دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش هندسه دیفرانسیل

عنوان

اصل برهمنهی لی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل جزئی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

پژوهشگر

مقداد بیاری

۲۷ آبان ماه ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: بیاری نام: مقداد

عنوان: اصل برهمنهی لی و کاربردهای آن در معادلات دیفرانسیل جزئی

استاد راهنما: دکتر سید رضا حجازی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: هندسه دیفرانسیل

دانشگاه: دانشگاه شاهرود دانشکده علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: ۲۷ آبان ماه ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۵۸

واژگان کلیدی: معادله دیفرانسیل، اصل برهمنهی غیرخطی، دستگاه‌های لی، جبر لی، میدان برداری، برگ‌بندی

چکیده

در این رساله، اثباتی هندسی از قضیه لی در مورد اصول برهمنهی غیرخطی برای جواب‌های معادلات دیفرانسیل عادی ناهمگن ارائه شده است.

اثبات قضیه‌ی لی براساس تعریفی هم‌ارز از اصل برهمنهی می‌باشد. اصل برهمنهی را می‌توان به‌عنوان یک برگ‌بندی در نظر گرفت. با در نظر گرفتن بعد نقصان برگ‌بندی ساخته شده از جبر لی میدان‌های برداری، یکتایی تابع برهمنهی مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در پایان نشان داده می‌شود که تعریف مذکور امکان تعمیم اصل برهمنهی برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی را نیز به ما می‌دهد.

تقدیم به روح پدر

وجود مادر

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر سید رضا حجازی، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر هادی پسندیده و سرکار خانم دکتر الهام دسترنج که زحمت مطالعه و داوری این رساله را تقبل فرمودند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر و مهربانی، مادر عزیزم و بعد از خدا وجود مقدسش را ستایش می‌کنم و از برادران عزیزم و خواهر مهربانم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان تشکر می‌کنم، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مقداد یاری

۲۷ آبان ماه ۱۳۹۲

فهرست مطالب

مقدمه

به جرات می‌توان گفت انتگرال‌گیری از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل که تقارن‌های بی‌نهایت کوچک را می‌پذیرند انگیزه اصلی لی [۲] در توسعه مفهومی بود که امروزه تحت عنوان قضایای گروه‌ها و جبرهای لی شناخته می‌شوند. لی در مقاله‌ای، اثباتی از یک قضیه مهم به منظور مرتبط ساختن جبرهای لی و اصول برهمنهی غیرخطی برای جواب‌های برخی از دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل ناهمگن را ارائه داده است.[۱۶] چنین دستگاه‌هایی را می‌توان به عنوان تعمیمی از دستگاه‌های خطی در نظر گرفت اما قانون برهمنهی برخلاف قانون‌های برهمنهی قبل خطی نیست. در این پایان‌نامه به مطالعه نظریه‌ی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیلی که اصل برهمنهی (ممکن است غیرخطی باشد) را می‌پذیرند پرداخته می‌شود، به‌طوری‌که امکان بیان جواب عمومی دستگاه به فرم تابع برهمنهی، بر اساس مجموعه‌هایی از جواب‌های پایه‌ای ویژه را به ما می‌دهد، با این امید که شرایط لازم و کافی برای دستگاه‌هایی که چنین اصلی را می‌پذیرند بیابیم.هر چند این بار معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را نیز در نظر گرفته‌ایم.

حتی اگر نظریه قضیه لی با سطح دقت امروزی بیان نشده بود، دستگاه‌های بدست آمده توسط جبر لی متناظر مشخص شده که اغلب اوقات در مسائل فیزیکی ظاهر می‌شود و در بسیاری از موارد مسئله با مسئله‌ی دیگری در گروه لی متناظر مرتبط است. این مسئله ما را با هر دو روش کاهش به مسائل ساده‌تر از یک طرف و روش دیگر، که توسط وی [۳] و نورمن [۴] معرفی شده است و شامل برخی تکنیک‌های جبری براساس نظریه گروه‌ها و جبرهای لی است از طرف دیگر آشنا می‌سازد.

