این نگاشت‌ها می‌باشند و با ارائه مثال‌ها و قضایای مختلفی رابطه بین برخی از آن‌ها با یکدیگر را نشان می‌دهیم. همچنین اصل دمی‌بسته برای نگاشت‌های انقباضی مجانبی ناالحاق بیان و اثبات می‌شود. در پایان فصل نیز دو لم شو[1] و خو[2] را که در اثبات

[1] Bashir Ali
[2] Ofoedu
[1] Schu
[2] Xu

قضایای همگرایی روش‌های تکراری نقشی اساسی ایفا می‌کنند را بیان می‌نماییم.

در فصل سوم یک روش تکراری برای تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده متناهی از نگاشت‌های انقباضی مجانبی کلی معرفی می‌شود و شرایط لازم و کافی برای همگرایی این روش به نقطه ثابت مشترک نگاشت‌ها در فضاهای باناخ حقیقی دلخواه را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ادامه شرط کافی برای همگرایی روش تکراری در فضاهای باناخ به طور یکنواخت محدب بررسی می‌شود.

در فصل چهارم یک روش تکراری برای تقریب نقطه ثابت مشترک خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های انقباضی مجانبی ناالحاق، معرفی می‌شود و برای این خانواده‌های متناهی از نگاشت‌ها، کرانداری دنباله تکراری اثبات می‌شود. در ادامه همگرایی قوی دنباله تکرار به نقطه ثابت مشترک نگاشت‌ها، در فضاهای باناخ حقیقی به‌طور یکنواخت محدب، اثبات می‌گردد. درپایان فصل نیز یک روش تکراری معرفی کرده و برای خانواده‌های متناهی از نگاشت‌های انقباضی، همگرایی ضعیف دنباله تکرار معرفی شده به نقطه ثابت مشترک این نگاشت‌ها، اثبات می‌گردد.

فصل اول

مفاهیم اولیه

در این فصل برخی از مفاهیم آنالیز تابعی را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند بیان می‌کنیم.

۱.۱ حد بالایی و حد پایینی

یک روش توانمند برای اثبات وجود یک حد استفاده از حدود بالایی و پایینی می‌باشد. به همین دلیل خواصی از حدود بالایی و پایینی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای در $[-\infty, \infty]$ باشد. برای هر $k \geq 1$ قرار می‌دهیم

$$b_k = \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...\} \quad \text{و} \quad c_k = \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, ...\}.$$

همچنین قرار می‌دهیم

$$\beta = \inf\{b_1, b_2, b_3, ...\} \quad \text{و} \quad \gamma = \sup\{c_1, c_2, c_3, ...\}.$$

β را **حد بالایی** و γ را **حد پایینی** دنباله $\{a_n\}$ نامیده و می‌نویسیم

$$\beta = \limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{و} \quad \gamma = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

خواص زیر به آسانی تحقیق می‌شوند:

اولاً $\{b_k\}$ نزولی و $\{c_k\}$ صعودی است و در نتیجه $\lim_{k\to\infty} b_k = \beta$ و $\lim_{k\to\infty} c_k = \gamma$.

ثانیاً زیردنباله‌هایی از $\{a_n\}$ مانند $\{a_{n_i}\}$ و $\{a_{m_i}\}$ موجودند به‌طوری که $\lim_{i\to\infty} a_{n_i} = \beta$ و $\lim_{i\to\infty} a_{m_i} = \gamma$.

اگر $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

قضیه ۲.۱.۱ برای دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ در $[-\infty, \infty]$ احکام زیر برقرارند:

(i) $\limsup_{n\to\infty}(-a_n) = -\liminf_{n\to\infty} a_n$؛

(ii) $\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$

مشروط بر اینکه هیچ یک از مجموع‌ها به شکل $\infty - \infty$ نباشد؛

(iii) اگر به ازای هر $n \geq 1$، $a_n \leq b_n$، آن‌گاه

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \qquad \text{و} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n .$$

برهان. (رجوع شود به صفحه ۲۷ از [۲۶]) $\square$

۲.۱ فضای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ فضای متریک X را تام گوییم اگر هر دنباله کوشی در X حدی در آن داشته باشد.

