

**دانشگاه کاشان**

دانشکده مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

**پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**

**در رشته مهندسی مکانیک (طراحی کاربردی)**

**عنوان**

حل بسته در تحلیل ارتعاشات عرضی یک تیر مخروطی مدل اویلر-برنولی با جرم های متمرکز

نامعین

**استاد راهنما :**

دکتر کیوان ترابی

به وسیله :

مصطفی صادقی

دی ۱۳۹۰

## تشکر و قدردانی

حمد و سپاس ایزد منان را که موهبتی دیگر به بنده عنایت فرمود تا این مقطع تحصیلی را نیز با موفقیت به پایان رسانم. انجام این مهم را مدیون حمایت‌های خانواده مهربانم هستم که در تمام مراحل زندگی ام مشوق و پشتیبان من بوده‌اند.

از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر کیوان ترابی که در سال‌های تحصیلم در دانشکده مهندسی مکانیک و به خصوص در کلیه مراحل این رساله از هیچ کوششی برای راهنمایی من فروگذار نکرده‌اند و همچنین از استاد ناظر تحصیلات تکمیلی دکتر محسن جاوری صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. بی‌شک بدون حمایت ایشان انجام این مهم میسر نبود.

تقدیم به :

تمامی پویندگان طریقت علم  
ومعرفت

## چکیده

فرکانس ارتعاش در سیستم‌های دینامیکی، بیانگر رفتار آن در اثر اعمال نیروهای خارجی می‌باشد. این کمیت، تابعی از اینرسی جرم، الاستیسیته آن، میزان استهلاک مدل در سیستم تحت ارتعاش می‌باشد. در سیستم‌های ارتعاش غیر خطی عامل ارتعاش اجباری بر روی فرکانس ارتعاشی موثر می‌باشد. عواملی نظیر وجود ترک‌های باز، تغییرات ابعادی جسم، تغییرات در خواص مواد در جسم ارتعاشی و وجود عواملی دیگر نظیر میدان‌های مغناطیسی، افزایش جرم به صورت نقطه‌ای و یا توزیع جرم در یک ناحیه محدود و اثر تداخل امواج ارتعاشی (که به طور عمده ارتعاشات طولی و عرضی و پیچشی مورد نظر می‌باشد)، همگی در معادله دینامیکی سیستم تحت ارتعاش اثر گذار بوده و در تعیین مود شیپ ارتعاشی نقش مهمی ایفا می‌سازد. از آنجایی که هر مد شیپ معرف فرکانس ارتعاش مربوط به خود می‌باشد، لذا تعیین فرکانس‌های ارتعاشی نیز تحت تاثیر عوامل ذکر شده می‌باشد.

در این تحقیق، هدف بدست آوردن یک حل بسته برای یک تیر مخروطی با جرم‌های متمرکز در نقاط مختلف می‌باشد. در این تحقیق مدل تیر مورد بررسی اویلر - برنولی می‌باشد. در مدل کردن جرم‌های متمرکز از توابع ضربه و خواص آن بهره برداری شده است. سپس یک حل تحلیلی برای معادله دینامیکی ممزوج به توابع ضربه بدست می‌آید. با بکارگیری توابع پایه، حل بدست آمده ساده سازی می‌شود. اکنون با در دست داشتن حل تحلیلی، شرایط مرزی متقارن و نامتقارن برای مسئله تعریف می‌شود. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان یک ماتریس  $2 \times 2$  حاصل از اعمال شرایط مرزی، معادله مشخصه فرکانسی حاصل می‌شود. با استفاده از فرکانس‌های بدست آمده و تعیین ضرایب ثابت، مد شیپ استخراج می‌شود. در این تحقیق، تاثیر جرم‌های متمرکز بر روی کاهش فرکانس در شرایط مرزی مختلف بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: ارتعاشات عرضی، تیر مخروطی، حل دقیق، جرم متمرکز