تا آنجا که می‌دانیم اثبات دقیقی از قسمت شرطی در قضیه لی وجود ندارد و کارهای شناخته شده جهت دستیابی به یک اثبات هندسی دقیق همان بحث مطرح شده در مراجع [۲،۲۰] می‌باشند. در این پایان‌نامه نشان می‌دهیم که وجود اصل برهمنهی برای جواب‌های یک دستگاه غیرهمگن نشان دهنده‌ی آن است که دستگاه فرمی ضمنی دارد. اثبات آن براساس تعریفی هم‌ارز از اصل برهمنهی است. اصل فوق را به عنوان یک برگ‌بندی با برخی ویژگی‌هایی که در ادامه به‌طور ضمنی فرمول‌بندی شده است در نظر می‌گیریم. از سوی دیگر، قسمت معکوس به طور کامل و عام بیان نشده و تقریبا هیچ مطلبی در مورد یکتایی تابع برهمنهی برای این دستگاه‌ها گفته نشده است. تنها در [۱۱] یک مثال ذکر شده است و در [۱۶] دو تابع برهمنهی متفاوت مشخص شده است. این نتایج ما را به جوابی برای این سوال می‌رساند، نکته‌ی اصلی بعد نقصان برگ‌بندی ساخته شده از جبر لی بدست آمده از میدان‌های برداری است. بعد نقصان، زمانی‌که عمل جبر لی میدان‌های

[۲] Lie
[۳] Wei
[۴] Norman

برداری روی منیفلد اولیه متعدی نیست بسیار مهم است.

در نهایت نشان داده خواهد شد که با توجه تعریف هم‌ارز از اصل برهمنهی می‌توان این اصل را برای دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل جزئی نیز بکار برد.

فصل ۱

مقدمات و پیشنیازها

۱.۱ مفاهیم بنیادی هندسه

در این فصل فرض بر آن است که خواننده با مطالب بنیادی منیفلدها آشناست و مطالب بنیادی را می‌توان در مراجع یافت [۱۷].

تعریف ۱.۱.۱. فضای توپولوژیک M را یک **منیفلد توپولوژیک** n-بعدی گوییم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد

- M هاسدورف [۱] باشد، یعنی زیر مجموعه‌های باز U و V از M وجود داشته باشند به‌طوری‌که

$$p \in U, q \in V \qquad , U \cap V = \varnothing.$$

- M شمارای نوع دوم باشد.
- M موضعا اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه آن مشمول در یک همسایگی همئومورف با یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ باشد.

فرض می‌کنیم $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ گردایه‌ای شمارا از زیر مجموعه‌های منیفلدM و V_α ها نیز زیر مجموعه‌های باز همبند از $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر $M = \cup_{\alpha \in I} U_\alpha$ و $\varphi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ همئومورفیسم باشد آن‌گاه $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ را **چارت مختصاتی** روی منیفلد M می‌نامیم.

حال اگر (U, φ) و (V, ψ) دو چارت روی منیفلد M باشند نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-۱} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

[۱] Husdorff

را **نگاشت گذر** از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به‌طور **هموار سازگار** می‌نامیم هرگاه $\psi \circ \varphi^{-1}$ دیفئومورفیسم باشد. مجموعه $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ را **اطلس** رویM می‌نامیم هرگاه اعضای $\mathcal{A}$ دو به دو به طور هموار سازگار باشند. اطلس $\mathcal{A}$ **بیشین** است هرگاه مشمول در هیچ اطلس دیگری نباشد. **ساختار هموار** روی منیفلد توپولوژیکی M، یک اطلس بیشین هموار است. هر منیفلد توپولوژیکی مجهز به یک ساختار هموار $\mathcal{A}$ را یک منیفلد هموار نامیده و با $(M, \mathcal{A})$ نشان می‌دهیم.

مثال ۲.۱.۱. فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ یک منیفلد هموار n-بعدی با اطلس بیشینی است که شامل چارت مختصاتی $(\mathbb{R}^n, \mathbb{I})$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. اگر MوN منیفلدهایی هموار باشند، نگاشت $F : M \longrightarrow N$ را **نگاشتی هموار** گوییم هرگاه برای هر چارت مختصاتی $\chi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha \subset \mathbb{R}^m$ روی Mو هر چارت مختصاتی $\tilde{\chi}_\beta : \tilde{U}_\beta \longrightarrow \tilde{V}_\beta \subset \mathbb{R}^n$ روی N، نگاشت مرکب $\tilde{\chi}_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نگاشتی هموار باشد.

تعریف ۴.۱.۱. منیفلد هموار M را در نظر می‌گیریم **عملگر خطی** $X : C^\infty(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $p \in M$ می‌نامیم اگر $X(fg)(p) = f(p)X(g) + g(p)X(f)$.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید که M فضای توپولوژیک باشد منظور از کلاف برداری رویM فضای توپولوژیکی مانند E به همراه نگاشت $\pi : E \longrightarrow M$ می‌باشد به‌طوری‌که

۱. $\forall p \in M \Longrightarrow E_{(p)} = \pi^{-1}(p)$ یک فضای برداری k- بعدی است.

۲. نگاشت $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^k$ یک نگاشت همئومورفیسم است.

