بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه ولی عصر (عج) رفسنجان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض
گرایش آنالیز ریاضی

ساختار قاب‌های تلفیقی تنک بهینه

استاد راهنما:
دکتر احمد صفاپور

استادان مشاور:
دکتر محمد علی دهقان
دکتر علی آرمند نژاد

دانشجو:
عباس خاطری

اسفند ۱۳۹۰

دانشگاه ولی‌عصر(عج) رفسنجان

دانشکده‌ی علوم ریاضی

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی‌ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

ساختار قاب‌های تلفیقی تنک بهینه

عباس خاطری

در تاریخ ۹۰/۱۲/۱ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...عالی... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه آقای دکتر احمد صفاپور با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۲- استاد مشاور۱ پایان‌نامه آقای دکتر محمدعلی دهقان با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۳- استاد مشاور۲ پایان‌نامه آقای دکتر علی آرمندنژاد با مرتبه‌ی علمی دانشیار — امضاء

۴- استاد داور داخل۱ از گروه آقای دکتر حمیدرضا افشین با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۵- استاد داور داخل۲ از گروه خانم دکتر زهره رهبانی با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

۶- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی آقای دکتر وحید مظفری با مرتبه‌ی علمی استادیار — امضاء

کلیه‌ی حقوق مادی مترتب بر نتایج، مطالعات، ابتکارات و نوآوری‌های ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه، متعلق به دانشگاه ولی‌عصر (عج) رفسنجان است.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس بی‌کران سزآوار آفریننده‌ی هستی است که ذره‌ای از نور دانش بی‌پایانش را به‌ما بخشید تا از تاریکی رهایی یابیم.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر احمد صفاپور، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه تحقق نمی‌یافت.

از جناب آقایان دکتر محمد علی دهقان و دکتر علی آرمندنژاد که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده سازی این پایان‌نامه، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر حمید رضا افشین که به عنوان استاد در این سال‌ها، همیشه پشتیبان من بوده‌اند و زحمت داوری این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر کنم.
از سرکار خانم دکتر رهبانی نیز به‌خاطر تقبل زحمت داوری این پایان‌نامه سپاس‌گزارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم(عابد، مجتبی و محمد) به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

هم‌چنین از همه‌ی دوستان خوبم و هم‌کلاسی‌های عزیزم، کمال تشکر را دارم.

عباس خاطری
اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به

پدر عزیز و مادر مهربانم

(عزیزان فداکاری که از پای ننشستند، تا من پای گیرم)

و

برادران خوبم

و همه ی آنان که آفتاب مهرشان در آستانه ی قلبم هم چنان پابرجاست

و هرگز غروب نخواهد کرد

چکیده

یک قاب تلفیقی را می‌توان مانند قاب‌های معمولی گردایه‌ای از زیرفضاها در فضای هیلبرت در نظر گرفت که مفهوم یک قاب برای نمایش سیگنال را تعمیم می‌دهد. با این وجود هنگامی‌که بعد سیگنال بزرگ باشد عموما محاسبه اندازه‌گیری‌های قاب تلفیقی یک سیگنال نیازمند تعداد زیادی اعمال جمع و ضرب می‌باشد، این سبب می‌شود تجزیه سیگنال در کاربردهای با بودجه محاسباتی محدود دشوار شود. برای بررسی این مشکل، در این پایان‌نامه روی قاب‌های تلفیقی با بعد متناهی متمرکز شده و مفهوم قاب‌های تلفیقی تنک را معرفی می‌کنیم. سپس ساختار الگوریتمی برای محاسبه قاب‌های تلفیقی تنک با عملگر قاب تلفیقی مطلوب ارائه می‌کنیم که شامل قاب های تلفیقی چسبان نیز می‌باشد. به طور شگفت انگیزی ثابت می‌کنیم این الگوریتم، قاب‌های تلفیقی تنک بهینه را می‌سازد. هم‌چنین با استفاده از روش تتریس طیفی، شرط کافی برای ساخت یک قاب تلفیقی که مقادیر ویژه مطلوب عملگر قاب تلفیقی و بعدهای مطلوب زیرفضاهایش را اختیار کند، ارائه می‌کنیم و ثابت می‌کنیم در حالتی که قاب تلفیقی چسبان باشد، این شرط لازم نیز هست.