## فهرست مطالب

عنوان	صفحه
<b>۱- فصل اول : مقدمه و تاریخچه</b> .....	۱
۱-۱ مقدمه .....	۲
۲-۱ کاربردهای تیرهای مخروطی و روش حل معادلات آن .....	۲
۳-۱ اهمیت تعیین مد شیب‌ها و فرکانس های طبیعی یک سازه .....	۳
۱-۳-۱ عوامل به وجود آورنده ارتعاشات.....	۴
۲-۳-۱ مشخصه‌های ارتعاشی .....	۴
۳-۳-۱ اطلاعات قابل دستیابی از فرکانس ارتعاشات .....	۵
۴-۱ مروری بر تاریخچه .....	۵
۵-۱ تحقیق حاضر .....	۱۱
<b>۲- فصل دوم : ارتعاشات عرضی تیرها</b> .....	۱۳
۱-۲ مقدمه .....	۱۴
۲-۲ ارتعاشات عرضی تیرهای با سطح مقطع یکنواخت .....	۱۴
۳-۲ مد های طبیعی تیر تحت تاثیر ارتعاشات خمشی .....	۱۷
۴-۲ ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی .....	۲۲
۱-۴-۲ روش های حل معادله ارتعاشات عرضی تیر مخروطی .....	۲۳
۱-۴-۲-۱ حل دقیق .....	۲۳
۲-۴-۲-۱ روش رایلی ریتز .....	۲۵
۲-۴-۲-۲ مقایسه حل دقیقی و روش رایلی ریتز .....	۲۹
<b>۳- فصل سوم : ارتعاشات عرضی تیرهای مخروطی با جرم متمرکز</b> .....	۳۱
۱-۳ مقدمه .....	۳۲
۲-۳ استخراج معادله .....	۳۲
۳-۳ حل معادله دیفرانسیل .....	۳۷
۱-۳-۳ بدست آوردن ضرایب ثابت .....	۴۱
۴-۳ بدست آوردن توابع پایه .....	۴۲
۱-۴-۳ استخراج تابع پایه $g_1(\xi)$ .....	۴۲
۲-۴-۳ استخراج تابع پایه $g_2(\xi)$ .....	۴۴
۳-۴-۳ استخراج تابع پایه $g_3(\xi)$ .....	۴۶
۴-۴-۳ استخراج تابع پایه $g_4(\xi)$ .....	۴۸

۴۹.....	۵-۳	باز نویسی روابط تیر مخروطی با جرم های متمرکز بر حسب توابع پایه.....
۵۱.....	۶-۳	شرایط مرزی متعدد.....
۵۲.....	۱-۶-۳	محاسبه رابطه مد شیپ ها برای شرایط مرزی متقارن و نا متقارن.....
۵۲.....	۳-۱-۶-۳	تکیه گاه ساده.....
۵۴.....	۳-۱-۶-۲	تکیه گاه دو سر درگیر.....
۵۶.....	۳-۱-۶-۳	تکیه گاه گیر دار - تکیه گاه ساده.....
۵۸.....	۳-۱-۶-۴	دو سر آزاد.....
۶۰.....	۳-۱-۶-۵	گیردار- یک سر آزاد.....
۶۲.....	۴- فصل چهارم :	شبیه سازی و نتایج عددی.....
۶۳.....	۱-۴	مقدمه.....
۶۳.....	۲-۴	تکیه گاه ساده یا دو سر مفصل.....
۶۷.....	۳-۴	تکیه گاه دو سر درگیر.....
۷۰.....	۴-۴	تکیه گاه گیردار - یک سر مفصل.....
۷۳.....	۵-۴	چند جرم متمرکز بر روی تیر مخروطی ناقص.....
۷۵.....	۶-۴	رسم مد شیپ ها.....
۷۷.....	۵- فصل پنجم :	نتیجه گیری و ارائه پیشنهادها.....
۷۸.....	۱-۵	نتیجه گیری.....
۸۰.....	۲-۵	پیشنهادها.....
۸۱.....	فهرست مراجع.....	

## فهرست جدول‌ها

### عنوان

### صفحه

جدول ۱-۲: فرکانس‌های بدون جرم متمرکز تیر مخروطی گیردار - یک سر آزاد.....	۲۵
جدول ۲-۲: فرکانس‌های روش رایلی - ریتز.....	۲۹
جدول ۳-۲: مقایسه فرکانس‌های حل دقیق و روش رایلی - ریتز.....	۳۰
جدول ۱-۴: مقادیر فرکانس‌های بدون جرم متمرکز تیر مخروطی تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده.....	۶۴
جدول ۲-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 2$ .....	۶۴
جدول ۳-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 3$ .....	۶۴
جدول ۴-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 4$ .....	۶۵
جدول ۵-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 5$ .....	۶۵
جدول ۶-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 6$ .....	۶۵
جدول ۷-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 7$ .....	۶۶
جدول ۸-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 8$ .....	۶۶
جدول ۹-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی تکیه گاه ساده و $\Gamma = 9$ .....	۶۶
جدول ۱۰-۴: مقادیر فرکانس‌های بدون جرم متمرکز تیر مخروطی تحت شرط مرزی دو سر گیردار.....	۶۷
جدول ۱۱-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 2$ .....	۶۷
جدول ۱۲-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر در گیر و $\Gamma = 3$ .....	۶۸
جدول ۱۳-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 4$ .....	۶۸
جدول ۱۴-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 5$ .....	۶۸
جدول ۱۵-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 6$ .....	۶۹
جدول ۱۶-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 7$ .....	۶۹
جدول ۱۷-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 8$ .....	۶۹
جدول ۱۸-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی دو سر گیردار و $\Gamma = 9$ .....	۷۰
جدول ۱۹-۴: مقادیر فرکانس‌های بدون جرم متمرکز تیر مخروطی تحت شرط مرزی گیردار - یک سر مفصل.....	۷۰
جدول ۲۰-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار - یک سر مفصل و $\Gamma = 2$ .....	۷۱
جدول ۲۱-۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار - یک سر مفصل و $\Gamma = 3$ .....	۷۱