۳. $\forall p \in M \Longrightarrow E_p \simeq \{p\} \times \mathbb{R}^k$

اگر E و M منیفلد باشند و ϕ نیز یک دیفئومورفیسم باشد آن‌گاه E یک کلاف برداری است.

قرار می‌دهیم

T_pM=\{ X : یک عملگر مشتق در نقطه $p \in M$ است. X \}

و آن را فضای مماسی منیفلد M در نقطه $p \in M$ می‌نامیم. همچنین در تعریف فوق اگر قرار دهیم

$$E = TM$$

آن‌گاه کلاف برداری به کلاف مماسی منیفلدMدر نقطه $p \in M$ تبدیل می‌شود که در آن TM را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$TM = \coprod_{p \in M} T_p M$$

کلاف مماسی یک منیفلد هموار $2n$-بعدی است.

تعریف ۶.۱.۱. میدان برداری روی منیفلد M در نقطه $x \in M$ برشی از کلاف مماسی TM است که به وسیله ضابطه‌ی زیر تعیین می‌شود

$$\sigma : M \longrightarrow E.$$

به‌طوری‌که ترکیب خطی آن با نگاشت $\pi : E \longrightarrow M$ که به‌صورت زیر بدست می‌آید

$$\pi \circ \sigma = Id_M$$

نگاشت همانی روی منیفلد M خواهد بود. حال می‌توان میدان برداری در نقطه‌ی $x \in M$ را به‌صورت هم‌ارزی زیر داشت

$$\sigma \simeq V|_x$$

در مختصات موضعی $(x^1, \ldots, x^m)$ ، میدان برداری برای هر تابع هموار $\xi^i(x)$ از x دارای فرم

$$V|_x = \xi^1 \tfrac{\partial}{\partial x^1} + \xi^2 \tfrac{\partial}{\partial x^2} + \ldots + \xi^m \tfrac{\partial}{\partial x^m}$$

می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۱. منیفلدهای هموار M و N را به همراه نگاشت هموار $F : M \longrightarrow N$ بین آن‌ها در نظر می‌گیریم. به ازای هر $x \in M$ نگاشت $dF_x : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$ را نگاشت دیفرانسیل F می‌نامیم که به ازای هر $f \in C^\infty(N)$ و $V|_x \in T_xM$ با ضابطه

$$dF(V|_x)f(y) = V(f \circ F)(x), \qquad y = F(x)$$

تعریف می‌شود و در مختصات موضعی داریم

$$dF(V|_x) = dF\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{n} V(F^j(x))\frac{\partial}{\partial y^j}.$$

نگاشت دیفرانسیل F را با F_* نیز نشان می‌دهند و آن را نگاشت پیش‌برنده می‌نامند.

تعریف ۸.۱.۱. اگر V و W دو میدان برداری روی منیفلد M باشند، کروشه‌ی لی آن‌ها، $[V,W]$ نیز یک میدان برداری است که برای هر تابع هموار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$[V,W](f) = V(W(f)) - W(V(f)). \qquad (۱.۱)$$

همچنین در مختصات موضعی، اگر داشته باشیم

$$V = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad W = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{۲.۱}$$

سپس داریم

$$[V, W] = \sum_{i=1}^{m} (V(\eta^i) - W(\xi^i)) \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(\xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{۳.۱}$$

گزاره ۹.۱.۱. *فرض کنیم V، W و U میدان‌های برداری روی M باشند و ثابت‌های c و c' نیز اعداد حقیقی باشند، در این صورت کروشه‌ی لی آن‌ها در خواص زیر صدق می‌کند*

- *دو خطی*

$$[cV + c'V', W] = c[V, W] + c'[V', W],$$
$$[V, cW + c'W] = c[V, W] + c'[V, W'].$$

- *پادمتقارن*

$$[V, W] = -[W, V].$$

- *اتحاد ژاکوبی*

$$[U, [V, W]] + [W, [U, V]] + [V, [W, U]] = 0.$$

برهان. با استفاده از (۲.۱) و (۳.۱) می‌توان احکام فوق را اثبات نمود. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم x نقطه‌ای از منیفلد M باشد، تابع خطی $\omega : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ را ۱-فرم دیفرانسیل در x می‌نامیم. فضای ۱-فرم‌ها دوگان فضای برداری مماسی T_xM می‌باشد و فضای هم مماسی نیز نامیده می‌شوند و با نماد T_x^*M نمایش می‌دهیم. فضاهای هم مماسی با هم تشکیل کلاف هم مماسی $T^*M = \coprod_{x \in M} T_x^*M$ را می‌دهند و مشابه کلاف مماسی، یک کلاف برداری $2m$-بعدی را روی M تشکیل می‌دهد. تابع هموار $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم، دیفرانسیل آن، $df = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ ، یک ۱-فرم است. در مختصات موضعی $x = (x^1, \dots, x^m)$ دیفرانسیل‌های dx^i از توابع مختصاتی، پایه‌ای برای

