بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
فیزیک اتمی مولکولی

تقارن دوگانی در نمایش‌های احتمالی و شبه‌احتمالی معادله شرودینگر- فون‌نویمان

استاد راهنما:
دکتر محمد رضا بذرافکن

استاد مشاور:
دکتر الهه نحوی‌فرد

نگارش:
صادق حسین‌زاده

اسفند ۱۳۸۸

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره)

معاونت آموزشی دانشگاه- مدیریت تحصیلات تکمیلی

(فرم شماره ۲۶)

تعهد نامه اصالت پایان نامه

اینجانب صادق حسین زاده دانشجوی رشته فیزیک اتمی مولکولی مقطع تحصیلی کارشناسی ارشد بدین وسیله اصالت کلیه مطالب موجود در مباحث مطروحه در پایان نامه / تز تحصیلی خود، با عنوان تقارن دوگانی در نمایش های احتمالی و شبه احتمالی معادله شرودینگر- فون نیومان را تأیید کرده، اعلام می نمایم که تمامی محتوی آن حاصل مطالعه ، پژوهش و تدوین خودم بوده و به هیچ وجه رونویسی از پایان نامه و یا هیچ اثر یا منبع دیگری، اعم از داخلی، خارجی و یا بین المللی ، نبوده و تعهد می نمایم در صورت اثبات عدم اصالت آن و یا احراز عدم صحت مفاد و یا لوازم این تعهد نامه در هر مرحله از مراحل منتهی به فارغ التحصیلی و یا پس از آن و یا تحصیل در مقاطع دیگر و یا اشتغال و ... دانشگاه حق دارد ضمن رد پایان نامه نسبت به لغو و ابطال مدرک تحصیلی مربوطه اقدام نماید. مضافاً اینکه کلیه مسئولیت ها و پیامدهای قانونی و یا خسارت وارده از هر حیث متوجه اینجانب می باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو صادق حسین زاده

امضاء و تاریخ

۸۸/۱۲/۱۵

بسمه تعالی

وزارت علوم و تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

دانشکده علوم پایه

جلسه دفاع از پایان‌نامه آقای **صادق حسین‌زاده** دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته **فیزیک** گرایش **اتمی مولکولی** روز شنبه مورخه ۱۳۸۸/۱۲/۱۵ تحت عنوان **" تقارن دوگانی در نمایش‌های احتمالی و شبه‌احتمالی معادله شرودینگر- فون نویمان"** در دانشگاه بین المللی امام خمینی(ره) تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت.

اعضای هیأت داوران

استاد راهنما: **دکتر محمد رضا بذرافکن**

استاد مشاور: **دکتر الهه نحوی‌فرد**

داور خارجی: **دکتر سعید باطبی**

داور داخلی: **دکتر حسن رئیسیان امیری**

نماینده تحصیلات تکمیلی: **دکتر هاشم حامدی‌وفا**

تقدیم به:

پدر و مادرم

آنانکه توانشان رفت تا به توانایی برسم و

مویشان سفید گشت تا رویم سپید بماند.

آنانکه فروغ نگاهشان، گرمی کلامشان و روشنی رویشان

سرمایه ی جاودانی زندگی من است.

و

تمامی عزیزانی که عاشقانه دوستشان می دارم.

چکیده

ما نماد توموگرافیک دوگان عملگر چگالی و مشاهده‌پذیرها را به عنوان یک نگاشت واکوانتش جدید در اپتیک کوانتومی مطالعه می‌کنیم. به عنوان یک کار مقدماتی، ما نمادهای توموگرافیک دوگان بعضی از حالت‌های کوانتومی که مکرراً استفاده می‌شوند را پیدا می‌کنیم. همچنین الگوریتمی برای تبدیل معادلات عملگری به معادلات دیفرانسیل جزئی شامل نمادهایشان معرفی می‌کنیم. از طریق این الگوریتم بعضی از معادلات ویژه نمادی - ویژه مقداری در اپتیک کوانتومی را معرفی می‌کنیم و آنها را به طور کامل حل می‌نماییم. به علاوه ما نمایش‌های تغییر شکل یافته معادله شرودینگر- فون‌نویمان و معادله راهبر پیدا می‌کنیم. سرانجام معادله شرودینگر- فون‌نویمان را برای هامیلتونی مربعی که در مسائل تحریک پارامتری با آن مواجه می‌شویم به طور کامل حل می‌کنیم.