- جدول ۴-۲۲: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار- یک سر مفصل  
و  $\Gamma = 4$  ..... ۷۱
- جدول ۴-۲۳: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار- یک سر مفصل  
و  $\Gamma = 5$  ..... ۷۲
- جدول ۴-۲۴: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار - یک سر مفصل  
و  $\Gamma = 6$  ..... ۷۲
- جدول ۴-۲۵: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار- یک سر مفصل  
و  $\Gamma = 7$  ..... ۷۲
- جدول ۴-۲۶: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار- یک سر مفصل  
و  $\Gamma = 8$  ..... ۷۳
- جدول ۴-۲۷: مقادیر فرکانس‌های تیر مخروطی با جرم متمرکز تحت شرط مرزی گیردار - یک سر مفصل  
و  $\Gamma = 9$  ..... ۷۳
- جدول ۴-۲۸: مقادیر فرکانس اول تیر مخروطی با دو جرم متمرکز تحت سه شرط مرزی ..... ۷۴
- جدول ۴-۲۹: مقادیر فرکانس اول تیر مخروطی با چهار جرم متمرکز تحت سه شرط مرزی ..... ۷۴
- جدول ۴-۳۰: مقادیر فرکانس اول تیر مخروطی با پنج جرم متمرکز تحت سه شرط مرزی ..... ۷۵



## فهرست شکل ها

صفحه	عنوان
۳.....	شکل ۱-۱: نمایش یک موج ارتعاشی واقعی.....
۴.....	شکل ۲-۱: طیف فرکانسی یک موج ارتعاشی.....
۱۵.....	شکل ۱-۲: نمایش یک تیر تحت خمش در دستگاه مختصات $x-y$ .....
۱۵.....	شکل ۲-۲: نمایش یک المان از تیر تحت خمش.....
۱۸.....	شکل ۳-۲: نمایش یک تیر دو سر لولا.....
۲۰.....	شکل ۴-۲: تیر یک سر گیردار یک سر آزاد.....
۲۲.....	شکل ۵-۲: نمایش یک تیر مخروطی یک سر گیردار یک سر آزاد.....
۳۲.....	شکل ۱-۳: نمایش یک تیر مخروطی با جرم های متمرکز و دستگاه مختصات آن [۱].....
۳۳.....	شکل ۲-۳: نمایش یک تیر تحت خمش با جرم های نقطه ای.....
۳۳.....	شکل ۳-۳: نمایش یک المان از تیر تحت خمش.....

## فهرست نمودارها

### عنوان

### صفحه

- نمودار ۱-۲: نمایش سه مد شیپ اول تیر گیردار- یک سر آزاد ..... ۲۲
- نمودار ۲-۲: نمایش مد شیپ اول یک تیر مخروطی یک سر گیردار یک سر آزاد ..... ۲۹
- نمودار ۳-۲: نمایش مد شیپ دوم یک تیر مخروطی یک سر گیردار یک سر آزاد ..... ۳۰
- نمودار ۱-۴: مد شیپ‌های تیر مخروطی ناقص برای حالت تکیه گاه ساده با جرم متمرکز در موقعیت  $\xi = 9$  و  $\Gamma = 0.3, \alpha = 1$  ..... ۷۵
- نمودار ۲-۴: مد شیپ‌های تیر مخروطی ناقص برای حالت دو سر گیردار با جرم متمرکز در موقعیت  $\xi = 9$  و  $\Gamma = 0.7, \alpha = 1$  ..... ۷۶
- نمودار ۳-۴: مد شیپ‌های تیر مخروطی ناقص برای حالت یک سر گیردار یک سر ساده با جرم متمرکز در موقعیت  $\xi = 9$  و  $\Gamma = 0.5, \alpha = 1$  ..... ۷۶

## فهرست علائم و اختصارات

$V_0$	نیروی برشی	$m$	جرم واحد طول
$\theta_0$	شیب	$\rho$	چگالی
$W_0$	جابجایی	$A$	مساحت سطح مقطع
$J_i$	بسل نوع اول مرتبه $i$ ام	$I$	ممان اینرسی سطح مقطع
$Y_i$	بسل نوع دوم مرتبه $i$ ام	$E$	مدول یانگ
$I_i$	شبه بسل نوع اول مرتبه $i$ ام	$t$	زمان
$K_i$	شبه بسل نوع دوم مرتبه $i$ ام	$M$	ممان خمشی
$\Gamma$	نسبت سطح مقطع ها	$V$	نیروی برشی
$D$	بخش همگن حل تحلیلی	$L$	طول مخروط کامل
$g_i$	تابع پایه	$d_0$	قطر کوچک مخروط
$\omega$	فرکانس طبیعی	$d_1$	قطر بزرگ مخروط
$\beta$	پارامتر فرکانس بدون بعد	$N$	تعداد جرم ها
$h$	ضریب ثابت	$M_i$	جرم متمرکز
$M_0$	گشتاور	$\alpha$	جرم بدون بعد نسبت به جرم تیر
		$x$	موقعیت یک نقطه
		$y$	جابجایی عرضی
		$T$	تابع شامل جرم متمرکز بدون بعد و تابع دلتای دیراک
		$B$	تابع شامل جرم متمرکز و تابع دلتای دیراک
		$\xi$	موقعیت بدون بعد یک نقطه نسبت به طول تیر