فضاهای هم مماسی در هر نقطه از چارت مختصاتی فراهم می‌کنند. برحسب این پایه هر ۱-فرم در مختصات موضعی را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} h_i(x) dx^i.$$

فرم‌های دیفرانسیلی از مرتبه‌ی بالاتر به عنوان نگاشتی چند خطی متناوب روی فضای مماسی تعریف می‌شوند. بنابراین k-فرم دیفرانسیلی Ω در نقطه‌ی $x \in M$ ، نگاشت k-خطی زیر است

$$\Omega : \overbrace{T_xM \times \ldots \times T_xM}^{k-\text{بار}} \to \mathbb{R}،$$

تابع حقیقی مقدار f به عنوان فرمی از مرتبه‌ی صفر در نظر گرفته می‌شود. فضای همه‌ی k-فرم‌ها در x به صورت $\Lambda^k T^*M|_x$ نمایش داده می‌شود و فضایی برداری از بعد $\binom{m}{k}$ می‌باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم M و N دو منیفلد هموار $F : M \longrightarrow N$ نگاشتی هموار باشد، دیفرانسیل آن dF ، نگاشتی است به فرم زیر

$$dF : T_xM \longrightarrow T_{F(x)}N$$

به همین ترتیب نگاشت خطی القایی F^* وجود دارد که هم‌دیفرانسیل F نامیده می‌شود و k-فرم‌های دیفرانسیلی روی N را به k-فرم‌های دیفرانسیلی رویM می‌برد،

$$F^* : T^*_{F(x)}N \to T^*_xM$$

اگر $x = (x^1, \ldots, x^m)$ مختصات موضعی روی M و $y = (y^1, \ldots, y^n)$ مختصات موضعی روی N باشد، آن‌گاه

$$F^*(dy^i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$$

در حالت کلی ثابت می‌شود

$$F^*(\sum_I \alpha_I(y) dy^I) = \sum_{I,J} \alpha_I(F(x)) \frac{\partial y^I}{\partial x^J} dx^J$$

به‌طوری‌که

$$J = (j_1, \dots, j_k)$$
$$I = (i_1, \dots, i_k)$$
$$\partial y^I / \partial x^J = det(\partial y^{i_k} / \partial x^{j_v})$$

می‌باشد. نگاشت هم‌دیفرانسیل را نگاشت پس‌کشنده نیز می‌نامند.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض می‌کنیم V میدان برداری روی منیفلد M و σ میدان برداری یا فرم دیفرانسیلی روی M باشد. مشتق لی σ نسبت به V را به شکل زیر داریم

$$V(\sigma)|_x = \lim_{x \to 0} \frac{\phi_\varepsilon^*(\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x}) - \sigma|_x}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} \phi_\varepsilon^*(\sigma|_{\exp(\varepsilon V)x})$$

گزاره ۱۳.۱.۱. *فرض کنید VوW میدان‌های برداری هموار روی M باشند. مشتق لی W نسبت بهV برابر با کروشه‌ی لی V و W است*

$$V(W) = [V, W].$$

برهان. [۱۷]. □

۲.۱ گروه های لی

تعریف ۱.۲.۱. یک گروه لی r-پارامتری، گروهی جبری مانند G با ساختار منیفلد هموار r-بعدی است به‌طوری‌که عمل گروهی

$$m : G \times G \to G$$
$$(g, h) \mapsto g \cdot h$$

و وارون

$$i : G \to G$$
$$g \mapsto g^{-1}$$

نگاشت‌های هموار بین منیفلدها هستند.

مثال ۲.۲.۱. گروه‌های ماتریسی زیر با عمل ضرب ماتریس‌ها و وارون آن‌ها نسبت به عمل ضرب، مثال‌هایی از گروه‌های لی هستند. گروه تبدیلات خطی عمومی که شامل تمام ماتریس‌های $n \times n$ معکوس‌پذیر است، تشکیل یک گروه لی n^2 -پارامتری می‌دهد و آن را با $GL(n)$ نمایش می‌دهیم

$$GL(n) = \{X : detX \neq ۰\}،$$

گروه خطی ویژه که شامل همه ی ماتریس‌های وارون‌پذیر با دترمینان یک است، تشکیل یک گروه لی $(n^۲ - ۱)$-پارامتری می‌دهد که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$SL(n) = \{X \in GL(n) : detX = ۱\}،$$

