وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری مخروطی

توسط:
سهیلا میرزایی

استاد راهنما:
دکتر مرتضی ابطحی

استاد مشاور:
دکتر محمد رمضانپور

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری مخروطی

توسط:

سهیلا میرزایی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم

برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **خوب**

دکتر مرتضی ابطحی ابوری استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز تابعی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش نظریه معادلات - سیستم دینامیکی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر نرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

آنان که هر سختی را به جان خریدند تا راهم را هموار سازند، کسانیکه همه هستی من از آنهاست و اکنون چه کوتاه لحظه ای است برای ستودن آنها.

تقدیم به اسوه تلاش و رشادت پدرم که از نگاه سبز و آفتابی اش بالیدم، سایه ات بر سرم همواره گسترده باد.

تقدیم به نازنین الهه مهربانی و کوه صبر و بردباری مادرم، دست این دو فرشته زندگیم را می بوسم.

تقدیم به همسر بی همتا و مهربانم که بدون لبخند مهربانش لحظه ای نتوانم زیست.

تقدیم به قلب های پاک و مهربانی که با تپش هایشان همواره یار و همراهم بوده اند و وجودشان مایه دلگرمی ام در پیمودن راه، خواهران و برادرانم.

سپاسگزاری

بارالها!

این بار نیز زبان قاصرانه و دل خاشعانه تو را سپاس می گوید که بی هیچ چشم داشتی از بندگانت و با کرامت بی انتهایت، هر روز می بخشی و می بخشایی. اکنون که به لطف پروردگار بزرگ موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر مرا راهنمایی نموده اند، تشکر نمایم.

بر خود واجب می‌دانم مراتب سپاس و قدردانی عمیق قلبی خود را به خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم دکتر مرتضی ابطحی ایوری که در طول دوران تحصیل و ارائه پایان نامه از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره مند گشته‌ام ابراز نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر محمد رمضانپور که مشاوره این پایان نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر را دارم.

از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر محمد ابری و جناب آقای دکتر امین اصفهانی که در مقام داور زحمت مطالعه پایان نامه را بر عهده داشتند قدردانی می نمایم.

از زحمات خانواده عزیزم که سربلندی امروزم را مدیون زحمات دیروز آن ها می دانم، سپاسگزارم.

چکیده

قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری مخروطی

به وسیله‌ی:
سهیلا میرزایی

در این پایان نامه ابتدا به معرفی فضاهای متری مخروطی کامل می‌پردازیم و سپس برخی از قضایای نقطه ثابت را که در فضاهای متری (معمولی) برقرار است برای فضاهای متری مخروطی بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه از این حقیقت بهره می‌گیریم که تحت شرایطی یک فضای متری مخروطی (X, d) مترپذیر است یعنی متر ρ وجود دارد که (X, d) و (X, ρ) دنباله‌های کوشی و دنباله‌های همگرای یکسان دارند. لذا برخی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری مخروطی که ظاهراً تعمیمی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری است تعمیمی واقعی به حساب نمی‌آید.

واژه‌های کلیدی: فضای متری مخروطی، نقطه ثابت، نگاشت انقباضی

فهرست مطالب

فهرست مطالب ه

۱ فضاهای متری مخروطی ۳

۱-۱ فضاهای متری ۳
۱-۲ فضاهای متری کامل ۶
۱-۳ برخی قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری ۷
۱-۴ فضاهای برداری مرتب ۱۱

۲ قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری مخروطی ۲۱

۲-۱ قضیه نقطه ثابت باناخ ۲۱
۲-۲ قضیه نقطه ثابت ادلستین ۲۶
۲-۳ قضیه نقطه ثابت کانان ۲۷
۲-۴ قضیه نقطه ثابت کترجیا ۳۰
۲-۵ قضیه نقطه ثابت برایند ۳۳

۳ قضایای نقطه ثابت از نوع سوزوکی ۳۶

۳-۱ توسیع اصل انقباض باناخ از نوع سوزوکی برای فضاهای متری مخروطی ۳۶
۳-۲ توسیع برخی دیگر از قضایای نقطه ثابت از نوع سوزوکی برای فضاهای متری مخروطی ۴۱

مراجع ۵۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۵۴
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۵۶

