دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

ابرمشبکه ها و خواص آن‌ها

نگارش

مریم یداللهی جویباری

استاد راهنما

دکتر علی معدنشکاف

استاد مشاور

دکتر ناهید اشرفی

بهمن ۱۳۹۰

به نام خداوند بخشاینده ی مهربان

قدردانی

حمد و سپاس خدای را که به انسان جان بخشید و با زینت عشق جان را مزین نمود. اکنون که مدد لطف جمیلش به بار نشسته است و همای سعادت بواسطه ی موهبتش بر سرم بال و پر گسترانیده است، دست به قلم نیایش بردم و به شکرانه ی لطفش جبین بر سجاده ی شکر می سایم و از لطف پر کرامتش سپاسگزاری می کنم.

لازم می دانم که از محبت و بذل بی شائبه استاد ارجمندم، دکتر معدنشکاف که در تمامی مراحل انجام این پایان نامه راهنمایی اینجانب را بر عهده گرفتند کمال تشکر و قدردانی را نموده و برای ایشان آرزوی توفیق روز افزون و سلامت از خداوند منان می نمایم.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که تلاش را به من آموختند و دعای خود را بدرقه ی راهم نمودند.

آرامش زندگی و پل محکم عبور از سختی ها، همسر مهربانم که با صبر و سعی خود یاری گر من بوده است.

چکیده

در این پایان نامه یکی از ساختارهای جبری را که ابرمشبکه نام دارد و در واقع تعمیمی از مشبکه هاست، مورد بررسی قرار می دهیم. ابتدا ابرمشبکه و ابرمشبکه ی توزیع پذیر و متمم دار را تعریف و برخی از ویژگی های آن ها را مورد بررسی قرار می دهیم. همچنین با نوع خاصی از ابرمشبکه ها که $P-$ابرمشبکه ها نام دارند، آشنا می شویم و خاصیت توزیع پذیری آنها را مورد بحث قرار می دهیم. در ضمن رابطه ی اساسی روی ابرمشبکه ی ضعیف را تعریف کرده و با استفاده از آن مشبکه ی اساسی را تعریف می کنیم. در نهایت جبر هیتینگ [۱] را تعریف کرده و برخی از خواص آن ها را بررسی می کنیم و سپس ابرجبر هیتینگ [۲] را تعریف می کنیم و به مطالعه ی آن می پردازیم. این پایان‌نامه بر اساس منابع [۸]، [۱۰]، [۱۲]، [۱۷]، [۱۸] نگاشته شده است.

واژه‌های کلیدی: مشبکه، ابرمشبکه، ابرمشبکه ی توزیع پذیر و متمم دار، $P-$ابرمشبکه، رابطه ی اساسی و مشبکه ی اساسی، جبر هیتینگ و ابرجبر هیتینگ