گروه متعامد

$$O(n) = \{X \in GL(n) : X^T X = I\}،$$

گروه لی $\frac{n(n-۱)}{۲}$-پارامتری و گروه متعامد ویژه

$$SO(n) = \{X \in O(n) : detX = ۱\}$$

گروه لی $\frac{n(n-۱)}{۲}$-پارامتری می‌باشد. همچنین گروه آفین

$$A(n-۱) = \left\{ \begin{bmatrix} A & a \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} : A \in GL(n-۱), a \in \mathbb{R}^{(n-۱)} \right\}$$

گروه لی $n(n-۱)$-پارامتری است. که بعد همه‌ی این گروه‌های ماتریسی روی صفحه‌ی مختلط دو برابر می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه لی باشد. برای هر عنصر گروهی $g \in G$، ضرب از راست $R_g : G \to G$ که به وسیله‌ی $R_g(h) = h.g$ با معکوس $R_{g^{-۱}} = (R_g)^{-۱}$ تعریف می‌شود، دیفئومورفیسم است. یک میدان برداری V روی G **ناوردای راست** نامیده می‌شود اگر برای هر g و h در G داشته باشیم

$$dR_g(V|_h) = V|_{R_g(h)} = V|_{hg}$$

تعریف ۴.۲.۱. **جبر لی راست** g از گروه لی G یک فضای برداری از همه‌ی میدان‌های برداری ناوردای راست روی G می‌باشد.

به‌طور عمومی‌تر، جبرلی، فضای برداری g با عملگر دو خطی

$$[\,,\,] : \mathrm{g} \times \mathrm{g} \to \mathrm{g},$$

است که کروشه‌ی لی نامیده می‌شود و در خواص کروشه‌ی‌لی صدق می‌کند.

برای تعریف میدان‌های برداری ناوردای چپ و جبرلی چپ نیز به همین شکل عمل می‌کنیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار باشد. یک **گروه تبدیلات موضعی** که روی M عمل می‌کنند به‌وسیله‌ی یک گروه لی G، زیرمجموعه باز $\mathcal{U}$ که حوزه تعریف عمل گروه است به‌طوری‌که $\{e\} \times M \subset \mathcal{U} \subset G \times M$ و نگاشت هموار $\Psi : \mathcal{U} \to M$ داده می‌شود و دارای خاصیت‌های زیر است

الف) اگر $(h,x) \in \mathcal{U},\ (g,\Psi(h,x)) \in \mathcal{U}$ و همچنین $(g.h,x) \in \mathcal{U}$ سپس $\Psi(g,\Psi(h,x)) = \Psi(g.h,x)$.

ب) برای هر $x \in M$ ، $\Psi(e,x) = x$.

ج) اگر $(g,x) \in \mathcal{U}$ سپس $(g^{-۱},\Psi(g,x)) \in \mathcal{U}$ و $\Psi(g^{-۱},\Psi(g,x)) = x$.

۱.۲.۱ عمل گروه تبدیلات

در اینجا نحوه‌ی تبدیل تابع $u = f(x)$ تحت عنصر گروهی $g \in G$ را توضیح می‌دهیم. تابع $u = f(x)$ را با گراف آن $\Gamma_f = \{(x,f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ را در نظر می‌گیریم، Ω حوزه تعریف تابع $u = f(x)$ است. توجه کنید که Γ_f زیرمنیفلدی $p-$بعدی از $X \times U$ می‌باشد. اگر گراف تابع f زیرمجموعه‌ای از حوزه تعریف گروه تبدیلات g باشد، تبدیل Γ_f به‌وسیله‌ی g به‌صورت زیر است

$$g\ .\ \Gamma_f = \{(\tilde{x},\tilde{u}) = g\ .\ (x,u);\ (x,u) \in \Gamma_f\}$$

مجموعه‌ی $g.\Gamma_f$ معمولا گراف تابع دیگری مثل $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ نیست. با این وجود، چون G به‌طور هموار عمل می‌کند و عنصر همانی G، Γ_f را بدون تغییر می‌گذارد، با تعریف مناسب و محدود کردن حوزه‌ی تعریف تابع f، یعنی f (Ω) آن گاه برای عنصر g در همسایگی عنصر همانی، مطمئن می‌شویم $g\ .\ \Gamma_f = \Gamma_{\tilde{f}}$ گراف تابع دیگری مانند $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ است و می‌نویسیم $\tilde{f} = g\ .\ f$ و تابع $\tilde{f}$ را تبدیل تابع f به وسیله‌ی g می‌نامیم.