پیشگفتار

هدف ما در این پایان نامه بررسی یافته‌های دو ریاضیدان به اسم‌های هانگ [۱] و ژانگ [۲] و ریاضیدانان دیگری است که فضای متریک مخروطی را از نظر خواص توپولوژیکی و وجود نقطه ثابت برای نگاشت‌های انقباضی مورد مطالعه قرار داده‌اند. از جمله شی دوو [۳] با جایگزین کردن فضای برداری توپولوژیک (tvs) به جای فضای باناخ حقیقی، فضای متریک مخروطی را به فضای متریک مخروطی tvs تعیم می‌دهد. در این دیدگاه فرم برداری قضایای نقطه ثابت در فضای متریک مخروطی در نظر گرفته می‌شود. و روابط هم ارز بین تفاسیر برداری قضایای نقطه ثابت در فضای متریک مخروطی و تفاسیر اسکالری قضایای نقطه ثابت در فضای متریک معمولی مورد بررسی قرار داده می‌شود. سپس با در نظر گرفتن دیدگاه ریاضیدانی چون رضاپور قضایای نقطه ثابت در فضای متریک مخروطی بیان و اثبات شده است. در ادامه نتایج بدست آمده حاصل از این بررسی‌ها بیان شده است.

قضیه نقطه ثابت باناخ یک قضیه بسیار ساده و موثر است که اولین بار در سال ۱۹۲۲ در پایان نامه شخصی به نام استفان باناخ [۴] ظاهر شد. این قضیه یک ابزار کلاسیک در آنالیز غیر خطی می‌باشد و تعمیم‌های بسیاری دارد که می‌توان تعمیم‌های این قضیه را در [۸،۱۶،۲۳،۲۴،۲۵،۲۶] مشاهده کرد.

در سال ۱۹۶۹ شخصی به نام کانان [۵] به معرفی نگاشتی پرداخت که بعدها به نام خود شخص معروف شد و ثابت کرد که اگر X یک فضای متری کامل باشد آن‌گاه هر نگاشت کانان دارای نقطه ثابت است. نکته قابل توجه آن است که قضیه نقطه ثابت کانان توسیعی از قضیه نقطه ثابت باناخ

[۱] Huang

[۲] Guang

[۳] Shih Du

[۴] Stefan Banach

[۵] Kannan

نمی‌باشد و از نظر بسیاری از ریاضیدانان قضیه نقطه ثابت کانان بسیار مهم تر از قضیه نقطه ثابت باناخ است.

این پایان نامه شامل سه فصل می‌باشد، که در فصل اول به یادآوری مفاهیم فضای متری و فضای متری کامل و به بیان قضایای نقطه ثابت در فضای متری کامل می‌پردازیم و همچنین مفهوم فضای متری مخروطی کامل را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم به بیان قضایای نقطه ثابت در فضای متری مخروطی می‌پردازیم و این قضایا را با شرط نرمال بودن مخروط و همچنین حذف شرط نرمال بودن مخروط مورد بررسی قرار داده و اثبات می‌کنیم.

در فصل سوم تعمیمی جدید و خیلی ساده از قضیه نقطه ثابت باناخ را بیان می‌کنیم که توسط شخصی به نام سوزوکی [۶] در سال ۲۰۰۸ بیان شد که فضای متری کامل را مشخص سازی می‌کند. در این فصل تعمیم سوزوکی از اصل انقباض باناخ را در فضای متری کامل بیان می‌کنیم و تعمیم آن را در فضای متری مخروطی کامل بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه توسیعی از قضیه ادلستین [۷] از نوع سوزوکی را معرفی و اثبات می‌کنیم.

در این پایان نامه بیشتر از مراجع [۲] و [۵] و [۷] و [۱۶] استفاده شده است.

[۶] Suzuki

[۷] Edelstein

فصل ۱

فضاهای متری مخروطی

هدف ما در این فصل آشنایی با فضاهای متری مخروطی می‌باشد، برای این منظور به یادآوری مفاهیم فضاهای متری و فضاهای متری کامل می‌پردازیم ودر ادامه مفهوم نگاشت انقباضی و برخی از قضایای نقطه ثابت را در فضاهای متری بیان می‌کنیم سپس در پایان فضاهای متری مخروطی را معرفی می‌کنیم.