---

[۱] heyting algebra
[۲] heyting hyperalgebra

مقدمه

نظریه ی ابرساختارها ابتدا توسط مارتی [۳] در سال ۱۹۳۴ مطرح شد که ابرگروه ها را به عنوان تعمیمی از گروه ها تعریف کرد. با استفاده از ابرعمل ها می توانیم ساختارهای جبری کلاسیک را به ابرساختارها تعمیم دهیم. ابرمشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ تعمیمی از مشبکه می باشد که در آن $\wedge$ یک عمل کلاسیک و $\vee$ یک ابرعمل می باشد. در سال ۱۹۷۷ ،کنستانتینیدیو [۴] و میتاس [۵] در [۸]، نظریه ی ابرمشبکه ها را مطرح کردند و در سال ۱۹۹۳، کنستانتینیدیو در [۱۲]، نوع خاصی از ابرمشبکه ها را مورد بررسی قرار داد که در آن به جای ابرعمل $\vee$ از $\overset{P}{\bigvee}$ که تعریف آن در فصل سوم این پایان نامه آمده است، استفاده کرده است. در سال ۱۹۷۸ کنستانتینیدیو در [۱۱]، ابرمشبکه های پیمانه ای [۶] را مورد بررسی قرار داد و در سال ۱۹۸۱ مقاله ای را تحت عنوان ابرمشبکه های متمم دار و توزیع پذیر ارائه داد [۱۰]. در سال ۲۰۰۱ سرافیمیدیس [۷] به همراه کنستانتینیدیو در [۱۹]، $(P, Q)-$ابرمشبکه ها را که در واقع تعمیمی از $P-$ابرمشبکه هاست مطرح کردند و توزیع پذیری آنها را مورد بررسی قرار دادند. در این پایان نامه سعی شده است تا مفهوم ابرمشبکه و برخی از خواص آن بررسی شود. در فصل اول که برگرفته از [۱] و [۶] است، تعاریف و قضایای مورد نیاز را آورده ایم. در فصل دوم با تکیه بر مطالب [۶]، [۸]، [۱۰] و [۱۱] ابتدا دو تعریف از ابرمشبکه و سپس خواص آنها را آورده ایم و در ادامه ابرمشبکه های توزیع پذیر و متمم دار را مورد بررسی قرار دادیم. در فصل سوم با $P-$ابرمشبکه ها آشنا می شویم و نشان می دهیم که ابرمشبکه بودن $(L, \overset{P}{\bigvee}, \wedge)$ به انتخاب P بستگی دارد و همچنین توزیع پذیری این نوع از ابرمشبکه ها را مورد بحث قرار می دهیم. مطالب این فصل برگرفته از [۱۲] و [۱۹] می باشد. در فصل چهارم ابرمشبکه ی خارج قسمتی ضعیف و سپس رابطه ی اساسی روی آن را تعریف کرده و با استفاده از رابطه ی اساسی روی ابرمشبکه ی ضعیف ، مشبکه ی اساسی را تعریف می کنیم و در ادامه به بیان چند قضیه و نتیجه می پردازیم. منبع اصلی این فصل [۱۸] می باشد. در فصل پنجم به بررسی چند خاصیت از ابرجبرهای هیتینگ می پردازیم که این فصل برگرفته از [۱۷] می باشد.

---

[۳] Marty
[۴] Konstantinidou
[۵] Mittas
[۶] modular
[۷] serafimidis

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل با تعاریف و قضایای مورد نیاز که برگرفته از مراجع [۱] و [۶] می‌باشد، آشنا می‌شویم.

۱.۱ مشبکه

تعریف ۱.۱.۱ رابطه ی R روی مجموعه ی غیر تهی A هم ارزی نامیده می شود هرگاه

۱) برای هر $a \in A$ داشته باشیم aRa.

۲) برای هر $a, b \in A$ اگر aRb آنگاه bRa.

۳) برای هر $a, b, c \in A$ اگر aRb و bRc آنگاه aRc.

تعریف ۲.۱.۱ رابطه ی $\leq$ روی مجموعه ی ناتهی A ترتیب جزیی نامیده می شود هرگاه

۱) برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq a$.

۲) برای هر $a, b \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq a$ آنگاه $a = b$.

۳) برای هر $a, b, c \in A$ اگر $a \leq b$ و $b \leq c$ آنگاه $a \leq c$.

در صورتی که $\leq$ رابطه ی ترتیب جزیی روی A باشد، این موضوع را معمولاً با این که $(A, \leq)$ یک مجموعه ی جزیی مرتب است، مشخص می کنیم.

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنیم $(A,\leq)$ یک مجموعه ی جزیی مرتب باشد و $a,b\in A$. می گوییم a,b مقایسه پذیر هستند هرگاه $a\leq b$ یا $b\leq a$. اگر a,b مقایسه پذیر نباشند این مطلب را با $a\|b$ مشخص می کنیم.

تعریف ۴.۱.۱ رابطه ی ترتیب جزیی $\leq$ روی مجموعه ی ناتهی A ترتیب کلی نامیده می شود هرگاه برای هر $a,b\in A$ داشته باشیم $a\leq b$ یا $b\leq a$.

تعریف ۵.۱.۱ گیریم $(A,\leq)$ یک مجموعه ی جزیی مرتب باشد
الف) عنصر $a\in A$ را کوچکترین عنصر A می نامیم هرگاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم $a\leq x$.
ب) عنصر $b\in A$ را بزرگترین عنصر A می نامیم هرگاه برای هر $x\in A$ داشته باشیم $x\leq b$.
به سادگی دیده می شود که بزرگترین و کوچکترین عنصر در یک مجموعه جزیی مرتب در صورت وجود یکتا هستند.