مثال ۲.۲.۱ فاصله باز $(0, 1)$ با متر قدر مطلق تام نیست زیرا دنباله $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots)$ کوشی است، و همگرا به صفر می‌باشد. ولی فاصله بسته $[0, 1]$ تام است. $\triangle$

مثال ۳.۲.۱ مجموعه اعداد حقیقی و اعداد مختلط با متر قدرمطلق تام هستند. △

اگر X یک مجموعه و M یک فضای متریک تام باشد، آن‌گاه مجموعه $B(X,M)$ از تمام توابع کراندار f از X به M یک فضای متریک تام است. فاصله در $B(X,M)$ را بر حسب فاصله در M همانند زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(f,g) = \sup\{d(f(x),g(x)) : x \in X\}.$$

اگر X یک فضای توپولوژیکی و M یک فضای متریک تام باشد، آن‌گاه $C_b(X,M)$ شامل همه توابع کراندار پیوسته از X به M، یک زیرفضای بسته از $B(X,M)$ می‌باشد که تام است.

تعریف ۴.۲.۱ فضای برداری مختلط X را نرمدار خطی گوییم، اگر برای هر $x \in X$ یک عدد نامنفی $\|x\|$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که به ازای هر $x,y \in X$ و هر اسکالر مانند α،

(i) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$،

(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

(iii) اگر $\|x\| = ۰$، آن‌گاه $x = ۰$.

با قرار دادن $d(x,y) = \|x-y\|$، فضای خطی نرمدار X به یک فضای متریک با متر d تبدیل می‌شود. این متر را متر تعریف شده توسط نرم می‌نامیم.
خاصیت (i) در تعریف بالا نامساوی مثلثی را نتیجه می‌دهد.

$$\|x-y\| \leq \|x-z\| + \|z-y\| \qquad (x,y,z \in X)$$

تعریف ۵.۲.۱ هر فضای خطی نرمدار را که نسبت به متر تعریف شده توسط نرمش تام باشد، **فضای باناخ** گوییم.

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنیم T نگاشتی خطی از فضای خطی نرمدار X به فضای خطی نرمدار Y باشد. در این صورت $\|T\|$ را به صورت

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| \leq ۱\}$$

تعریف می‌کنیم. اگر $\|T\| < \infty$، آن‌گاه نگاشت خطی T را کراندار گوییم.

قضیه ۷.۲.۱ به ازای هر نگاشت خطی T از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y، هر یک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می‌کند:

(الف) T کراندار است؛

(ب) T پیوسته است؛

(ج) T در یک نقطه از X پیوسته است.

برهان. رجوع شود به (۴.۵) در [۲۶]. □

قضیه ۸.۲.۱ (باناخ—اشتاین‌هاوس[۱]) فرض کنیم X یک فضای باناخ، Y یک فضای خطی نرمدار و $\{T_\alpha\}_{\alpha\in A}$ گردایه‌ای از نگاشت‌های خطی و کراندار از X به توی Y باشد. در این صورت عددی مانند $M < \infty$ موجود است به‌طوری‌که برای هر $\alpha \in A$، $\|T_\alpha\| \leq M$، یا برای تمام xهای متعلق به یک G_δ چگال در X، $\sup\limits_{\alpha} \|T_\alpha x\| = \infty$.

برهان. رجوع شود به (۸.۵) در [۲۶]. □

قضیه ۹.۲.۱ (هان—باناخ[۱]) فرض کنیم M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X و f تابعک خطی و کراندار روی M باشد. در این صورت می‌توان f را به تابعک خطی و کراندار مانند F روی X توسیع داد به‌طوری‌که $\|F\| = \|f\|$.