واژه‌های کلیدی: *قاب تلفیقی، تتریس طیفی، تنکی، حشو.*

پیش‌گفتار

قاب‌ها برای اولین بار در سال ۱۹۵۲ در مقاله‌ای بنیادی توسط دافین[۱] و شیفر[۲] مطرح شدند[۲۰]. این مفهوم در سال ۱۹۸۵ و با شروع دوره نظریه موجک توسط دوبشی[۳]، میر[۴] و گراسمان[۵]گسترش پیدا کرد[۱۸]. آن ها مشاهده کردند که می توان از قاب ها برای پیدا کردن بسط سری توابع در $L^{2}(\mathbb{R})$، درست شبیه همان بسطی که در پایه های متعامد یکه وجود دارد، بهره گرفت. در این زمان بود که ریاضیدان ها به اهمیت موضوع پی بردند و نظریه قاب ها درهمین زمان بروز پیدا کرد. بعد از آن مطالعات گسترده ای روی قاب ها شروع شد.

در دو دهه اخیر، قاب‌ها در زمینه‌های مختلف از قبیل نظریه بانک فیلتری [۱۶]، گسسته‌سازی سیگما-دلتا [۱]، پردازش تصویر و سیگنال [۱۵]، ارتباطات بی‌سیم [۲۲]و... مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. با این وجود، برخی کاربردهای جدید پدید آمده‌اند که در آن‌ها به پردازش توزیعی نیاز است و نمی‌توانند به وسیله یک مجموعه‌ی قاب، مدل بندی شوند. قاب‌های تلفیقی این نیاز را برطرف کرده‌اند و امکاناتی را نه فقط برای مدل بندی کردن این کاربردها، بلکه برای به‌دست آوردن الگوریتم‌هایی جدید، کارا و قوی فراهم می‌کنند.

اساسی‌ترین پرسش در نظریه قاب‌های تلفیقی این است که چگونه می‌توان قاب‌های تلفیقی را با اضافه کردن ویژگی‌هایی برای کاربردهای مورد نظر ساخت. در نظریه قاب، ابزار قدرتمندی به‌نام پتانسیل قاب به‌وسیله فیکس[۶] و بندتو[۷] معرفی شد[۶]. پتانسیل قاب، ابزار موثری برای نشان دادن وجود قاب‌ها تحت ویژگی‌هایی مشخص است، ولی دارای این نقص می‌باشد که نمی‌تواند نشان دهد چگونه این‌چنین قاب‌هایی ساخته می‌شود.

اخیرا، کاسازا[۸] و فیکس در مقاله‌ای پتانسیل قاب‌های تلفیقی را معرفی کردند [۷] و نشان دادند که اگر تعداد زیرفضاهای قاب تلفیقی، بزرگ بوده ولی بعد این زیرفضاها نسبت به بعد فضای هیلبرت، کوچک باشد، در این صورت همواره چنین قاب‌های تلفیقی وجود خواهند داشت. در این پایان‌نامه

[۱] Duffin
[۲] Schaeffer
[۳] Daubencheis
[۴] Meyer
[۵] Grossman
[۶] Fickus
[۷] Benedetto
[۸] Casazza

به بررسی ساختار چنین قاب‌های تلفیقی خواهیم پرداخت.

مطالب این پایان‌نامه به شرح زیر است:

فصل اول، در سه بخش ارائه شده‌است. دربخش اول مقدماتی از آنالیز تابعی بیان شده‌است. در بخش دوم مفهوم قاب‌ها و قضیه هایی از قاب‌ها که در این پایان‌نامه به طور مکرر از آن استفاده می‌شود، آورده شده‌است. بخش سوم نیز به بررسی مقدماتی نظریه قاب‌های تلفیقی اختصاص دارد.