۱-۱ فضاهای متری

ابتدا مفهوم فضاهای متری را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید X یک مجموعه دلخواه وناتهی باشد تابع $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک متریک یا یک متر روی X می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱) $d(x,x) = 0$،

۲) $d(x,y) = 0$ اگر و فقط اگر $x = y$،

۳) $d(x,y) = d(y,x)$،

۴) $(x,y) \leq (x,z) + (z,y)$ (نامساوی مثلث) در صورتی که d یک متر روی X باشد، (X,d) را یک فضای متریک می‌نامیم و می‌گوییم فضای X به متر d مجهز شده است.

ملاحظه ۱.۱.۱. اغلب نویسندگان شرط نامنفی بودن متر را به عنوان یکی از خواص اصلی متر معرفی می‌کنند که می‌توان این شرط را به راحتی از شرایط(۱)و(۴) نتیجه گرفت. به این صورت که برای هر $x, y \in X$ داریم $d(x,y) + d(y,x) \geq d(x,x)$ بنابراین $2d(x,y) \geq 0$ ولذا $d(x,y) \geq 0$.

حال به بیان چند مثال از فضاهای متری می‌پردازیم.

مثال ۲.۱.۱. قرار می‌دهیم $X = \mathbb{R}^n$ یعنی مجموعه همه n تایی $x = (x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ که $x_i \in \mathbb{R}$ برای هر $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و $y = (y_۱, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = \Big(\sum_{i=۱}^{n}(x_i - y_i)^۲\Big)^{۱/۲}$$

آن‌گاه d یک متر روی $\mathbb{R}^n$ است که به متر اقلیدسی معروف است وبه $\mathbb{R}^n$ همراه با متر اقلیدسی،فضای اقلیدسی گوییم.

روی یک مجموعه می‌توان مترهای گوناگون تعریف کرد، اگر فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی ودلخواه باشد و $d_۱$ و $d_۲$ دو متر روی آن باشند. $d_۱$ و $d_۲$ را معادل گوییم، هرگاه اعداد مثبتی مانند α و β موجود باشند به قسمی که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$\alpha d_۱(x,y) \leq d_۲(x,y) \leq \beta d_۱(x,y).$$

مثال ۳.۱.۱. روی $\mathbb{R}^n$ مترهای $d_۱$ و $d_۲$ و d_∞ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_۱(x,y) = \sum_{i=۱}^{n}|x_i - y_i|,$$
$$d_۲(x,y) = \Big(\sum_{i=۱}^{n}|x_i - y_i|^۲\Big)^{۱/۲},$$
$$d_\infty(x,y) = \max\{|x_i - y_i| : ۱ \leq i \leq n\}.$$

آن‌گاه هر سه متر $d_۱$ و $d_۲$ و d_∞ به مفهوم بالا با هم معادل هستند.

مثال ۴.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی باشد نگاشت $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ را برای هر $x, y \in X$ به صورت

$$d(x,y) = \begin{cases} ۱, & x \neq y, \\ ۰, & x = y. \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. آن‌گاه d یک متر روی X است که به آن متر گسسته گویند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی ودلخواه باشد. هر تابع $x : \mathbb{N} \longrightarrow X$ که $n \longmapsto x_n$، یک دنباله در X نام داردکه آن را با نماد (x_n) یا $\{x_n\}$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ تابعی اکیدا صعودی باشد، تابع $y : \mathbb{N} \longrightarrow X$ با ضابطه $y(n) = x_{h(n)}$ را زیر دنباله ای از x گوییم .

مثال ۶.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $B(X)$ مجموعه همه توابع کران‌دار $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. برای هر $f, g \in B(X)$ تعریف می‌کنیم

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\}. \tag{۱.۱}$$

چون f و g کران‌دار هستند پس $d(f,g) < \infty$. به آسانی می‌توان دید تابع تعریف شده d در (۱.۱) یک متر روی $B(X)$ است. حالت خاص این مثال زمانی است که $X = \mathbb{N}$، در این صورت $B(X)$ را با ℓ^∞ نشان می‌دهیم و عبارت است از مجموعه همه دنباله های (x_n) از اعداد حقیقی به طوری که

$$\sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$$

مثال ۷.۱.۱. فرض کنیم $۱ < p < \infty$. ℓ^p را مجموعه همه دنباله های (x_n) از اعداد حقیقی قرار می‌دهیم به طوری که

$$\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p < \infty.$$

برای دو عضو $x = (x_n)$ و $y = (y_n)$ از ℓ^p تعریف می‌کنیم

$$d(x,y) = \big(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n - y_n|^p\big)^{۱/p}.$$

آن‌گاه d یک متر روی ℓ^p است.