## فصل اول : مقدمه و تاریخچه

## ۱-۱ مقدمه

تیرها یکی از معمول ترین سازه های مهندسی می باشند که آنها را می توان با توجه به مشخصات هندسی مانند : ضخامت، یکنواخت بودن، سطح مقطع و طول آن تقسیم بندی کرد. تیرهای نازک یکنواخت به عنوان یکی از ساده ترین نوع سازه همواره به طور گسترده ای استفاده می گردند. در بسیاری از حالات تیر مخروطی یک حالت بهینه ای در توزیع جرم و استحکام می باشد و اغلب موجب ایجاد سازه های خاص و کاربردی می شود.

سازه های دوار پیشتر به صورت یک تیر مرتعش انعطاف پذیر مدل می شدند بیشتر کارهایی که در این زمینه منتشر شده است با حل عددی و تحلیلی سر و کار دارند. وجود تیر های همراه با جرم متمرکز بر روی آن یکی از محدودیت های بزرگ در تجزیه و تحلیل مد شیب ها و فرکانس های طبیعی است. محورهای توربین ها و شافت هایی که بر روی آن ابزار های انتقال قدرت از قبیل چرخنده ها، تسمه ها، پره ها قرار دارند، این اجزا به صورت جرم متمرکز بر روی محور شافت مدل می شوند. در مقایسه با تیرهای یکنواخت، تیر های مخروطی اوپلر- برنولی کمتر مورد توجه قرار گرفته اند.

## ۱-۲ کاربردهای تیرهای مخروطی و روش های حل معادلات آن

تیرهای با سطح مقطع متغیر کاربردهای زیادی در توزیع جرم و استحکام دارند به طور مثال پل ها، ساختمانها و تجهیزات مکانیکی. تعداد زیادی از سازه های مهندسی و تجهیزات مکانیکی را می توان به صورت یک تیر غیریکنواخت مدل کرد به طور مثال : توربین ها، ملخ هواپیما، مکانیزم های سرعت بالا انعطاف پذیر، بازوی مکانیکی روبات ها و تجهیزات فضایی دوار از این دسته می باشند [ ۱ ] .

به طور کلی به جز برای مواردی خاص هیچ حل تحلیلی برای حل معادلات مربوط به تیرهای با سطح مقطع غیریکنواخت وجود ندارد. روش های مختلف زیادی مانند رایلی- ریتز، روش المان محدود، روش ماتریس انتقال، روش گالرکین، روش پرتوییشن<sup>۱</sup> که همگی روش های عددی هستند تاثیر پارامترهای مختلف هندسی را بر روی فرکانس های طبیعی بررسی کرده اند [ ۲ ] .

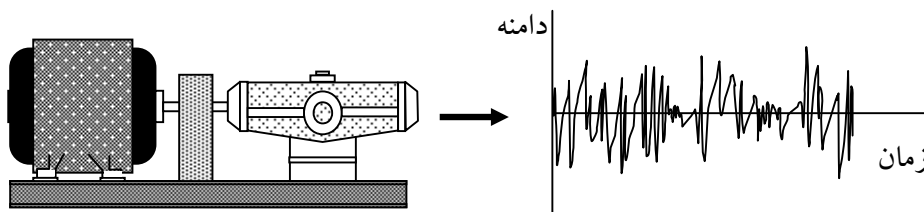
---

<sup>۱</sup> Perturbation method

همچنین محققین متعددی بر روی ارتعاشات عرضی تیر های غیر یکنواخت مطالعه کرده‌اند. بر خلاف مطالعات زیادی که بر روی تیر های یکنواخت انجام شده است. مطالعات انجام شده در زمینه تیرهای مخروطی محدود می‌باشد [۳ و ۴].

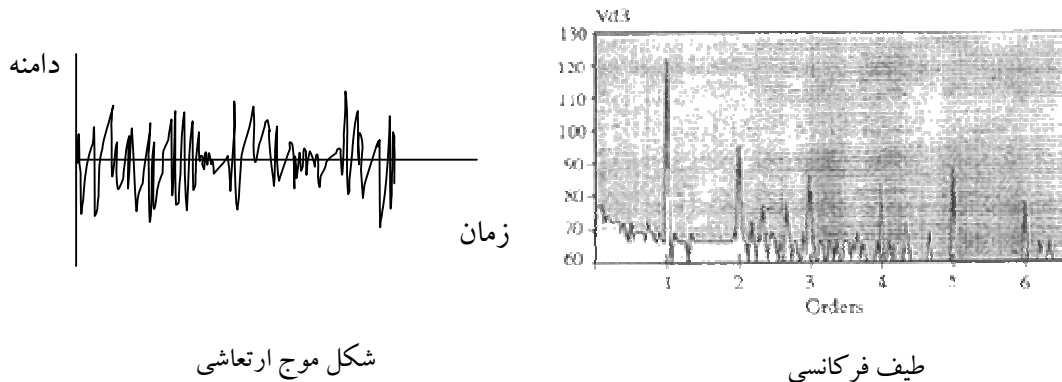
### ۱-۳ اهمیت تعیین مد شیپ‌ها و فرکانس‌های طبیعی یک سازه