در فصل دوم، ابتدا مفهوم قاب‌های تلفیقی تنک بیان شده سپس ساختار قاب‌های تلفیقی تنک با عملگر قاب تلفیقی مطلوب مورد بررسی قرار گرفته است. مطالب این فصل عمدتا مبتنی بر [۴] می‌باشد.

در فصل سوم، تتریس طیفی به‌عنوان روشی اصولی برای ساخت قاب‌های تلفیقی با بعد زیرفضاهای مطلوب و عملگر قاب تلفیقی مطلوب، مطرح می‌شود. هم‌چنین نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با تعمیم این روش، قاب‌های تلفیقی چسبان نرم واحد از حشو کمتر از ۲ را ساخت. مندرجات این فصل مبتنی بر [۱۲] می‌باشد.

در فصل چهارم، مفهوم جدیدی از تنکی قاب‌های تلفیقی را که با مفهومی که در فصل دوم بیان شد، متفاوت است به‌عنوان میزان تنکی معرفی می‌کنیم. هم‌چنین، نشان می‌دهیم الگوریتم تتریس طیفی که در فصل سوم برای ساخت قاب‌های چسبان نرم واحد بیان می‌شود، بهینه ترین قاب را نسبت به پایه‌های استاندارد واحد تولید می‌کند. مطالب این فصل مبتنی بر [۶] و [۱۳] می‌باشد.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه‌ای برقاب‌ها

در این فصل به بیان تعاریف و مفاهیم اولیه‌ای که در طول این پایان نامه مورد نیاز می‌باشند، می‌پردازیم. تعاریف و قضایای این فصل برگرفته از کتاب آنالیز تابعی رودین [۲۱] و کتاب مقدمه‌ای بر قاب‌ها و پایه‌های ریس، نوشته‌ی کریستینسن می‌باشد[۱۸]، هم‌چنین از نماد گذاری مقاله‌ای از کاسازا استفاده شده است[۵].

در این پایان‌نامه منظور از $\mathbb{C}$ مجموعه اعداد مختلط، $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی، $\mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح و $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی می‌باشد. هم‌چنین I، مجموعه‌ای اندیس گذار حداکثر شمارا در نظر گرفته شده است.

۱.۱ آنالیز تابعی

۱.۱.۱ فضای هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید E یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. تابع

$$||.|| : E \longrightarrow [0, \infty)$$

را یک نرم گویند هرگاه:

۱. $||x|| = 0$ اگروتنها اگر $x = 0$.

۲. به‌ازای هر $x \in E$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ ، $||\lambda x|| = |\lambda| \, ||x||$.

۳. به‌ازای هر $x, y \in E$ ، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری H روی $\mathbb{C}$ به همراه عمل دوتایی $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود هرگاه

۱. برای هر $x, y, z \in H$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle y, z \rangle$.

۲. برای هر $x, y \in H$، $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$.

۳. برای هر $x \in H$، $\langle x, x \rangle \geq 0$ و $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

در نظر داشته باشید که طبق تعریف بالا، ضرب داخلی نسبت به مؤلفه ی اول خطی و نسبت به مؤلفه دوم خطی مزدوج است، یعنی $\langle x, \lambda y + z \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$ که $\overline{\lambda}$ مزدوج مختلط $\lambda \in \mathbb{C}$ می‌باشد.