کلمات کلیدی: نگاشت کوانتش، نگاشت واکوانتش، تابع توزیع شبه‌احتمال، تقارن دوگانی، نگاشت دوگان، نماد توموگرافیک، نماد توموگرافیک دوگان، معادله شرودینگر- فون‌نویمان.

تقدیر و تشکر:

اکنون که برگ دیگری از صفحه ی زندگی ورق خورده و مرحله ی دیگری از کسب علم و معرفت را پشت سر گذاشتم، خدا را شاکرم و سپاس می گویم که مرا لایق آموختن گردانید. چرا که بی لطف و عنایت آن یگانه ی بی همتا این مهم فراهم نمی شد.

همراهانی که مرا در طی این راه پر مشقت یاری کرده اند بسیارند و ابزاری جز قدردانی و سپاس در دست نیست تا گوشه ای از محبت هایشان را جبران کنم.

از دو گوهر گرانمایه زندگی ام، پدر و مادر عزیزم که اسوه ی ایثار و عشق اند، سپاسگزارم و هزاران بار دستان پر مهرشان را می-بوسم. همچنین از برادران و خواهران عزیزم که پشتیبانی های بی دریغشان همواره مایه ی دلگرمی هایم بوده، متشکرم.

از اساتید بزرگوارم، جناب آقای دکتر محمدرضا بذرافکن و سرکار خانم دکتر الهه نحوی فرد به پاس همه ی راهنمایی ها و دلگرمی هایشان بی نهایت سپاسگزارم و برایشان سلامتی و توفیق روز افزون را از درگاه خداوند متعال خواستارم.

همچنین از دوست عزیزم جناب آقای دکتر محمد حسین احمدی به خاطر کمک و همراهی شان قدردانی می نمایم.

در طول مدت تحصیل و انجام پایان نامه دوستان بسیاری مشوق و همراهم بودند که مجال ذکر نام تک تک آن ها فراهم نیست. لذا از تمامی آنان سپاسگزارم و توفیق روزافزونشان را از درگاه خداوند خواستارم.