در حالت کلی فرض می‌کنیم

$$(\tilde{x},\tilde{u}) = g\ .\ (x,u) = (\Xi_g(x,u),\phi_g(x,u)),$$

که ϕ_g و Ξ_g توابعی هموار باشند. گراف $\Gamma_{\tilde{f}} = g\ .\ \Gamma_f$ از $g\ .\ f$ به‌وسیله‌ی معادلات زیر داده می شود

$$\begin{aligned}
\tilde{x} &= \Xi_g(x,f(x)) = \Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(x), \\
\tilde{u} &= \phi_g(x,f(x)) = \phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)(x), \qquad x \in \Omega
\end{aligned}$$

در این جا $x \in \Omega$ و $\mathbb{I}$ تابع همانی روی X است. بایدx را از دستگاه معادلات بالا حذف کنیم. چون برای $g = e$ داریم $\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f) = \mathbb{I}$ و می‌دانیم درصورتی‌که g به اندازه کافی به عنصر همانی نزدیک شود ماتریس ژاکوبین $\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)$ غیرتکین است، از این رو به وسیله‌ی قضیه‌ی تابع معکوس به‌طور موضعی برای x داریم

$$x = [\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-۱}(\tilde{x}).$$

لذا هرگاه عامل دوم وارون‌پذیر باشد، $\tilde{u}$ قابل محاسبه است.

$$\tilde{u} = g \,.\, f(x) = [\phi_g \circ (\mathbb{I} \times f)] \circ [\Xi_g \circ (\mathbb{I} \times f)]^{-1}.$$

در بعضی موارد ممکن است فقط متغیر مستقل تبدیل شود

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = g \,.\, (x, u) = (\Xi_g(x), u),$$

که Ξ_g یک دیفئومورفیسم از X است و با $\Xi_g^{-1} = \Xi_{g^{-1}}$ تعریف می‌شود. به آسانی می‌توانیم x را حذف کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \Xi_g(x) \\ \Rightarrow x &= \Xi_g^{-1}\tilde{x} = \Xi_{g^{-1}}\tilde{x}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{u} = u = f(x) = f(\Xi_{g^{-1}}\tilde{x}).$$

حال مطالب گفته شده را در مثال زیر بکار می‌بریم.

مثال ۶.۲.۱. فرض می‌کنیم $G = SO(2)$ عمل گروه دوران‌ها روی $X \times U \simeq \mathbb{R}^2$ باشد. تبدیلات G به‌صورت زیر نمایش داده می‌شوند

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \,.\, (x, u) = (x\cos\theta - u\sin\theta, x\sin\theta + u\cos\theta). \tag{۴.۱}$$

فرض کنید $u = f(x)$ یک تابع باشد، که گراف آن $\Gamma_f \subset X \times U$ است. گروه $SO(2)$ روی f به‌صورت دوران گراف f عمل می‌کند. اگر θ بزرگ باشد، با توجه به متناوب بودن توابع sin و cos آن‌گاه $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع دیگری نخواهد بود. اما اگر $f(x)$ روی بازه‌ی متناهی $a \le x \le b$ تعریف شده باشد و $|\theta|$ خیلی بزرگ نباشد آنگاه $\theta.\Gamma_f$ گراف تابع خوش‌تعریف $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ خواهد بود که $\Gamma_{\tilde{f}} = \theta.\Gamma_f$ می‌باشد.

تابع خطی $u = f(x) = ax + b$ را در نظر می‌گیریم. گراف f یک خط مستقیم است. بنابراین دوران آن با زاویه θ یک خط مستقیم دیگر خواهد بود. حال تبدیل f تحت θ (یعنی $\tilde{f}$) را می‌یابیم.

$$(\tilde{x}, \tilde{u}) = \theta \,.\, (x, ax+b) = (x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta).$$

برای پیدا کردن $\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x})$ باید x را از جفت معادلات بالا حذف کنیم

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x\cos\theta - (ax+b)\sin\theta, \\ \Rightarrow x &= \frac{\tilde{x} + b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\,. \end{aligned}$$

با فرض $\cot\theta \neq a$ داریم

$$\begin{aligned}\tilde{u} = \tilde{f}(\tilde{x}) &= x\sin\theta + (ax+b)\cos\theta \\ &= \frac{\tilde{x}+b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\sin\theta + \left(a\frac{\tilde{x}+b\sin\theta}{\cos\theta - a\sin\theta} + b\right)\cos\theta \\ &\vdots \\ &= \frac{\sin\theta + a\cos\theta}{\cos\theta - a\sin\theta}\tilde{x} + \frac{b}{\cos\theta - a\cos\theta}\ .\end{aligned}$$

می‌بینیم که تبدیل f تحت θ دوباره تابعی خطی شد.