تعریف ۳.۱.۱. در فضای ضرب داخلی H، اندازه (نرم) بردار $x \in H$ به صورت $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ تعریف شده و به آن نرم القا شده توسط ضرب داخلی گفته می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید، $E \subset H$ و $F \subset H$. در این‌صورت E بر F متعامد نامیده شده و با نماد $E \perp F$ نمایش داده می‌شود هرگاه برای هر $x \in E$ و هر $y \in F$،

$$\langle x, y \rangle = 0$$

تعریف ۵.۱.۱. اگر $E \subset H$، مکمل متعامد E که با $E^{\perp}$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E^{\perp} = \{x \in H : \ \langle x, y \rangle = 0 \ \ \forall y \in E\}.$$

هم‌چنین اگر (x_n) یک دنباله از بردارها در فضای هیلبرت H باشد و

$$\langle x_n, x_m \rangle = 0, \qquad \forall n \neq m.$$

در این‌صورت ، (x_n) را یک دنباله متعامد می‌نامیم.

اگر علاوه بر این شرط،به‌ازای هر n، $\|x_n\| = \sqrt{\langle x_n, x_n \rangle} = 1$، (x_n) یک دنباله یکا متعامد نامیده می‌شود.

عموما دنباله‌های یکا متعامد را با (e_n) نشان می‌دهند.

تعریف ۶.۱.۱. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت گویند اگر H نسبت به متر تعریف شده توسط نرم،کامل باشد، به‌این معنی که هر دنباله کوشی مانند $(x_n)_{n \in I}$نسبت به متر تولید شده توسط نرم به x همگرا باشد(در این پایان‌نامه از نماد $\mathcal{H}$ برای نشان دادن فضای هیلبرت استفاده می‌کنیم.).

تعریف ۷.۱.۱. دلتای کرونکر که با نماد δ_{mn} نمایش داده می‌شود، برای $m, n \in \mathbb{Z}$ عبارت است از

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & m = n, \\ 0 & m \neq n. \end{cases}$$

تعریف ۸.۱.۱. فضای $\ell^p(\mathbb{C})$، گردایه همه دنباله‌های نامتناهی مانند$(x_k)_{k\in I}$ از اعداد مختلط است که

$$(\sum_{k\in I} |x_k|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

همراه با ضرب داخلی

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k\in I} x_k\overline{y_k},$$

که در آن $x = (x_k)_{k\in I} \in \ell^p$ و $y = (y_k)_{k\in I} \in \ell^p$.

تعریف ۹.۱.۱. فضای $\mathcal{H}$ جدایی پذیر نامیده می‌شود هرگاه شامل یک زیر مجموعه چگال شمارش‌پذیر باشد.

قضیه ۱۰.۱.۱. *فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ دارای پایه یکا متعامد شمارا است اگر و تنها اگر $\mathcal{H}$ جدایی پذیر باشد.*

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر $(x_n)_{n\in I}$ یک دنباله از عناصر در فضای $\mathcal{H}$ باشد، مجموعه تمام ترکیبات خطی متناهی x_n با $span(x_n)_{n\in I}$ نمایش داده می‌شود، به این معنی که

$$span(x_n)_{n\in I} = \{\sum_{n=-N}^{N} c_n x_n : N > 0, c_n \in \mathbb{C}\}.$$

تعریف ۱۲.۱.۱. دنباله $(x_n)_{n\in I}$ در $\mathcal{H}$ کامل نامیده می‌شود هرگاه $span(x_n)_{n\in I}$ در $\mathcal{H}$ چگال باشد.
برای دنباله یکا متعامد $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ یک دنباله یکا متعامد در فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد در این صورت شرایط زیر معادل هستند:*

۱. *$(e_i)_{i=1}^{\infty}$ پایه یکا متعامد برای $\mathcal{H}$ است.*

۲. *برای هر $x \in \mathcal{H}$، $x = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, e_i\rangle e_i$.*

۳. *برای هر* $x \in \mathcal{H}$، $\|x\|^۲ = \sum_{i=۱}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle|^۲$ (*فرمول پلنشرل* [۱]).

۴. $\overline{span(e_i)_{i\in I}} = \mathcal{H}$.

۵. *اگر برای* $x \in \mathcal{H}$ *و برای هر* i، $\langle x, e_i\rangle = ۰$، *آن‌گاه* $x = ۰$.