برهان. رجوع شود به (۱۶.۵) در [۲۶]. □

---

[۱] Banach-Steinhaus

[۱] Han-Banach

قضیه ۱۰.۲.۱ فرض کنیم M زیرفضایی از فضای خطی نرمدار X و $x_\circ \in X$ باشد. آن‌گاه $x_\circ$ در بستار M است اگر و فقط اگر هیچ تابعک خطی و کراندار f روی X موجود نباشد به‌طوری‌که برای هر $x \in M$، $f(x) = \circ$ ولی $f(x_\circ) \neq \circ$.

برهان. رجوع شود به (۱۹.۵) در [۲۶]. □

قضیه ۱۱.۲.۱ اگر X یک فضای خطی نرمدار بوده و $x_\circ \in X$ و $x_\circ \neq \circ$، آن‌گاه تابعک خطی و کراندار f روی X موجود است به طوری که $\|f\| = 1$ و $f(x_\circ) = \|x_\circ\|$.

برهان. رجوع شود به (۲۰.۵) در [۲۶]. □

تعریف ۱۲.۲.۱ زیرمجموعه C از فضای متریک X را **کلاً کراندار** گوییم هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$، عناصر $x_1, ..., x_n \in X$ موجود باشند به‌طوری‌که

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} S(x_i, \epsilon).$$

قضیه ۱۳.۲.۱ برای فضای متریک X، شرط‌های زیر معادلند.

(i) X فشرده است.

(ii) هر دنباله در X زیردنباله‌ای همگرا دارد.

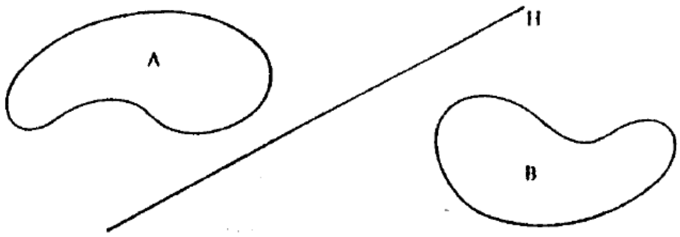
(iii) X کلاً کراندار و تام است.

برهان. رجوع شود به ۵.۳ در [۲۰]. □

تعریف ۱۴.۲.۱ فرض کنیم $A \subset X$ و $B \subset X$. می‌گوئیم ابرصفحه H با معادله $[f = a]$، A و B را از یکدیگر جدا می‌کند اگر بازای هر $x \in A$، $f(x) \leq \alpha$ و بازای هر $x \in B$، $f(x) \geq \alpha$.

می‌گوئیم H مجموعه‌های A و B را اکیداً از یکدیگر جدا می‌کند اگر عدد $\epsilon > 0$ موجود باشد به‌طوری که به‌ازای هر $x \in A$، $f(x) \leq \alpha - \epsilon$ و بازای هر $x \in B$، $f(x) \geq \alpha + \epsilon$.

از نظر هندسی جداسازی به این مفهوم است که A و B در «دو طرف H» قرار دارند.



شکل ۱—۱ :ابرصفحه

قضیه ۱۵.۲.۱ فرض کنیم $A \subset X$ و $B \subset X$ دو زیرمجموعه محدب، ناتهی و با اشتراک تهی باشند. فرض کنیم A باز باشد. در این صورت یک ابر صفحه بسته موجود است که A و B را از یکدیگر جدا می‌کند.

برهان. رجوع شود به (۱.۶) در [۳]. □

قضیه ۱۶.۲.۱ فرض کنیم $A \subset X$ و $B \subset X$ دو زیرمجموعه محدب، ناتهی و با اشتراک تهی باشند. فرض کنیم A بسته و B فشرده باشد. در این صورت یک ابر صفحه بسته موجود است که A و B را اکیداً از یکدیگر جدا می‌کند.

برهان. رجوع شود به (۱.۷) در [۳]. □

۳.۱ فضای L^p

تعریف ۱.۳.۱ گردایه $\mathfrak{M}$ از زیرمجموعه‌های مجموعه X را یک $\sigma-$جبر در X می‌نامیم هرگاه

۱. $X \in \mathfrak{M}$،

۲. اگر $A \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$، که در آن A^c متمم A نسبت به X است،

۳. اگر $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ و به ازای هر $n = 1, 2, 3, \ldots$، $A_n \in \mathfrak{M}$، آن‌گاه $A \in \mathfrak{M}$.