در تعیین مراحل طراحی، پیش بینی دقیق مشخصات دینامیکی (تعیین مد شیپ‌ها و فرکانس‌های طبیعی) یک سازه بسیار ضروری است. در نتیجه، دور شدن از هر حالت رزونانس در محدوده سرعت کاری و جلوگیری از شکست بر اثر تحمل ارتعاشات، حائز اهمیت می‌باشد. متأسفانه داده‌های ارتعاشی که از ماشین‌آلات برداشت می‌شود موج‌های ساده‌ای ایجاد نمی‌کنند. این داده‌ها معمولاً اشکال پیچیده‌ای مانند آنچه که در زیر نشان داده شده، به وجود می‌آید.



شکل ۱-۱: نمایش یک موج ارتعاشی واقعی

شکل موج نشان داده شده در بالا همه اطلاعات مربوط به ارتعاش تجهیز در نقطه اندازه‌گیری را نشان می‌دهد. اما در واقع تأثیر تک‌تک رفتارهای ارتعاشی در اثر عوامل مختلف در تجهیز برهم نهاده شده و این شکل پیچیده بوجود آمده است. اگر غیرممکن نباشد حداقل امتحان این موج و جداسازی حرکات ارتعاشی مختلف از داخل آن بسیار مشکل است. به منظور ساده‌سازی و قابل فهم‌تر شدن داده‌های ارتعاشی، از سیگنال مربوطه تبدیل فرکانسی به عمل آورده می‌شود که نتیجه آن طیف فرکانسی بدست آمده در شکل (۱-۲) است.



شکل ۱-۲: طیف فرکانسی یک موج ارتعاشی

در ماشین آلات هر عیب یک سیگنال ارتعاشی منحصر به خود ایجاد می کند. وقتی این سیگنالها در یک طیف ارتعاشی نمایش داده می شوند الگوئی پدیدار می شود که نشان دهنده عیوب در آن تجهیز می باشد. برخی از معایب نظیر عدم تعادل جرمی (نابالانسی)، غیرهمراستایی (غیر-هم محوری)، خمیدگی در شافت، بیرینگ های سائیده شده و خراب، تماس روتور با بدنه، خارج از مرکزی و لقی می باشد که از طریق آنالیز فرکانسی می توان به آن پی برد.

### ۱-۳-۱ عوامل بوجود آورنده ارتعاشات

معمولاً مشکلات مکانیکی در ماشین آلات باعث ایجاد ارتعاشات می شوند. برخی از عوامل اصلی بوجود آورنده ارتعاشات همانند عدم تعادل جرمی، نیروهای الکترومغناطیسی، غیرهمراستایی، نیروهای آئرو دینامیکی، خمیدگی شافت، نیروهای هیدرولیکی، چرخ دنده های سائیده شده، لقی، بیرینگ های سائیده شده و خراب، تشدید، تماس روتور با بدنه و خارج از مرکزی می باشند.

### ۱-۳-۲ مشخصه های ارتعاشی

عامل بوجود آورنده ارتعاشات بدون توجه به نوع آن، نیرویی است که مقدار و یا جهت آن متغیر است، و مشخصات ارتعاشات حاصله تابع این نیرو خواهد بود. در نتیجه هر عاملی ارتعاشات با مشخصات خاص خود را ایجاد می کند. به طور مثال در نوسانات جرم و فنر، می توان با رسم حرکت وزنه نسبت به زمان مشخصات ارتعاشات را به تفصیل مطالعه کرد.

در حرکت وزنه از موقعیت خنثی (یا موقعیت سکون اولیه) به طرف حد بالائی حرکت و بازگشت آن به طرف پایین با عبور از موقعیت خنثی به حد پائینی حرکت و بازگشت مجدد آن به موقعیت خنثی، یک سیکل حرکت کامل را نمایش می‌دهد. این سیکل کلیه مشخصات لازم برای اندازه‌گیری ارتعاشات را داراست. ادامه حرکت وزنه تنها تکرار این سیکل با مشخصات یکسان خواهد بود. مهمترین مشخصات ارتعاشات، فرکانس ارتعاشات<sup>۱</sup>، دامنه ارتعاشات<sup>۲</sup>، فاز ارتعاشات<sup>۳</sup> می‌باشند.