در قضیه قبل، به $(\langle x, e_i\rangle)_{i=۱}^{\infty}$ ***دنباله ضرایب فوریه*** x ***نسبت به پایه ی متعامد*** $(e_i)_{i=۱}^{\infty}$ *گفته می‌شود.*

۲.۱.۱ عملگرها

تعریف ۱۴.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ دو فضای هیلبرت با نرم های $\|.\|_{\mathcal{H}}$ و $\|.\|_{\mathcal{K}}$ و ضرب های داخلی $\langle .,.\rangle_{\mathcal{H}}$ و $\langle .,.\rangle_{\mathcal{K}}$ باشند. اگر S عملگری خطی از $\mathcal{H}$ به $\mathcal{K}$ باشد، نرم این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\|S\| = sup\{\|S(x)\|_{\mathcal{K}} : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = ۱\}.$$

در این صورت $\|S\|$ را نرم عملگری S می‌نامیم.
S را کران دار گوییم هرگاه $\|S\| < \infty$.
مجموعه همه عملگرهای خطی و کران دار از فضای $\mathcal{H}$ به فضای $\mathcal{K}$ را با نماد $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ نمایش می‌دهیم و اگر $\mathcal{H}$ و $\mathcal{K}$ با هم برابر باشند، آن را با $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ نمایش می‌دهیم.
اگر $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{K})$ آن‌گاه عملگر الحاقی S، عملگر یکتای $S^* : \mathcal{K} \to \mathcal{H}$ است به طوری که $S^* \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$ و به ازای هر $x \in \mathcal{H}$ و $y \in \mathcal{K}$،

$$\langle Sx, y\rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, S^*y\rangle_{\mathcal{H}}.$$

به علاوه $\|S^*\| = \|S\|$.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنید $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت بوده و S و T عملگرهایی خطی روی $\mathcal{H}$ باشند. در این صورت

۱. عملگر S خود الحاق است اگر $S = S^*$.

۲. عملگر S نامنفی است، هرگاه برای هر $x \in \mathcal{H}$، $\langle Sx, x\rangle \geq ۰$. در این صورت می‌نویسیم $S \geq ۰$.

[۱] Plancherel formula

۳. $T \geq S$، اگر $S - T \geq ۰$.

قضیه ۱.۱.۱۶. *اگر T یک عملگر دلخواه روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه*

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\|, \|y\| = ۱\}.$$

قضیه ۱.۱.۱۷. *اگر S یک عملگر خودالحاق روی فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد، آن‌گاه*

$$\|S\| = sup\{|\langle Sx, x\rangle| : \|x\| = ۱\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۸. عملگر $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ معکوس‌پذیر است اگر عملگر $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ وجود داشته باشد به طوری که $ST = TS = I$. در این حالت می‌نویسیم $S = T^{-۱}$.

قضیه ۱.۱.۱۹. *اگر $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ ، آن‌گاه*

۱. $(\alpha T + S)^* = \overline{\alpha} T^* + S^*$.

۲. $(TS)^* = S^* T^*$.

۳. $T^{**} = (T^*)^* = T$.

۴. *اگر T معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه T^* نیز معکوس‌پذیر بوده و $(T^*)^{-۱} = (T^{-۱})^*$.*

تعریف ۱.۱.۲۰. زیر فضای بسته‌V از $\mathcal{H}$ را در نظر بگیرید. تصویر متعامد $\mathcal{H}$ به روی V، عملگر $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ است که برای هر $x \in V^{\perp}$، $P(x) = ۰$ و برای هر $x \in V$، $P(x) = x$.

قضیه ۱.۱.۲۱. *برای هر عملگر تصویر متعامد P شرایط زیر برقرار است:*

۱. *P خودالحاق است.*

۲. $P \geq ۰$.

۳. $\|P\| \leq ۱$.

هم‌چنین قضیه‌ی مهم زیر را از [۲] داریم.