تعریف ۷.۲.۱. یک **مدار** از گروه تبدیلات موضعی، زیرمجموعه‌ی گروه-ناوردای غیرتهی مینیمال از منیفلد M می‌باشد. به‌عبارت دیگر، $\mathcal{O} \subset M$ در صورتی مدار است که در شرایط زیر صدق کند

الف) اگر $x \in \mathcal{O}$، $g \in G$ و $g.x$ تعریف شده باشد، سپس $g.x \in \mathcal{O}$ است.

ب) اگر $\tilde{O} \subset \mathcal{O}$ و $\tilde{O}$ در بخش قبل صدق کند، سپس یا $\tilde{O} = \mathcal{O}$ یا $\tilde{O}$ تهی می‌باشد.

تعریف ۸.۲.۱. فرض می‌کنیم G یک گروه تبدیلات موضعی باشد که روی M عمل می‌کند.

الف) گروه G به‌طور **نیم-منظم** عمل می‌کند اگر همه مدارهای آن به‌عنوان زیرمنیفلدی از M دارای بعد یکسان باشند.

ب) اگر گروه G به‌طور **نیم منظم** عمل کند و برای هر نقطه $x \in M$ همسایگی کوچک دلخواه U از x وجود داشته باشد با این خاصیت که هر مدار از G، U را به زیرمجموعه‌های همبند مسیری تقسیم کند گوییم گروه G به طور منظم عمل می‌کند.

تعریف ۹.۲.۱. گروه تبدیلات G به‌طور **موثر** عمل می‌کند اگر عناصر گروهی متفاوت، عمل‌های متفاوتی داشته باشند، به‌طوری‌که برای هر $x \in M$ داشته باشیم $g.x = h.x$ اگر و تنها اگر $g = h$.

زیرگروه ایزوتروپی سراسری $G_M = \{g \mid g.x = x,\ \forall x \in M\}$ که زیرگروه نرمال بسته از G می‌باشد موثر بودن عمل G را نشان می‌دهد به این معنی که G به طور موثر عمل می‌کند اگر و تنها اگر $G_M = \{e\}$. اگر G به‌طور موثر عمل نکند آنرا با گروه خارج‌قسمتی $\frac{G}{G_M}$ که به‌طور موثر روی M مانند G عمل می‌کند جایگزین می‌کنیم. بنابراین در حالت کلی می‌توانیم فرض کنیم که همه‌ی عمل گروه ها به‌طور (موضعی) موثر عمل می‌کنند. می‌گوئیم گروه لی G به‌طور موضعی موثر عمل می‌کند اگر زیرگروه ایزوتروپی سراسری G_M زیرگروهی گسسته از G باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. منحنی انتگرال از یک میدان برداری V، منحنی پارامتری هموار $x = \phi(\varepsilon)$ می‌باشد به‌طوری‌که بردار مماس بر هر نقطه منحنی با مقدار V در آن نقطه برابر باشد، یعنی

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = V|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

در مختصات موضعی باید $x = \phi(\varepsilon) = (\phi^{۱}(\varepsilon), \cdots, \phi^{m}(\varepsilon))$ جوابی از سیستم معادله دیفرانسیل معمولی زیر است

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = ۱, \cdots, m \tag{۵.۱}$$

که در آن $\xi^i(x)$ ها ضرایب V در x می‌باشند.

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر V میدانی برداری باشد، منحنی انتگرال بیشین پارامتری که از نقطه x در M می‌گذرد را با $\Psi(\varepsilon, x)$ نشان می‌دهیم و Ψ را **شار** تولید شده به وسیله V می‌نامیم.

بنابراین برای هر $x \in M$ و هر ε در بازه‌ی I_x شامل صفر، $\Psi(\varepsilon, x)$ نقطه‌ای روی منحنی انتگرال گذرنده از x در M خواهد بود. شار میدان برداری برای هر $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ دارای ویژگی‌های زیر است

$$\Psi(\delta, \Psi(\varepsilon, x)) = \Psi(\delta + \varepsilon, x), \qquad x \in M, \tag{۶.۱}$$

$$\Psi(\circ, x) = x, \tag{۷.۱}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon, x) = V|_{\Psi(\varepsilon,x)} \tag{۸.۱}$$

با مقایسه‌ی دو ویژگی (۶.۱) و (۷.۱) با ویژگی گروه موضعی می‌بینیم که شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری با عمل گروه موضعی گروه لی $\mathbb{R}$ روی منیفلد M یکسان است و اغلب گروه ۱-پارامتری از تبدیلات و میدان برداری V، **مولد بی‌نهایت کوچک** عمل نامیده می‌شود، از این رو به وسیله‌ی قضیه‌ی تیلور در مختصات موضعی داریم

$$\Psi(\varepsilon, x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^{۲}),$$