### ۱-۳-۳ اطلاعات قابل دستیابی از فرکانس ارتعاشات

هنگام آنالیز ارتعاشات ماشین‌آلات برای تعیین عیب، آگاهی از فرکانس ارتعاشات ضروریست. آگاهی از فرکانس کمک می‌کند که مسئله و قطعه معیوب شناسائی شود. نیروهایی که ارتعاشات را پدید می‌آورند از طریق حرکت دورانی قطعات ماشین بوجود می‌آیند. از آنجا که مقدار و جهت این نیروها متناسب با سرعت دورانی قطعات تغییر می‌کند، نتیجه گرفته می‌شود که بسیاری از مسائل ارتعاشی دارای فرکانس‌هایی هستند که با سرعت دورانی ماشین ارتباط دارند. می‌توان با دقت روی فرکانس ارتعاشی و ارتباط دادن آن با دور ماشین و یا دورهای قسمت‌های مختلف ماشین، نیرو و در نهایت قطعه بوجود آورنده ارتعاشات را شناسائی کرد.

### ۱-۴ مروری بر تاریخچه

مطالعاتی برای ارزیابی فرکانس‌های طبیعی و مد شیب‌های تیرهای با سطح مقطع یکنواخت انجام شده است. جانگ و چن [۱] برای یک تیر منشوری یک سر گیردار یک سر آزاد با جرم‌های نقطه‌ای با حل عددی معادلات حاکم بر مسئله فرکانس‌های طبیعی را بدست آوردند. لو [۲] فرکانس‌های طبیعی یک تیر مخروطی یک سر گیردار یک سر آزاد با جرم متمرکز در انتهای آزاد و با در نظر گرفتن اینرسی برای جرم متمرکز را بدست آورد.

---

<sup>1</sup> Vibration Frequency

<sup>2</sup> Vibration Amplitude

<sup>3</sup> Vibration Phase



بررسی‌های اشیل هانس [۳] و پرولی [۴] نشان می‌دهند که فرکانس‌های طبیعی تیر دوار از فرکانس‌های طبیعی تیر غیر دوار بیشتر است. محققین روش‌های آنالیزی متعددی را جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی به کار گرفته‌اند [۳-۶]. هوآ [۵]، فرمول بندی المان محدود را برای تیرهای دوار یکنواخت نشان داد. رایت [۶]، با کاربرد سری‌های فربنوس یک حل دقیق از فرکانس‌ها و مدشپ‌ها بدست آورد. اگر چه برای تیرهای دوار مخروطی قابل اعمال است اما سختی و پیچیدگی زیادی دارد. گالجر و لی [۷]، و تو [۸]، یک روش المان محدود برای تخمین فرکانس‌های طبیعی و مدشپ‌های تیرهای مخروطی بدست آوردند. ساتو [۹]، فرکانس‌های طبیعی یک تیر مخروطی تحت بار محوری را بررسی کرد.

معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات خمشی تیر اویلر - برنولی مرتبه چهارم می‌باشد. برای تیرهای غیریکنواخت ضرایب حاکم بر معادله دیفرانسیل متغیر می‌باشد. کلی‌ترین حالت تیر غیریکنواخت با حل دقیق به وسیله وانگ [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. حل ارائه شده بر مبنای تئوری اویلر - برنولی برای یک تیر یک سر گیردار با سختی خمشی متغیر در طول تیر و با استفاده از سری‌های هندسی می‌باشد. در سازه‌های پیچیده تیرهای غیر یکنواخت به طور گسترده ای مورد استفاده قرار می‌گیرند و تلاش برای رسیدن به یک توزیع بهتر جرم و استحکام نیاز می‌باشد. بنابراین مسئله خمش در تیرهای غیریکنواخت به دلیل کاربرد گسترده آنها در صنایع هوا فضا، مکانیک و معدن موضوع روز بسیاری از تحقیقات می‌باشد [۱۱ و ۱۲].

بیشتر کارهای پیشین قبلی انجام شده شرایط مرزی کلاسیک دارد و همچنین حل‌های ارائه شده براساس روش‌های عددی می‌باشد و محدودیت همگرایی دارند. زمانی که از روش ماتریس انتقال استفاده می‌شود، تیر مخروطی به صورت تعدادی از تیرهای پله‌ای تخمین زده می‌شود. گروسی [۱۱ و ۱۲] مسئله‌های متنوعی را از تیرهای مخروطی با استفاده از روش رایلی ریتز و رایلی - اسکمیت مورد مطالعه قرار داد. لی و همکاران [۱۳]، آنالیز تیرهای غیریکنواخت را با استفاده از روش تابع گرین در حوزه لاپلاس مورد مطالعه قرار داد. هو و چن [۱۴]، تیر یکنواخت با یک انتهای بسته الاستیک با استفاده از تبدیل دیفرانسیلی را مورد مطالعه قرار دادند. آشیلو [۱۵ و ۱۶]، ارتعاشات تیر مخروطی با انتهای انعطاف پذیر با استفاده از توابع بسل را مورد مطالعه قرار داد.