فهرست

عنوان — صفحه

فصل چهارم: تقارن دوگانی برای نمادهای توموگرافیک و دوگان آنها

پیشگفتار

مفهوم حالت کوانتومی یک سیستم در طی دوره ظهور و کاربرد مکانیک کوانتومی همواره چالش برانگیز بوده است. مفهوم تابع موج آن چنان که خود شرودینگر آن را به عنوان نوعی موج واقعی، نظیر امواج الکترومغناطیسی، تصور می‌کرد خیلی سریع به کنار گذاشته شد. به زودی معلوم شد این تابع موج در واقع بیشتر شبیه به یک کد ریاضی عمل می‌کند که با استفاده از الگوریتم‌های ریاضی خاصی امکان محاسبه نتایج آزمایشی بر روی سیستم را به صورت کلاسی از توابع توزیع فراهم می‌کند. سپس مفهوم حالت کوانتومی به صورت تعمیم‌یافته‌تری با عملگر چگالی نمایش داده شد. استفاده از عملگر چگالی بخصوص وقتی سیستم ایزوله نیست (و مثلاً با یک منبع گرمایی در تماس است) اجتناب‌ناپذیر است زیرا در این حالات هیچ نوع نمایش تابع موجی وجود نخواهد داشت. سپس ویگنر آنچه را که امروزه نماد وایل- ویگنر عملگر چگالی نامیده می‌شود معرفی کرد. این نماد یک تابع حقیقی بر روی فضای فاز سیستم است که به طور کامل حالت کوانتومی را توصیف می‌کند. تابع ویگنر یکی از اعضای مجموعه‌ای از نمایش‌ها، به شکل توابع اسکالر تعریف شده بر " فضای فاز " است که به طور معکوس‌پذیر با عملگر چگالی مربوط هستند. هر یک از این نمایش‌ها که توابع شبه‌احتمال نامیده می‌شوند [1]، در واقع چشمداشتی یک عملگر هرمیتی خاص هستند که مختصات نقاط فضای فاز را به عنوان پارامتر درون خود دارد. توابع شبه‌احتمال گلاوبر- سودارشان و تابع ویگنر و نیز تابع هوسیمی- کانو مثال‌هایی از این نوع توابع شبه‌احتمال هستند. در معرفی همه این نمادها ایده بسیار ساده‌ای نهفته است. همان‌طور که یک بردار را می‌توان بر حسب عناصر یک مجموعه پایه بسط داد و برای آن نمایشی ماتریسی معین کرد فرایند مشابهی را نیز برای عملگرها بکار برد. در واقع نمادهای مختلف عملگر چگالی مربوط به چنین نمایش‌هایی هستند. برخی از این پایه‌ها برای برخی دیگر نقش پایه دوگان را دارند. این پایه‌های دوگان امکان تعریف نمادهای دوگان را فراهم می‌آورند. با این وجود هیچ یک از توابع شبه‌احتمال به معنی واقعی نمایشگر احتمال نبودند. اینکه حالت کوانتومی یک سیستم با داشتن مجموعه‌ای به قدر کافی غنی از توابع توزیع مشاهده‌پذیرهای سیستم قابل شناسایی است از مدت‌ها پیش حدس زده می‌شد. با این وجود اولین طرح عملی برای اندازه‌گیری حالت کوانتومی یک آنسامبل از سیستم‌ها که همگی در یک حالت معینی هستند توسط وگل[1] و ریسکن[2] مطرح شد [۶و۷]. این طرح شامل اندازه‌گیری تابع توزیع کلاس کوادراچر[3]های میدان الکترومغناطیسی تک‌مد بود. این کلاس از توابع توزیع در واقع تبدیل رادون تابع ویگنر است [۴]. با معکوس‌سازی تبدیل رادون امکان بازسازی تابع ویگنر حالت کوانتومی آنسامبل مذکور وجود خواهد داشت. به زودی تبدیل رادون (تعمیم‌یافته) تابع ویگنر به عنوان تابع نمادی جدید برای

---

1 $K.Vogel$

2 $H.Risken$

3 $quadrature$

عملگر چگالی معرفی شد. این نماد بر خلاف سایر نمادها چیزی به جز کلاسی از توابع توزیع قابل اندازه‌گیری نبود. معلوم شد که نماد توموگرافیک را نه تنها برای نمایش عملگر چگالی بلکه برای مشاهده‌پذیرهای سیستم نیز می‌توان بکار برد [۸و۹و۱۰]. تقارن دوگانی توابع شبه‌احتمال پیشنهاد می‌کند که نماد توموگرافیک دوگان را معرفی کنیم.