فضاهای نرم‌دار حالت خاصی از فضاهای متری هستند. ابتدا یادآوری می‌کنیم که اگر X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ باشد، تابع $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نرم است اگر برای هر $x, y \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ شرایط زیر را داشته باشد:

۱) $\|x\| \geqslant ۰$ و $\|x\| = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$،

۲) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

۳) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

آن‌گاه به $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار گوییم. حال اگر تعریف کنیم $d(x,y) = \|x - y\|$ آن‌گاه X همراه با d یک فضای متری است.

مثال ۸.۱.۱. فضای ℓ^∞ معرفی شده در مثال ۵.۱.۱ با نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\|x\|_\infty = \underset{n \in \mathbb{N}}{Sup} |x_n|.$$

مثال ۹.۱.۱. فضای ℓ^p معرفی شده در مثال ۶.۱.۱ با نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\|x\|_p = \big(\sum_{n=۱}^{\infty} |x_n|^p\big)^{۱/p}.$$

۱–۲ فضاهای متری کامل

فرض کنیم (X,d) یک فضای متری و (x_n) یک دنباله در X باشد. نقطه $x \in X$ حد دنباله (x_n) نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد مثبت N موجود باشد به طوری که برای هر $n > N$ داشته باشیم $d(x_n, x) < \varepsilon$. در این حالت گوییم دنباله (x_n) همگرا به x است و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow x$ و همچنین می‌توان مشاهده کرد که حد دنباله همواره یکتا است.

مثال ۱.۲.۱. مجموعه X را به متر گسسته که در مثال ۴.۱.۱ بیان شد مجهز می‌کنیم. فرض کنیم (x_n) یک دنباله در X باشد که به نقطه $x \in X$ همگراست. قرار می‌دهیم $\varepsilon = \frac{۱}{۲}$. در این صورت عدد N موجود است به طوری که برای هر $n > N$ داریم $d(x_n, x) < \frac{۱}{۲}$. اما در فضای متری گسسته $d(x_n, x) < \frac{۱}{۲}$ اگر و فقط اگر $d(x_n, x) = ۰$ اگر و فقط اگر $x_n = x$. بنابراین برای هر $n \geqslant N$ باید $x_n = x$، یعنی از یک جایی به بعد دنباله با یک مقدار ثابت برابر می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد، دنباله (x_n) در X یک دنباله کوشی نامیده می‌شود اگر برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد مثبت N وجود داشته باشد به طوری که برای هر $n, m > N$ داشته باشیم $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

به راحتی می‌توان نشان داد که هر دنباله همگرا در فضاهای متری، یک دنباله کوشی است [۲۱]. ولی عکس این مطلب صحیح نمی‌باشد یعنی می‌توان دنباله‌ای یافت که کوشی است ولی همگرا نیست.

مثال ۳.۲.۱. قرار دهیم $X = (۰, ۱)$ و برای هر $x, y \in X$ تعریف می‌کنیم $d(x,y) = |x - y|$. حال دنباله $(\frac{۱}{n})$ را در X در نظر می‌گیریم چون در فضای $\mathbb{R}$، $\frac{۱}{n} \longrightarrow ۰$ بنابراین $(\frac{۱}{n})$ یک دنباله کوشی است اما در X همگرا نیست زیرا $۰ \notin X$.

تعریف ۴.۲.۱. فضای متری (X,d)، کامل نامیده می‌شود اگر هر دنباله کوشی در X همگرا به نقطه‌ای در X باشد.

تعریف ۵.۲.۱. فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ را فضای باناخ [۱] گوییم هرگاه نسبت به متر تعریف شده

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

یک فضای متری کامل باشد.

مثال ۶.۲.۱. فضاهای ℓ^p و ℓ^∞ فضاهای باناخ هستند [۱۶].

[۱] Banach space

مثال ۱.۲.۷. فضای خطی حقیقی $C[0,1]$ متشکل از تمام توابع پیوسته حقیقی تعریف شده روی $[0,1]$ را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $X = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$. آن‌گاه X با نرم سوپریمم یعنی برای هر $f \in X$،

$$\|f\|_u = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$$

یک فضای باناخ حقیقی است.