قضیه ۱.۱.۲۲. *فرض کنید V یک فضای ضرب داخلی بوده و $V_۰$ زیرفضایی N بعدی از آن با پایه‌ی یکا متعامد $(e_i)_{i=۱}^{N}$ باشد. در این‌صورت، تصویر متعامد یک بردار مانند $v \in V$ به روی زیرفضای $V_۰$ به صورت زیر خواهد بود.*

$$P_۰ v = \sum_{j=۱}^{N} \alpha_j e_j.$$

که $\alpha_j = \langle v, e_j\rangle$.

۲.۱ نظریه قاب‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید I مجموعه‌ی اندیس گذار شمارایی باشد. دنباله $(f_k)_{k\in I}$ از عناصر فضای هیلبرت جدایی‌پذیر $\mathcal{H}$ را یک قاب برای $\mathcal{H}$ گویند هرگاه ثابت‌های $0 < A \leq B < \infty$ وجود داشته باشند به‌طوری که برای هر $f \in \mathcal{H}$،

$$A \parallel f \parallel^2 \leq \sum_{k\in I} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^2 \leq B \parallel f \parallel^2 . \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۲.۲.۱. ثابت‌های A و B که در رابطه(۱.۱) صدق کنند را به‌ترتیب کران پایین قاب و کران بالای قاب می‌گویند. هم‌چنین به بزرگترین عدد مثبت A و کوچکترین عدد مثبت B که در این رابطه صدق کنند، به‌ترتیب کران پایین بهین و کران‌بالای بهین گفته می‌شود.

اگر $A = B$، قاب را قاب چسبان[۱] (یا A -چسبان) گویند، یعنی

$$\sum_{k\in I} \mid \langle f, f_k\rangle \mid^2 = A \parallel f \parallel^2, \qquad (۲.۱)$$

هم‌چنین، اگر علاوه بر این، برای هر $k \in I$، $\parallel f_k \parallel = 1$، این قاب، قاب چسبان با اندازه‌ی یک[۲] نامیده می‌شود.

ثابت A که در رابطه (۲.۱) صدق کند ثابت قاب نام دارد.

اگر دنباله‌ی $(f_k)_{k\in I}$ حداقل دارای کران بالای قاب باشد، آن را دنباله بسل نامند.

فرض کنید $(f_k)_{k\in I}$ یک قاب برای فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ باشد. هرگاه برای هر $i, j \in I$، $\parallel f_i \parallel = \parallel f_j \parallel$ ، در این‌صورت $(f_k)_{k\in I}$ یک قاب یکنواخت(یا هم‌اندازه) نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $(f_k)_{k\in I}$ یک دنباله در $\mathcal{H}$ باشد. $(f_k)_{k\in I}$ دنباله قاب نامیده می‌شود هرگاه این دنباله تشکیل یک قاب برای $\overline{span}(f_k)_{k\in I}$ دهد.

لم ۴.۲.۱. *فرض کنید $(f_k)_{k\in I}$ یک دنباله بسل در $\mathcal{H}$ باشد. هم‌چنین $\sum_{k\in I} c_k f_k$ برای هر $(c_k)_{k\in I} \in \ell^2(I)$ همگرا باشد. در این‌صورت*

$$T^* : \ell^2(I) \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$T^*((c_k)_{k\in I}) := \sum_{k\in I} c_k f_k,$$

---
[۱] Tight frame
[۲] Unit norm tight frame

عملگری خطی و کران‌دار تعریف می‌کند. عملگر الحاقی آن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$T : \mathcal{H} \longrightarrow \ell^{۲}(I)$$
$$T(f) := (\langle f, f_k \rangle)_{k\in I},$$

تعریف ۱.۲.۵. به عملگر T^* در قضیه فوق عملگر ترکیب و به عملگر T، عملگر تجزیه گفته می‌شود.