پایان نامه حاضر تلاشی برای معرفی نماد توموگرافیک دوگان به عنوان یک ابزار نمایش حالت‌ها و عملگرها در اپتیک کوانتومی است. از یک نگاه شاید این تابع نماد طبیعی‌ترین و اولین انتخاب باشد. در بخش‌های مختلف پایان‌نامه یک استراتژی واحد برای دستیابی به این هدف بکار رفته است. مثال‌های ارائه شده یا با هدف نمایش توانایی نماد توموگرافیک دوگان برای توصیف عملگر چگالی یا مشاهده‌پذیرها هستند و یا اینکه الگوریتم‌های حل معادلات تحول زمانی و یا ویژه مقداری را نشان می‌دهند که در صورت بکار بردن این نماد در حل برخی مسایل آشنا به آنها نیاز است. فصل نخست پایان‌نامه به معرفی مختصر کلاس توابع شبه‌احتمال، که با روابطی خطی و معکوس‌پذیر به عملگر چگالی مربوط هستند، می‌پردازد. تأکید اساسی این فصل بر وجود تقارن دوگانی بین نمادهای این کلاس است. همچنین در این فصل نشان می‌دهیم چگونه معادلات عملگری در نمایش‌های مختلف به معادلات دیفرانسیل جزئی برای توابع نماد متناظر تبدیل می‌شوند. از آنجا که این گونه مسائل اغلب در کتاب‌ها بحث می‌شوند بیشتر سعی شده است تا ارتباط آنها با چارچوب نظری پایان‌نامه معرفی شود. فصل دوم به معرفی مختصر تبدیل رادون و معکوس آن می پردازد. این فصل بدان جهت به پایان‌نامه اضافه شده است که تبدیل رادون تعمیم‌یافته تابع ویگنر یک حالت کوانتومی همان نماد توموگرافیک آن است. همچنین تحدید نماد توموگرافیک به بخش خاصی از دامنه آن برابر توموگرام اپتیکی حالت کوانتومی مذکور است. برای میدان تابشی توموگرام اپتیکی حالت کوانتومی در واقع چیزی بیش از مجموعه‌ای از توابع توزیع احتمال برای کوادراچرهای میدان نیست که بطور تجربی قابل اندازه‌گیری هستند. این فصل برای تأکید بر قابل اندازه‌گیری بودن نماد توموگرافیک ارائه شده است. فصل سوم به معرفی سیستماتیک نماد توموگرافیک برای عملگر چگالی و مشاهده‌پذیرها می‌پردازد. در این فصل و در ابتدا مثال‌هایی در مورد نمایش توموگرافیک حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها ارائه شده است. سپس الگوریتم تبدیل معادلات عملگری به معادلات دیفرانسیل برای نماد توموگرافیک ارائه شده است. برای این کار به عمل ضرب یک عملگر، در هر عملگر دوم دیگر، به عنوان یک عملگر خطی نگاه کرده‌ایم که می‌توان نظیر آن یک عملگر خطی محاسبه کرد که مقلد نقش اولی در مجموعه نمادهای توموگرافیک باشد. به این ترتیب چگونگی تشکیل و حل معادلات ویژه مقداری و معادلات تحول در نمایش توموگرافیک با ارائه چند مثال معرفی شده است. فصل چهارم که در واقع قسمت اصلی پایان‌نامه است نشان می‌دهد که مفهوم تقارن دوگانی به نماد توموگرافیک نیز قابل تعمیم است. البته نماد دوگان حاصل خود توموگرافیک نیست با این وجود هم سنگ سایر نمادها قابلیت‌های محاسباتی دارد. برای نمایش قابلیت‌های محاسباتی این نماد جدید ابتدا به ارائه مثال‌هایی از نمایش دوگان توموگرافیک برای حالت‌ها و مشاهده‌پذیرها پرداخته‌ایم. این مثال‌ها نشان می‌دهند حتی در مواردی که محاسبه

نماد توموگرافیک با مشکلاتی روبرو است نماد دوگان به راحتی قابل محاسبه است. سپس به موازات بحث‌های انجام شده برای نماد توموگرافیک به معرفی قواعد تناظر و چگونگی تشکیل معادلات دیفرانسیل نظیر معادلات عملگری پرداخته‌ایم. همچنین برای حالتی که هامیلتونی مستقل از زمان باشد الگوریتم کاملی برای حل ارائه کرده‌ایم. بجز این مسئله چند مسئله ویژه مقداری و یک مسئله تحول زمانی برای هامیلتونی مرتبه دو نسبت به مکان و تکانه به طور کامل حل شده است. مسئله آخری بخصوص در بحث تحریک پارامتری یک مد میدان کاربرد دارد. این فصل نشان دهنده امکان استفاده محاسباتی از نماد دوگان و برخی شیوه‌های کلی این کار است.

فصل اول

کلاس نمادهای S- پارامتری و تقارن دوگانی آن

در این فصل تعاریف توابع شبه‌احتمال ویگنر، هوسیمی- کانو و گلاوبر- سودارشان در قالب کلاس بزرگ توابع شبه‌احتمال s - پارامتری یادآوری می‌شود. خواهیم دید همه این توابع شبه‌احتمال، نمادهای عملگر چگالی هستند. چنین نمادهایی برای هر عملگر دیگر نیز قابل تعریف هستند. با استفاده از این نمادها معادلات عملگری اغلب به معادلات دیفرانسیل تبدیل می‌شوند. همچنین در این فصل تقارن دوگانی در نمادها معرفی شده و فرم معادله شرودینگر- فون‌نویمان[1] در نمایش‌های مختلف عملگرها بدست می‌آید.