اگرقرار دهیم

$$Y = C^1[0,1] = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f', f \text{ موجود و پیوسته است}\}$$

آن‌گاه Y با نرم سوپریمم، زیر فضای محض و بسته X است، یک فضای نرم‌دار است که کامل نیست. زیرا اگر f_n ها به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند و $f_n \xrightarrow{u} f$ ممکن است f مشتق‌پذیر نباشد.

اگر X باناخ باشد و Y زیر فضای X باشد. در صورتی Y باناخ است که Y بسته باشد. به عبارت دیگر زیر فضاهای بسته فضاهای کامل، کامل است.

۱-۳ برخی قضایای نقطه ثابت در فضاهای متری

ابتدا قضیه نقطه ثابت باناخ که معمولا با اصل انقباض باناخ شناخته می‌شود و یکی از مهم‌ترین قضایا در آنالیز ریاضی است را بیان می‌کنیم.این قضیه به فرم روشنی در پایان‌نامه مربوط به استفان باناخ در سال۱۹۲۲ظاهر شد که برای اثبات وجود جواب، برای یک معادله انتگرال مورد استفاده قرار گرفته بود. این قضیه کاربردهای فراوانی در ریاضیات و به ویژه در آنالیز دارد.

ابتدا مفهوم نقطه ثابت را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد. نقطه $x_\circ \in X$ را یک نقطه ثابت T نامیم، اگر $T(x_\circ) = x_\circ$.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $T : X \longrightarrow X$ به صورت $T(x) = x + sin\pi x$ تعریف شده باشد در این صورت T دارای بی‌نهایت نقطه ثابت می‌باشد.

مثال ۳.۳.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $T : X \longrightarrow X$ را به صورت $T(x) = cos(x)$ تعریف می‌کنیم آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

مثال ۴.۳.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و $T : X \longrightarrow X$ به صورت $T(x) = x + (1 + e^x)^{-1}$ تعریف شده باشد. در این صورت T روی X نقطه ثابت ندارد.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای متریک با متر d باشد. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را لیپ‌شیتس [۲] نامیم، هرگاه $k \geq 0$ وجود داشته باشدبه‌طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

کوچکترین k ای که در رابطه فوق صدق کند را ثابت لیپ شیتس نگاشت T می‌نامیم و آن‌را با $k(T)$ نشان می‌دهیم و از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$k(T) = sup\left\{\frac{d(Tx, Ty)}{d(x, y)} : x, y \in X, x \neq y\right\} < \infty.$$

اگر $k(T)$ و $k(S)$ به‌ترتیب ثابت‌های لیپ‌شیتس نگاشت‌های T و S باشند آن‌گاه

$$k(T \circ S) \leq k(T)k(S),$$

که در آن $T \circ S(x) = T(Sx)$ و به‌ویژه

$$k(T^n) \leq k^n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

که $T^n x = T(T^{n-1}x)$. چنانچه $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت لیپ‌شیتس باشد و $k(T) < 1$، به T یک انقباض گوییم و اگر $k(T) = 1$، در این صورت نگاشت T را یک نگاشت غیر انبساطی نامیم.

قضیه ۶.۳.۱. *(قضیه نقطه ثابت باناخ [۳]). فرض کنیم X یک فضای متری کامل و $T : X \longrightarrow X$ یک انقباض روی X باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

از آن‌جایی که قضیه نقطه ثابت باناخ یکی از موضوعات اصلی این پایان‌نامه است اثبات آن‌را بیان می‌کنیم.

[۲] Lipschitz

اثبات. $x_\circ \in X$ را ثابت می‌گیریم و دنباله $(x_n) \in X$ را به صورت $x_n = T^n x_\circ$ تعریف می‌کنیم که $n = \circ, ۱, \ldots$. برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم

$$d(x_n, x_{n+۱}) \leq kd(x_{n-۱}, x_n) \leq k^۲ d(x_{n-۲}, x_{n-۱}) \leq \ldots \leq k^n d(x_\circ, x_۱),$$

بنابراین برای هر $n, m \in \mathbb{N}$ که $m > n$ داریم

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+۱}) + d(x_{n+۱}, x_{n+۲}) + \ldots + d(x_{m-۱}, x_m) \\ &\leq (k^n + k^{n+۱} + \ldots + k^{n-۱}) d(x_\circ, x_۱) \\ &\leq \frac{k^n}{۱-k} d(x_\circ, x_۱). \end{aligned}$$