درباره آنالیز ارتعاشات تیرهای غیر یکنواخت بدون جرم مقاله‌های متعددی وجود دارد [۲۰-۱۵] و اما اطلاعات درباره رفتار دینامیکی تیرهای غیریکنواخت با جرم‌های متمرکز کمتر می‌باشد. تیرهای یکنواخت (با چند جرم متمرکز) [۱۷] کمتر کار شده است. همه این مقالات بر اساس نظریه تیر اوایلر برنولی می‌باشد مگر اینکه ذکر شده باشد. کانوی و دوویل [۱۷]، یک حل بسته برای تیرهای مخروطی ناقص بدست آوردند. گوال [۱۸]، یک حل بسته برای تیر تکی و دوویل مخروطی با شرایط انتهایی یک فنر پیچشی و یک جرم آویزان در سر آن بدست آورد. هیدبرج [۱۹]، مد شیب‌ها و فرکانس‌های طبیعی یک تیر غیر یکنواخت با شرط مرزی تکیه گاه ساده را با استفاده از معادله فرکانسی و سری فوریه تخمین زد که این معادله فرکانسی از معادله لاگرانژ با توزیع جرمی  $\bar{m}(x)$  و ممان اینرسی  $I(x)$  از ترم‌های کسینوسی سری فوریه بدست آمده است. مبی و راجرز [۲۰]، از چند جمله‌ای مرتبه دوم و چهارم و دستگاه مختصات محوری  $x$  برای بیان سطح مقطع  $A(x)$  و  $I(x)$  استفاده کردند. اما آنها معادله دیفرانسیل پاره ای تیر دوپل مخروطی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل کردند و با حل آن معادله، فرکانس‌های طبیعی را بدست آوردند. دانز [۲۱]، فرکانس‌های طبیعی و مد شیب‌های یک تیر یک سر گیردار را بر اساس هر دو نظریه تیر تیموشنکو و اوایلر با استفاده از روش جدا سازی ارائه کرد. بیلی [۲۲]، فرکانس‌های یک تیر غیر یکنواخت را به صورت عددی از حل مستقیم معادله فرکانسی حاصل شده از قانون همپلتون را تعیین کرد. گوپتا [۲۳]، ماتریس جرم و سختی را برای یک تیر با المان خطی تیر مخروطی بدست آورد و سپس فرکانس‌های طبیعی و مد شیب‌ها را به روش متداول المان محدود بدست آورد. نیکلاس وارن یک تقریبی از فرکانس‌های طبیعی را برای تیرهای مخروطی تکی و تیرهای مخروطی دوپل با حل مستقیم معادله مد شیب بر اساس روش فریبنیوس، تعیین کرد [۲۴ و ۲۵]. آبریت [۲۶]، معادله حرکت تیر غیریکنواخت را بدست آورد که امکان تبدیل به یک تیر یکنواخت را داشت و سپس آن را برای فرکانس‌های طبیعی و مد شیب‌ها حل کرد. اگر سطح مقطع  $A(x)$  و ممان اینرسی  $I(x)$  باشد یک فرم خاصی حاصل می‌شود. لورا، گوتیرز و روسی [۲۷]، فرکانس‌های طبیعی تیرهای اوایلر-برنولی با عرض ثابت و ضخامت متغیر را با استفاده از سه روش عددی معروف: رایلی-ریتز، روش المان محدود و روش تفاضل مربعات تخمین زد. داتا و سیل [۲۸]، عکس روند مرجع یک را انجام داد. هافمن و وردیمر [۲۹]، یک فرمول ساده برای

تعیین فرکانس اساسی تیرهای مخروطی یک سرگیردار نمایش دادند به طوریکه این فرمول تابعی از مود اول تغییر شکل استحکام تیر، جرم تیر و پارامتر توزیع جرم می‌باشد. برای فرکانس‌های طبیعی و مد شیب‌های تیرهای غیریکنواخت (با جرم متمرکز) و قیدها در دو سر آن و یا در یک انتهای آن [۳۳-۳۰] روند حل مشابه به حل تیر یکنواخت فاقد جرم می‌باشد [۲۵-۱۹].

تنها اختلاف تیرهای غیر یکنواخت (با جرم متمرکز) و قیدها در دو سر آن تغییر شرایط مرزی می‌باشد. از جمله این تغییرات در شرایط مرزی می‌توان به: نیرو به علت وجود فنر، ممان خمشی به علت وجود فنر پیچشی، نیروی اینرسی به علت انباشت جرم و ممان اینرسی به علت ممان اینرسی جرم متمرکز اشاره کرد [۳۷-۳۴]. تیرهای مخروطی دوار اهمیت زیادی دارند به علت اینکه کاربردهای عملی زیادی از قبیل: پره‌های توربین، تجهیزات فضایی دوار، که توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته است [۴۳-۳۸]. آنالیز ارتعاشات این سازه‌ها منجر به یک معادله دیفرانسیل مرتبه چهارم با ضرایب متغیر می‌شود.