تعریف ۱.۲.۶. اگر $(f_k)_{k\in I}$ یک قاب برای $\mathcal{H}$ بوده و T عملگر تجزیه آن باشد که در لم قبل بیان شد، در این صورت عملگر قاب به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$S : \quad \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$$
$$S(f) : \ = T^*T(f) := \sum_{k\in I} \langle f, f_k \rangle f_k,$$

طبق مطالبی که در این بخش بیان شد، در صورتی که $\mathbb{H}_M$ فضای هیلبرت با بعد M باشد، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف ۱.۲.۷. فرض کنید $\mathbb{K}$ میدان اعداد حقیقی یا مختلط باشد. عملگر ترکیب دنباله متناهی $(f_n)_{n=۱}^N$ در فضای هیلبرت $\mathbb{H}_M$ با بعد M روی $\mathbb{K}$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$F^* : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{H}_M$$
$$F^*g := \sum_{n=۱}^{N} g_n f_n,$$

که

$$g = \begin{bmatrix} g_۱ \\ g_۲ \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix}.$$

هنگامی‌که $\mathbb{H}_M = \mathbb{K}^M$، عملگر ترکیب F^*، ماتریسی به ابعاد $M\times N$ می‌باشد ستون‌های آن بردارهای f_n می‌باشند.

هم‌چنین عملگر تجزیه‌ای این دنباله به‌صورت زیر می‌باشد.

$$F : \mathbb{H}_M \longrightarrow \mathbb{K}^N$$
$$Ff := (\langle f, f_n \rangle)_{n=۱}^N.$$

و عملگر قاب متناظر به صورت زیر می‌باشد.

$$F^*Ff : \mathbb{H}_M \longrightarrow \mathbb{H}_M$$
$$F^*Ff := \sum_{n=1}^{N} \langle f, f_n \rangle f_n.$$

قضیه ۸.۲.۱. *فرض کنید $(f_n)_{n=1}^N$ یک دنباله در فضای هیلبرت $\mathbb{H}_M$ باشد. در این صورت $(f_n)_{n=1}^N$ یک قاب برای فضای برداری $W := span(f_n)_{n=1}^N$ می‌باشد.*

قضیه ۹.۲.۱. *یک خانواده از عناصر $(f_n)_{n=1}^N$ در فضای هیلبرت $\mathbb{H}_M$، یک قاب برای $\mathbb{H}_M$ می‌باشد اگر وتنها اگر $span(f_n)_{n=1}^N = \mathbb{H}_M$.*

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض کنید $\mathbb{H}_M$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی M و $(f_n)_{n=1}^N$ یک قاب برای $\mathbb{H}_M$ باشد. در این‌صورت احکام زیر برقرار می‌باشند:*

۱. *کران پایین بهینه قاب، کوچکترین مقدار ویژه S (عملگر قاب)، و کران بالای بهینه قاب، بزرگترین مقدار ویژه S است.*

۲. *فرض کنید $(\lambda_i)_{i=1}^M$ مقادیر ویژه S باشند. در این صورت*
$$\sum_{i=1}^{M} \lambda_i = \sum_{n=1}^{N} \| f_n \|^2 .$$

۳. *اگر $(f_n)_{n=1}^N$ یک قاب $A-$ چسبان باشد، آن‌گاه داریم:*
$$A = \frac{\sum_{i=1}^M \lambda_i}{dim\mathbb{H}_M} = \frac{\sum_{n=1}^N \| f_n \|^2}{M}.$$

حال به کمک لم‌های زیر، معیارهای دیگری برای قاب بودن یک دنباله از بردارها را نتیجه می‌گیریم.

لم ۱۱.۲.۱. *برای هر f در فضای هیلبرت با بعد متناهی $\mathbb{H}_M$ و دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^N$ از بردارهای این فضا،*

$$A \| f \|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} | \langle f, f_n \rangle |^2 \leq B \| f \|^2, \qquad (۳.۱)$$

اگر و تنها اگر $AI \leq F^*F \leq BI$ که در آن F و F^* به‌ترتیب عملگرهای ترکیب و تجزیه‌ی دنباله‌ی $(f_n)_{n=1}^N$ و I عملگر همانی روی $\mathbb{K}^N$ می‌باشد.