از آن‌جایی که $k < ۱$ وقتی $n \longrightarrow \infty$ آن‌گاه $\frac{k^n}{۱-k} \longrightarrow \circ$ و این نشان می‌دهد که (x_n) یک دنباله کوشی است. از آن‌جایی که X کامل است، $x \in X$ وجود دارد به طوری که $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x$ که نتیجه می‌شود

$$T(x) = T(\lim_{n \longrightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} T(x_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} x_{n+۱} = x$$

بنابراین داریم $T(x) = x$. حال اثبات می‌کنیم که نقطه ثابت یکتا است. با برهان خلف فرض می‌کنیم $x, y \in X$ دو نقطه ثابت از نگاشت T باشند به طوری که $x \neq y$ آن‌گاه داریم

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

که نتیجه می‌شود $d(x, y) = \circ$ و داریم $x = y$ که با فرض در تناقض است. بنابراین نقطه ثابت یکتاست. $\square$

در قضیه نقطه ثابت باناخ، ملاحظه کردیم که اگر نگاشت T یک انقباض روی یک فضای متری کامل X باشد، آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا در X دارد. اما هر نگاشتی که یک نقطه ثابت یکتا در یک فضای متری کامل X داشته باشد، لزوما یک انقباض نیست.

مثال ۷.۳.۱. فرض کنیم $X = [\circ, ۱]$ و d متر اقلیدسی روی X باشد.نگاشت T روی X را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = ۱ - x \qquad (x \in X)$$

در این صورت، T یک نقطه ثابت یکتای $x = \frac{۱}{۲}$ دارد اما T یک انقباض نیست.

مثال زیر نشان می دهد که قضیه نقطه ثابت باناخ برای نگاشت‌های غیر انبساطی برقرار نیست.

مثال ۸.۳.۱. فرض کنیم $X = \mathbb{R}$ و d متر اقلیدسی روی X باشد. نگاشت $T : X \longrightarrow X$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Tx = x + ۱ \quad , \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

چون هیچ x ای در $x = x + ۱$ صدق نمی کند بنابراین T نقطه ثابت ندارد اما
$$|Tx - Ty| \leq |x - y|.$$

تعریف ۹.۳.۱. نگاشت T روی فضای متری (X, d) یک نگاشت کانان نامیده می‌شود اگر $\alpha \in [۰, ۱/۲)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم
$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Tx) + \alpha d(y, Ty).$$

قضیه ۱۰.۳.۱. *(قضیه نقطه ثابت کانان [۴] [۱۳]). فرض کنیم X یک فضای متری کامل و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت کانان باشدآن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

ملاحظه ۱۱.۳.۱. عکس قضیه کانان برقرار است یعنی اگر هر نگاشت کانان روی فضای متری X دارای یک نقطه ثابت باشد آن‌گاه X کامل است.

تعریف ۱۲.۳.۱. یک نگاشت T روی فضای متری (X, d) را $C-$ انقباض گوییم اگر وجود داشته باشد $\alpha \in (۰, ۱/۲)$ به‌طوری که برای هر $x, y \in X$ نامساوی زیر برقرار باشد
$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, Ty) + \alpha d(y, Tx).$$

قضیه ۱۳.۳.۱. *(قضیه نقطه ثابت کترجیا [۵] [۵]). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت $C-$ انقباض باشدآن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

تعریف ۱۴.۳.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل و $T : X \longrightarrow X$ را یک نگاشت انقباضی گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ نامساوی زیر برقرار باشد
$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

نگاشت‌های انقباضی روی فضاهای متری کامل لزوماً نقطه ثابت ندارند ولی روی فضاهای متری فشرده نقطه ثابت دارد.

قضیه ۱۵.۳.۱. *(قضیه نقطه ثابت ادلستین [۶] [۹]). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری فشرده و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت روی X باشد. فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ به‌طوری‌که $x \neq y$ شرط زیر برقرار باشد*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

آن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.