که $\xi = (\xi^{۱}, \cdots, \xi^{m})$ ضرایب V هستند. اگر $\Psi(\varepsilon, x)$ گروه ۱-پارامتری از تبدیلات باشد که روی M عمل می‌کنند، مولد بی‌نهایت کوچک آن بوسیله‌ی (۸.۱) با قراردادن $\varepsilon = \circ$ بدست می‌آید.

$$V|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=\circ} \quad \Psi(\varepsilon, x). \tag{۹.۱}$$

تناظری یک‌به‌یک بین گروه‌های ۱-پارامتری موضعی از تبدیلات و مولدهای بی‌نهایت کوچک آن‌ها وجود دارد. اغلب محاسبه‌ی شار یا گروه ۱-پارامتری تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری V به‌عنوان نگاشت نمایی آن‌ها در نظر گرفته می‌شود، بنابراین نمادگذاری

$$\exp(\varepsilon V)x \equiv \Psi(\varepsilon, x),$$

را برای زیرگروه ۱-پارامتری یا شار تولید شده به وسیله‌ی میدان برداری V به کار می‌بریم.

مثال ۱.۲.۱۲. مثال‌هایی از میدان‌های برداری و شار آن‌ها.

الف) $M = \mathbb{R}$ را با مختصات x و میدان برداری $V = \partial/\partial x \equiv \partial_x$ در نظر می‌گیریم. چون باید شار (عمل گروه ۱-پارامتری) تولید شده به‌وسیله‌ی V جوابی از $\dot{x} = ۱$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon = ۰$ باشد، لذا

$$\exp(\varepsilon V) = \exp(\varepsilon \partial_x)x = x + \varepsilon.$$

که عمل گروه انتقالات نامیده می‌شود. همچنین شار تولید شده به‌وسیله میدان برداری $V = x\partial_x$ باید جوابی از معادله‌ی دیفرانسیل معمولی $\dot{x} = x$ با مقدار اولیه x در $\varepsilon = ۰$ باشد، آن‌گاه

$$\exp(\varepsilon V)x = \exp(\varepsilon x \partial_x)x = e^{\varepsilon}x.$$

ب) گروه دوران‌ها را در صفحه در نظر می‌گیریم

$$\Psi(\varepsilon, (x, y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon).$$

مولد بی‌نهایت کوچک آن میدان برداری $V = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$ می‌باشد که طبق (۱.۹) داریم

$$\begin{aligned} \xi(x,y) &= \frac{dx}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=۰}(x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon) = -y, \\ \eta(x,y) &= \frac{dx}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=۰}(x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon) = x. \end{aligned}$$

بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک آن، $V = -y\partial_x + x\partial_y$ است. گروه تبدیلات بالا با جواب‌های سیستم معادلات دیفرانسیل معمولی

$$dx/d\varepsilon = -y, \qquad dy/d\varepsilon = x$$

مطابقت دارد.

قضیه ۱.۲.۱۳. *فرض می‌کنیم V میدان برداری تعریف شده روی M باشد. اگر $x_۰$ نقطه تکین V نباشد به‌طوری‌که $V|_{x_۰} \neq ۰$ ، سپس مختصات موضعی اصلاحی $y = (y^۱, \cdots, y^m)$ در همسایگی $x_۰$ وجود دارد به طوری‌که $V = \partial/\partial y$ و شار انتقالی $\exp(tV)y = (y^۱ + t, y^۲, \cdots, y^m)$ را تولید می‌کند.*

برهان. [۱۷] □

تصور کنید $\mathfrak{g}$ جبرلی گروه لی G باشد. نتیجه‌ی بعدی نشان می‌دهد که تناظری یک‌به‌یک بین زیرفضاهای ۱-بعدی و زیرگروه های ۱-پارامتری همبند G وجود دارد.

گزاره ۱.۲.۱۴. *فرض می‌کنیم $V \neq ۰$ یک میدان برداری ناوردای راست روی گروه لی G باشد شار تولید شده به وسیله‌ی V یعنی $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon V)e$ که برای هر $\varepsilon \in \mathbb{R}$ تعریف می‌شود، زیرگروه ۱-پارامتری از G را تشکیل می‌دهد و با*

$$g_{\varepsilon+\delta} = g_\varepsilon \cdot g_\delta, \qquad g_۰ = e, \qquad g_\varepsilon^{-۱} = g_{-\varepsilon}$$