هرگاه $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد، آن‌گاه X را یک فضای اندازه‌پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه‌پذیر در X می‌نامیم.

هم‌چنین گوییم نگاشت f از فضای اندازه‌پذیر X به توی فضای توپولوژیک Y، اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعه باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعه اندازه‌پذیر در X باشد.

منظور از یک اندازه مثبت تابعی است مانند μ که بر یک $\sigma-$جبر مانند $\mathfrak{M}$ با برد در $[0, \infty]$ تعریف شده است و جمعی شمارش‌پذیر می‌باشد؛ بدین معنی که هرگاه $\{A_i\}$ گردایه‌ای شمارش‌پذیر و از هم‌جدا از اعضای $\mathfrak{M}$ باشد، آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

هر فضای اندازه یک فضای اندازه‌پذیر است که یک اندازه مثبت تعریف شده بر $\sigma-$جبر مجموعه‌های اندازه‌پذیر خود داشته باشد. برای احتراز از بدیهیات قرض می‌کنیم به ازای دست کم یک $A \in \mathfrak{M}$، $\mu(A) < \infty$.

تعریف ۲.۳.۱ هرگاه p و q اعداد حقیقی مثبتی باشند که $p + q = pq$ یا معادلاً

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{1.1}$$

آن‌گاه p و q را یک جفت از نماهای مزدوج می‌نامیم. واضح است که رابطه (۱.۱) نامساوی‌های $1 < p < \infty$ و $1 < q < \infty$ را ایجاب می‌کند. یک حالت خاص مهم عبارت است از $p = q = 2$. وقتی $p \to 1$، رابطه (۱.۱) ایجاب می‌کند که $q \to \infty$. در نتیجه ۱ و ∞ را نیز یک جفت از نماهای مزدوج می‌دانیم.

قضیه ۳.۳.۱ فرض کنیم p و q یک جفت از نماهای مزدوج بوده و $1 < p < \infty$. هم‌چنین X یک فضای اندازه با اندازه μ و f و g توابعی اندازه‌پذیر بر X با برد در $[0, \infty]$ باشند. در این صورت

$$\int_X fgd\mu \leq \left\{\int_X f^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \left\{\int_X g^q d\mu\right\}^{\frac{1}{q}} \tag{۲.۱}$$

و

$$\left\{\int_X (f+g)^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\int_X f^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\int_X g^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}. \tag{۳.۱}$$

نامساوی (۲.۱) نامساوی هولدر [۱] و نامساوی (۳.۱) نامساوی مینکوفسکی [۲] است. اگر $p = q = 2$، نامساوی (۲.۱) به نامساوی شوارتز [۳] معروف است.

برهان. رجوع شود به (۵.۳) در [۲۶]. □

تعریف ۴.۳.۱ فرض کنیم X یک فضای اندازه با اندازه مثبت μ باشد. اگر $1 < p < \infty$ و f یک تابع اندازه‌پذیر مختلط بر X باشد، تعریف می‌کنیم

$$\|f\|_p = \left\{\int_X |f|^p d\mu\right\}^{\frac{1}{p}}$$

و $L^p(\mu)$ از تمام fهایی تشکیل شده باشد که

$$\|f\|_p < \infty.$$

ما $\|f\|_p$ را نرم L^pی f می‌نامیم .

اگر μ اندازه لبگ بر R^k باشد، آن‌گاه به جای $L^p(\mu)$ می‌نویسیم $L^p(R^k)$. اگر μ اندازه شمارشی بر مجموعه A باشد، فضای L^p نظیر را با $l^p(A)$ و اگر A شمارش‌پذیر باشد، با l^p نشان می‌دهیم. هر عنصر l^p را می‌توان یک دنباله مختلط مانند $x = \{\xi_n\}$ در نظر گرفت. بنابراین

$$\|x\|_p = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

[۱] $H\ddot{o}lder$

[۲] Minkowski

[۳] Schwartz