تعریف ۶.۱.۱ فرض کنیم $(A,\leq)$ یک مجموعه ی جزیی مرتب باشد و $B\subseteq A$،
الف) عنصر $a\in A$ را یک کران پایین B می نامیم هرگاه برای هر $x\in B$ داشته باشیم $a\leq x$.
ب) عنصر $c\in A$ را یک کران بالای B می نامیم هرگاه برای هر $x\in B$ داشته باشیم $x\leq c$.

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنیم $(A,\leq)$ یک مجموعه ی جزیی مرتب باشد و $B\subseteq A$،
الف) اگر L مجموعه ی همه ی کران های پایین B باشد آنگاه بزرگترین عنصر L در صورت وجود بزرگترین کران پایین B نام دارد که آن را با $\inf B$ یا $\bigwedge B$ نشان می دهیم.
ب) اگر U مجموعه ی همه ی کران های بالای B باشد آنگاه کوچکترین عنصر U در صورت وجود کوچکترین کران بالای B نام دارد که آن را با $\sup B$ یا $\bigvee B$ نشان می دهیم.
بویژه برای هر $a,b\in A$، $\sup\{a,b\}$ و $\inf\{a,b\}$ را در صورت وجود به ترتیب با $a\vee b$ و $a\wedge b$ نشان می دهیم.

تعریف ۸.۱.۱ در مجموعه ی جزیی مرتب $(L, \leq)$ مجموعه ی $\{x \in L : a \leq x \leq b\}$ را بازه بسته می نامیم و آن را با $[a, b]$ نمایش می دهیم. همچنین مجموعه ی $\{x \in L : x \leq a\}$ را با $(a]$ و مجموعه ی $\{x \in L : b \leq x\}$ را با $[b)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۹.۱.۱ مجموعه های $\mathbb{R}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{Z}$ به ترتیب نمایش مجموعه ی اعداد حقیقی، گویا و صحیح می باشند.

تذکر ۱۰.۱.۱ مجموعه ی $\{x\}$ را گاهی اوقات با عنصرش نمایش می دهیم.

نمادگذاری ۱۱.۱.۱ گیریم $\{L_i\}_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه ها باشد. حاصلضرب مستقیم L_i ها را با $\prod\limits_{i\in I} L_i$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱ مجموعه ی جزیی مرتب $(L, \leq)$ را که برای هر $x, y \in L$، $x \vee y$ و $x \wedge y$ موجود باشند، مشبکه می نامیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ مجموعه ناتهی A، به همراه یک یا چند عمل دوتایی روی آن ساختار جبری نامیده می شود.

در تعریف ۱۲.۱.۱ مشبکه به عنوان یک مجموعه ی جزیی مرتب تعریف شده است. در زیر تعریفی از مشبکه را به عنوان یک ساختار جبری می بینیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ مجموعه ی ناتهی L به همراه دو عمل دوتایی $\vee : L \times L \longrightarrow L$ و $\wedge : L \times L \longrightarrow L$ مشبکه نامیده می شود هرگاه

۱) برای هر $a \in L$، $a \vee a = a$ و $a \wedge a = a$. (خاصیت خود توانی)

۲) برای هر $a, b \in L$، $a \vee b = b \vee a$ و $a \wedge b = b \wedge a$. (خاصیت جابجایی)

۳) برای هر $a,b,c \in L$، $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ و $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$. (خاصیت شرکت پذیری)

۴) برای هر $a,b \in L$، $a \vee (a \wedge b) = a$ و $a \wedge (a \vee b) = a$. (خاصیت جذب)

قضیه ۱۵.۱.۱ دو تعریف ۱۲.۱.۱ و ۱۴.۱.۱ با هم معادل می باشند.