در حالت کلی، به جز تعدادی از حالت‌های کاربردی [۳۸ و ۳۹]، هیچ حل دقیقی برای اینگونه موارد در دسترس نیست. از این رو تعداد زیادی از روش‌های تقریبی از قبیل: روش رایلی - ریتز [۴۱]، مایکل استاد [۴۲]، المان محدود، ماتریس انتقال، پرتویشتین، تقریب پیاپی و گالرکین که برای بدست آوردن نتایج عددی و بررسی کردن تاثیر پارامترهای فیزیکی مختلف بر روی فرکانس‌های طبیعی استفاده می‌شود.

در اکثر آنالیزهای قبلی [۴۱ و ۴۲] و [۳۹]، تیرهای دوار اغلب به تیرهای یک سرگیردار قابل انعطاف مدل می‌شوند. آنالیزها نشان داده است که فرکانس خمشی تیرهای یک سرگیردار دوار به علت استحکام گریز از مرکزشان بزرگتر از فرکانس‌های تیرهای غیر دوار هستند. برای تیرهای مخروطی ترکیبی از شرایط کلاسیک مرزی (آزاد، مفصل، گیردار) توسط کانوی بررسی شده است [۳۸ و ۳۹]. ارتعاشات تیرهای غیریکنواخت با شرایط مرزی غیر کلاسیک از قبیل فنر و انتهای جرم‌دار مورد مطالعه می‌باشد. هوجز [۴۰]، اولین و دومین مقدار ویژه فرکانسی تیر یک سرگیردار با یک جرم در انتها را بدست آورد.

ارتعاشات تیر مخروطی یک سرگردار با اینرسی چرخشی و یک جرم متمرکز در انتها توسط اسکرو به طور جدی مورد بررسی قرار گرفته است [۴۱]. توابع سیمبولیک [۴۳]، و ارزیابی تجربی مقادیرهای ویژه همچنین در دسترس است به طوری که سطح مقطع تیر به صورت

$$A(x) = A_1 \left( \frac{x}{L} \right)^2$$

ممان اینرسی به صورت  $I(x) = I_1 \left( \frac{x}{L} \right)^4$  تعریف شده و جواب کلی به صورت ترکیبی از توابع بسل بدست آمده است. کوآشیا [۴۴]، یک دوره کاملی بر روی روش‌های تقریبی به کار برده شده در ارتعاشات تیرهای دوار را انجام داد.

مقایسه بین تیرهای یکنواخت دوار و تیرهای اویلر-برنولی کمتر مورد توجه قرار گرفته است. داتا و گانجولی [۴۵]، روش تحلیل مستقیم ریتز را برای حل فرکانس‌های طبیعی و مد شیب‌ها به کار برد. ژائو و دی‌ولف [۴۶]، ارتباط توابع شکل چند جمله‌ای لاگرانژ را با روش المان محدود نشان دادند و فرکانس‌های طبیعی یک تیر دوار را مورد بررسی قرار دادند. دقت این روش به تعداد المان‌های استفاده شده و به تعداد جملات سری انتخاب شده بستگی دارد. سدر و اوتمان [۴۷]، از روش گالرکین تاثیر زاویه مخروط، جرم در نوک تیر، نسبت مخروطی بودن را بر روی ارتعاشات خمشی مورد بررسی قرار دادند. پره‌های دوار یکی از مهمترین عضوهای توربین‌های بادی، توربین‌های بخار و گاز، روتور هلیکوپتر و ملخ هواپیما می‌باشد. این پره‌ها اغلب در تئوری به صورت تیر دوار فرض می‌شوند. در طراحی پره‌ها پیش‌بینی مشخصات دینامیکی پره (فرکانس‌ها و مدشیب‌ها) به منظور دور شدن از هر حالت محتمل رزونانس مورد اهمیت می‌باشد [۴۹-۴۴].

برای یک پره روتور هلیکوپتر نسبتاً طولانی، یک نمایش ساده و دقیق مدل تیر اویلر-برنولی می‌باشد. پره روتور هلیکوپتر می‌تواند تنش‌های خمشی خارج از صفحه خمش و پیچش را تحمل کند. به علت تاثیر سختی گریز از مرکز، پارامترهای تیر اویلر-برنولی به صورت چشمگیری نسبت به تیرهای غیر دوار تغییر می‌کند بنابراین، برای حل نیازمند به یکی از روش‌های عددی از قبیل گالرکین، ریتز یا روش المان محدود می‌باشد [۴۹-۴۷].

روش‌های المان محدود مرسوم نسبت به روش‌های ریتز و گالرکین مزیت‌هایی دارند که می‌توان به آسانی برای هر شرط مرزی اصلاح کرد و از جمله روش‌هایی هستند که اغلب برای مسائل تیرهای دوار به کار می‌روند. به هر حال، پره‌ها سطح مقطع غیریکنواخت دارند و جرم و استحکام