قضیه ۱.۳.۱۶. *(قضیه نقطه ثابت هاردی- راجر [7] [۱۵]). فرض کنیم (X, d) یک فضای متری کامل و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت باشد که در شرط انقباضی زیر برای هر $x, y \in X$ صدق کند*

$$d(Tx, Ty) \leq Ad(x, y) + Bd(x, Tx) + Cd(y, Ty) + Dd(x, Ty) + Ed(y, Tx)$$

که در آن A و B و C و D و E ثابت‌های نامنفی است که در شرط $A + B + C + D + E < ۱$, صدق می‌کند.آن‌گاه T دارای نقطه ثابت می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱۷. یک نگاشت T روی فضای متری (X, d) را نگاشت برایند گوییم اگر وجود داشته باشد $\alpha \in [۰, ۱)$ و $I \in [۰, \infty)$ به‌طوری که برای هر $x, y \in X$ نامساوی زیر برقرار باشد

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y) + Id(Tx, y).$$

قضیه ۱.۳.۱۸. *(قضیه نقطه ثابت برایند [8] [۲۷]) . فرض کنیم X یک فضای متری کامل و $T : X \longrightarrow X$ یک نگاشت برایند باشدآن‌گاه T یک نقطه ثابت یکتا دارد.*

آشکار است که قضیه ۱.۳.۱۴ و قضیه۱.۳.۱۶ تعمیم‌های قضیه نقطه ثابت باناخ است.

۱-۴ فضاهای برداری مرتب

ابتدا به مفهوم مخروط در یک فضای برداری می‌پردازیم.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و P زیرمجموعه‌ایی از V باشد. آن‌گاه P یک مخروط نامیده می‌شود اگر

۱) $P + P \subset P$،

۲) $tP \subset P \quad \forall t \geq ۰$،

۳) $P \cap (-P) = ۰$.

تعریف ۱.۴.۲. یک فضای برداری مرتب عبارت است از یک جفت $(V, \leq)$ که V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ و $(\leq)$ یک رابطه ترتیب جزئی روی V می‌باشد به طوری که در شرایط زیر برای هر $x, y \in V$ صدق کند.

۱) اگر $x \leq y$ آن‌گاه برای هر $z \in V$ داشته باشیم $x + z \leq y + z$،

۲) اگر $x \leq y$ آن‌گاه برای هر $t \geq ۰$ داشته باشیم $tx \leq ty$.

فرض کنیم V یک فضای برداری باشد و P یک مخروط در V باشد. تعریف می‌کنیم

$$x \leq y \Longleftrightarrow y - x \in P,$$

بررسی می‌کنیم که $(V, \leq)$ یک فضای برداری مرتب است:

۱) چون $\circ \in P$ پس $x \leq x$،

۲) اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ آن‌گاه $y - x \in P$ و $z - y \in P$. چون $P + P \subset P$ پس $z - x \in P$ یعنی $x \leq z$،

۳) اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ آن‌گاه $x = y$ چون $P \cap (-P) = \circ$ ،

۴) اگر $x \leq y$ و $t \geq \circ$ آن‌گاه $ty - tx \in tP$ چون $tP \subset P$ است، پس $ty - tx \in P$ یعنی $tx < ty$.

برعکس فرض کنیم $(V, \leq)$ یک فضای برداری مرتب باشد قرار می‌دهیم

$$P = \{x \in V : x \geq \circ\}$$

نشان می‌دهیم P یک مخروط است:

اگر $x, y \in P$ آن‌گاه $x \geq \circ$ و $y \geq \circ$. لذا $x + y \geq \circ$ و این یعنی $x + y \in P$ در نتیجه $P + P \subset P$.

اگر $x \in P$ و $t \geq \circ$ آن‌گاه $x \geq \circ$ لذا $tx \geq \circ$ بنابراین $tx \in P$ و این یعنی $tP \subset P$.

اگر $x \in P \cap (-P)$ آن‌گاه $x \geq \circ$ و $-x \geq \circ$ لذا $x = \circ$ و این یعنی $P \cap (-P) = \circ$.

مثال ۳.۴.۱. فرض کنیم $V = \mathbb{R}$ و $P = [\circ, \infty)$ یک مخروط روی خط اعداد حقیقی می‌باشد. همچنین $V = \mathbb{R}^۲$ و $P = \{(x, y) \in V : x, y \geq \circ\}$ یک مخروط در صفحه اقلیدسی می‌باشد.

تعریف ۴.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد و τ یک توپولوژی روی X باشد گوییم (X, τ) یک فضای برداری توپولوژیکی است اگر

۱) تک نقطه‌ها بسته باشند،

۲) عمل جمع برداری پیوسته باشد

$$X \times X \longrightarrow X \,;\, (x, y) \longmapsto x + y,$$

۳) عمل ضرب اسکالر پیوسته باشد

$$\mathbb{F} \times X \longrightarrow X \,;\, (\alpha, x) \longmapsto \alpha x.$$