برهان: به مرجع [٦]، قضیه ی ۱ مراجعه کنید. ■

تعریف ١٦.١.١ فرض کنیم $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه باشد. زیر مجموعه ی ناتهی K از L زیر مشبکه ی L است هرگاه برای هر $a,b \in K$، داشته باشیم $a \vee b \in K$ و $a \wedge b \in K$.

نمادگذاری ۱۷.۱.۱ گیریم A یک مجموعه باشد، مجموعه ی همه ی زیر مجموعه های A را با $\mathcal{P}(A)$ نشان می دهیم و داریم

$$\mathcal{P}^*(A) = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$$

مثال ۱۸.۱.۱ ۱) گیریم X مجموعه ی ناتهی و $\mathcal{P}(X)$ مجموعه ی همه زیر مجموعه های X باشد. مجموعه ی جزیی مرتب $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ یک مشبکه می باشد که در آن برای هر $A, B \in \mathcal{P}(X)$ داریم $\sup\{A,B\} = A \cup B$ و $\inf\{A,B\} = A \cap B$. [۱]

۲) برای هر دو عدد طبیعی a و b، $a \vee b$ را کوچکترین مضرب مشترک a و b و $a \wedge b$ را بزرگترین مقسوم علیه مشترک a و b تعریف می کنیم. با این تعریف مجموعه ی اعداد طبیعی به همراه $\vee$ و $\wedge$ یک مشبکه می باشد. [۱]

تذکر ۱۹.۱.۱ هر مجموعه ی کلی مرتب $(L, \leq)$، یک مشبکه می باشد که در آن برای $a,b \in L$ اگر $a \leq b$ آنگاه $a \wedge b = a$ و $a \vee b = b$.

تعریف ۲۰.۱.۱ مجموعه ی جزیی مرتب $(L, \leq)$، $\wedge$–نیم مشبکه نامیده می شود هرگاه برای هر $a, b \in L$، $\inf\{a, b\}$ موجود باشد و $\vee$–نیم مشبکه نامیده می شود هرگاه برای هر $a, b \in L$، $\sup\{a, b\}$ موجود باشد.

گزاره ۲۱.۱.۱ هر $\wedge$–نیم مشبکه یک مجموعه ی جزیی مرتب با رابطه ی ترتیب جزیی زیر است.

$$a \leq b \Longleftrightarrow a \wedge b = a$$

اثبات: گیریم L، $\wedge$–نیم مشبکه باشد نشان می دهیم رابطه ی $\leq$ روی آن یک رابطه ی ترتیب جزیی است.

۱) خاصیت انعکاسی: برای هر $a \in L$ داریم $a \wedge a = a$ لذا $a \leq a$.

۲) خاصیت پاد تقارنی : برای هر $a, b \in L$ اگر $a \leq b$ آنگاه $a \wedge b = a$ و اگر $b \leq a$ آنگاه $a \wedge b = b$. بنابراین $a = b$.

۳) خاصیت تعدی: برای هر $a, b, c \in L$ اگر $a \leq b$ آنگاه $a \wedge b = a$ و اگر $b \leq c$ آنگاه $b \wedge c = b$. از طرفی $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$، پس $a \wedge c = a$ یعنی $a \leq c$.

تعریف ۲۲.۱.۱ در مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ کوچکترین و بزرگترین عضو در صورت وجود به ترتیب با ۰ و ۱ نشان داده می شود.

مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ را کراندار گویند هرگاه $۰, ۱ \in L$.

تعریف ۲۳.۱.۱ گیریم $(A, \leq)$ یک مجموعه ی جزیی مرتب باشد. عنصر a در A را ماکسیمال گوییم هرگاه $x \in A$ و $x \geq a$ نتیجه دهد $x = a$ و می نیمال گوییم هرگاه $y \in A$ و $y \leq a$ نتیجه دهد $y = a$

تعریف ۲۴.۱.۱ در مشبکه ی کراندار $(L, \vee, \wedge)$ که $x, x' \in L$، می گوییم x' متمم x است هرگاه

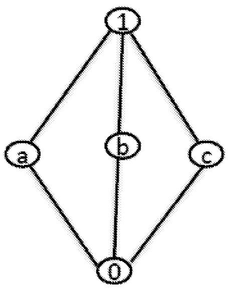
$$x \wedge x' = ۰,\ x \vee x' = ۱$$

در مشبکه ی کراندار، متمم یک عنصر در صورت وجود لزوماً منحصربه فرد نمی باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲۵.۱.۱ مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ را در نظر می گیریم که در آن $L = \{0, a, b, c, 1\}$ و عمل های $\vee$ و $\wedge$ به صورت زیر تعریف شده است

$\vee$	0	a	b	c	1
0	0	a	b	c	1
a	a	a	1	1	1
b	b	1	b	1	1
c	c	1	1	c	1
1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	1
0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	0	a
b	0	0	b	0	b
c	0	0	0	c	c
1	0	a	b	c	1



شکل ۱

عنصر a در L دو متمم دارد زیرا داریم $a \vee b = 1$ و $a \wedge b = 0$ و همچنین داریم $a \vee c = 1$ و $a \wedge c = 0$ و این یعنی b و c متمم های a می باشند.

تعریف ۲۶.۱.۱ مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ را متمم دار گویند هرگاه هر عنصر x از آن حداقل یک متمم مانند x' داشته باشد.

مثال ۲۷.۱.۱ مشبکه ای که در مثال ۲۵.۱.۱ دیدیم یک مشبکه ی متمم دار می باشد.

تذکر ۲۸.۱.۱ فرض کنیم $(L, \vee, \wedge)$ مشبکه باشد. برای هر $a, b \in L$ بازه ی بسته ی $[a, b]$، زیر مشبکه ی L می باشد.

اثبات: به مرجع [٦]، صفحه ی ۱۷ مراجعه کنید.

تعریف ۲۹.۱.۱ فرض کنیم $(L, \vee, \wedge)$ مشبکه و $x, a, b \in L$ باشند. می گوییم $x' \in [a, b]$ متمم نسبی $x \in [a, b]$ نسبت به a و b است هرگاه داشته باشیم $x \vee x' = b$ و $x \wedge x' = a$.

تذکر ۳۰.۱.۱ در یک مشبکه، متمم عنصر $x \in L$ در صورت وجود، متمم نسبی x نسبت به ۰ و ۱ می باشد زیرا اگر x' متمم x باشد داریم $x' \wedge x = ۰$ و $x' \vee x = ۱$.

تذکر ۳۱.۱.۱ با توجه به تذکر ۳۰.۱.۱ و مثال ۲۵.۱.۱، در یک مشبکه برای هر جفت دلخواه $(a, b) \in L \times L$ که $a \leq b$، متمم عنصر $x \in [a, b]$ نسبت به a و b در صورت وجود لزوماً یکتا نمی باشد.

تعریف ۳۲.۱.۱ مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ را متمم دار نسبی گوییم هرگاه برای هر جفت $(a, b) \in L \times L$ که $a \leq b$ ، هر $x \in [a, b]$ حداقل یک متمم نسبی نسبت به a و b داشته باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱ در مشبکه ی L زیر مجموعه ی نا تهی I از L یک اید ال است هرگاه

۱) اگر $x \leq y$ و $y \in I$ و $x \in L$ آنگاه $x \in I$.

۲) برای هر $x, y \in I$، $x \vee y \in I$.

مجموعه ی همه ی اید ال های مشبکه ی L را با $I(L)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۳۴.۱.۱ گیریم L یک مشبکه و A زیرمجموعه ی نا تهی از آن باشد. اشتراک تمام اید ال های L که شامل A هستند را اید ال تولید شده توسط A گوییم و با $\langle A \rangle$ نمایش می دهیم. داریم

$$\langle A \rangle = \{i \in L \ : \ i \leq a_۱ \vee a_۲ \vee a_۳ \vee \cdots \vee a_n \quad for \quad a_۱, a_۲, \cdots, a_n \in A\}$$

مثال ۳۵.۱.۱ برای هر $a \in L$، بازه ی $(a]$ اید ال L می باشد. اید ال به این فرم را اید ال اصلی می نامیم.

گزاره ۳۶.۱.۱ گیریم L یک مشبکه باشد. ساختار جبری $(I(L), \vee, \wedge)$ یک مشبکه است که در آن برای هر $I, J \in I(L)$، $I \wedge J$ و $I \vee J$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$I \wedge J = I \cap J, \quad I \vee J = \langle I \cup J \rangle$$

اثبات: ۱) خاصیت خود توانی: برای هر $I \in I(L)$ داریم $I = \langle I \rangle = \langle I \cup I \rangle = I \vee I$ و $I \wedge I = I \cap I = I$.

۲) خاصیت جابجایی: برای هر $I, J \in I(L)$ داریم

$$I \wedge J = I \cap J = J \cap I = J \wedge I$$

$$I \vee J = \langle I \cup J \rangle = \langle J \cup I \rangle = J \vee I$$

۳) خاصیت شرکت پذیری: به سادگی می توان دید $\vee$ و $\wedge$ شرکت پذیر هستند.

۴) خاصیت جذب: برای هر $I, J \in I(L)$ داریم

$$I \wedge (I \vee J) = I \cap \langle I \cup J \rangle = I \cap (\bigcap_{I \cup J \subseteq A} A) = I$$

$$I \vee (I \wedge J) = I \vee (I \cap J) = \langle I \cup (I \cap J) \rangle = \langle I \rangle = I$$

$\square$

تعریف ۳۷.۱.۱ در مشبکه ی L زیر مجموعه ی ناتهی F از L یک پالایه نامیده می شود هرگاه

۱) اگر $x \le y$ و $x \in F$ و $y \in L$ آنگاه $y \in F$.

۲) برای هر $x, y \in F$، $x \wedge y \in F$.

مجموعه ی همه ی پالایه های L را با $F(L)$ نمایش می دهیم.

تذکر ۳۸.۱.۱ گیریم L یک مشبکه باشد. ساختار جبری $(F(L), \vee, \wedge)$ یک مشبکه است که در آن برای هر $F_1, F_2 \in F(L)$، $F_1 \wedge F_2$ و $F_1 \vee F_2$ به صورت زیر تعریف می شوند

$$F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2, \quad F_1 \vee F_2 = \langle F_1 \cup F_2 \rangle$$

مثال ۳۹.۱.۱ برای هر $a \in L$، بازه ی $[a)$ پالایه L می باشد.

تذکر ۴۰.۱.۱ گیریم F یک پالایه و I یک اید ال از مشبکه ی L باشد. به سادگی می توان نشان داد F و I زیر مشبکه ها ی L هستند.

تعریف ۴۱.۱.۱ برای مشبکه های کراندار L_1 و L_2 تابع $f : L_1 \to L_2$ را همریختی مشبکه ای گوییم هرگاه

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

تعریف ۴۲.۱.۱ فرض کنیم $f : L_1 \longrightarrow L_2$ همریختی بین دو مشبکه ی کراندار باشد. تعریف می کنیم

$$\ker f = \{a \in L_1 : f(a) = 0\} \quad , \quad \mathrm{coker} f = \{a \in L_1 : f(a) = 1\}$$

و آنها را به ترتیب هسته و هم هسته ی f می نامیم.

نکته ۴۳.۱.۱ به سادگی می توان نشان داد هسته و هم هسته ی f زیر مشبکه ی L_1 می باشند.

لم ۴۴.۱.۱ اگر $(L,\vee,\wedge)$ یک مشبکه باشد آنگاه نامساوی های زیر برای هر $x,y,z\in L$ برقرارند.

۱) $(x\wedge y)\vee(x\wedge z)\leq x\wedge(y\vee z)$

۲) $x\vee(y\wedge z)\leq(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

اثبات: به مرجع [٦]، لم (۹) مراجعه کنید. □

لم ۴۵.۱.۱ اگر $(L,\vee,\wedge)$ یک مشبکه باشد آنگاه شرایط زیر برای هر $x,y,z\in L$ معادل اند.

۱) $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

۲) $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

۳) $(x\vee y)\wedge z\leq x\vee(y\wedge z)$

اثبات: به مرجع [٦]، لم (۹) مراجعه کنید. □

تعریف ۴٦.۱.۱ گوییم مشبکه ی $(L,\vee,\wedge)$ توزیع پذیر است هرگاه برای هر $a,b,c\in L$، یکی از شرایط لم قبل برقرار باشد.

تعریف ۴۷.۱.۱ مشبکه ی $(L,\vee,\wedge)$ پیمانه ای گفته می شود هرگاه برای هر $a,b,c\in L$، $a\leq b$ نتیجه دهد $a\vee(c\wedge b)=(a\vee c)\wedge b$.

نکته ۴۸.۱.۱ در یک مشبکه ی توزیع پذیر، متمم یک عنصر در صورت وجود منحصر به فرد می باشد.

نکته ۴۹.۱.۱ هر مشبکه ی توزیع پذیر، پیمانه ای می باشد.

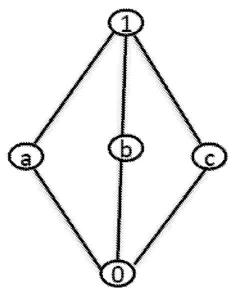
اثبات: گیریم $(L,\vee,\wedge)$ یک مشبکه ی توزیع پذیر باشد و $a,b,c\in L$ که $a\leq b$ داریم

$$a\vee(c\wedge b)=(a\vee c)\wedge(a\vee b)=(a\vee c)\wedge b$$

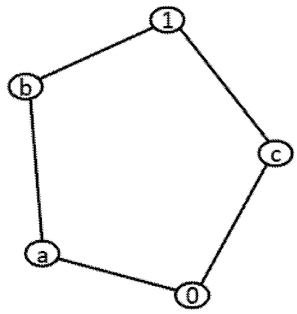
و این یعنی L پیمانه ای است. □

تذکر ۵۰.۱.۱ یک مشبکه ی پیمانه ای لزوماً توزیع پذیر نمی باشد. در مثال ۲۵.۱.۱، $(L, \vee, \wedge)$ یک مشبکه پیمانه ای است ولی توزیع پذیر نمی باشد زیرا داریم $c \wedge (a \vee b) = c \wedge 1 = c$ در حالی که $(c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee 0 = 0$.

قضیه ۵۱.۱.۱ مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ توزیع پذیر است اگر و تنها اگر هیچ یک از مشبکه های لوزی (شکل ۱) و پنج ضلعی (شکل ۲)، زیر مشبکه ی L نباشند.



شکل ۱



شکل ۲

برهان: به مرجع [۱]، قضیه ی ۹ مراجعه کنید. ■

گزاره ۵۲.۱.۱ مشبکه ی $(L, \vee, \wedge)$ توزیع پذیر است اگر و تنها اگر برای هر $a, b, c \in L$، استلزام زیر برقرار باشد.

$$a \wedge c = b \wedge c \,,\; a \vee c = b \vee c \Longrightarrow a = b \qquad (1)$$

اثبات: فرض کنیم مشبکه ی L توزیع پذیر باشد و $a, b, c \in L$ چنان باشند که $a \wedge c = b \wedge c$ و $a \vee c = b \vee c$. داریم

$$a \;=\; a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c)$$

$$
\begin{aligned}
&= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \\
&= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) = (a \vee c) \wedge b \\
&= b \wedge (a \vee c) = b \wedge (b \vee c) \\
&= b
\end{aligned}
$$

برعکس، فرض می کنیم برای هر $a, b, c \in L$، شرط (۱) برقرار باشد. با توجه به قضیه ی ۵۱.۱.۱ کافی است نشان دهیم مشبکه های پنج ضلعی و لوزی زیر مشبکه ی L نیستند. واضح است که شرط (۱) برای هر زیر مشبکه از L برقرار است. ولی برای مشبکه های لوزی و پنج ضلعی برقرار نیست زیرا در مشبکه ی لوزی داریم $a \wedge b = c \wedge b = ۰$ و $a \vee b = c \vee b = ۱$ در حالی که $a \neq c$. همچنین در مشبکه ی پنج ضلعی داریم $a \wedge c = b \wedge c = ۰$ و $a \vee c = b \vee c = ۱$ در حالی که $a \neq b$. پس مشبکه های لوزی و پنج ضلعی نمی توانند زیر مشبکه ی L باشند. □