۱-۱- ترتیب s تابعی از عملگرهای خلق و فنا

سیستمی کوانتومی، مانند یک نوسانگر هماهنگ یک‌بعدی، در نظر بگیرید که توسط عملگرهای خلق و فنای $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ توصیف می‌شود. عملگرهای مکان بی‌بعد و تکانه بی‌بعد را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{Q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \qquad \hat{\wp} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}.$$

با استفاده از رابطه جابجاگری عملگرهای خلق و فنا $\left[\hat{Q}, \hat{\wp}\right] = i$ خواهد بود. برای یک نوسانگر هماهنگ به جرم m و فرکانس طبیعی Ω در واقع $\hat{Q} = \kappa\hat{q}$ و $\hat{\wp} = \hat{p}/\hbar\kappa$ خواهد بود که در آن $\kappa = \sqrt{m\Omega/\hbar}$ است. هر عملگر دلخواه $\hat{F}$ (عملگر چگالی یا یک مشاهده‌پذیر دلخواه سیستم) را می‌توان به صورت سری توانی بر حسب عملگرهای $\hat{a}^\dagger$ و $\hat{a}$ بسط داد

$$\hat{F} = f_0\hat{1} + f_{1,1}\hat{a} + f_{1,2}\hat{a}^\dagger + f_{2,1}\hat{a}\hat{a}^\dagger + f_{2,2}\hat{a}^\dagger\hat{a} + f_{2,3}\hat{a}^2 + f_{2,4}\hat{a}^{\dagger 2} + \ldots$$

می توان نگاشتی یک‌به‌یک بین چنین عملگرهایی و توابع مختلط $f\left(\alpha, \alpha^*\right)$ ، که از این به بعد آنها را نماد عملگر $\hat{F}$ یا نمایش اسکالر می‌نامیم، بنا کرد. بخاطر ناجابجایی عملگرهای $\hat{a}$ و $\hat{a}^\dagger$ استفاده از قاعده متعارف $\hat{a} \mapsto \alpha$ و $\hat{a}^\dagger \mapsto \alpha^*$ به سادگی امکان‌پذیر نیست. زیرا با کاربرد مکرر رابطه جابجایی بین عملگرهای خلق و فنا یک عملگر $\hat{F}$ را به فرم‌های متفاوتی می‌توان نوشت. لذا همان عملگر، با قاعده متعارف، نمایش‌های اسکالر بیشماری خواهد داشت. برای حل این مشکل معمولا ترتیب‌های نرمال، متقارن، و پاد نرمال را برای یک تابع عملگری $\hat{F}\left(\hat{a}, \hat{a}^\dagger\right)$ معرفی می‌کنند. برای فرمی از $\hat{F}$ که

[1] $Shr\ddot{o}dinger - Von\, Neumann$

دارای ترتیب معینی است می‌توان به طور یگانه‌ای یک نمایش اسکالر $f\left(\alpha,\alpha^{*}\right)$ پیدا کرد. امکان تعمیم مفهوم ترتیب به گونه‌ای که با یک پارامتر پیوسته حقیقی برچسب زده شود، وجود دارد. ترتیب s، برای m فاکتور $\hat{a}$ و n فاکتور $\hat{a}^{\dagger}$ ،که ما آن را با نماد $\left\{\hat{a}^{m}\hat{a}^{\dagger n}\right\}_{s}$ نشان می‌دهیم، توسط بسط سری تیلور عملگر $\hat{D}\left(\alpha,s\right)$ تعریف می‌شود

$$\hat{D}\left(\alpha,s\right)\equiv e^{\frac{s|\alpha|^{2}}{2}}\hat{D}\left(\alpha\right)=e^{\frac{s|\alpha|^{2}}{2}}e^{\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}},$$

که در آن $\hat{D}\left(\alpha\right)\equiv\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}\right)$ عملگر جابجایی در فضای فاز است. بنا به تعریف $\left\{\hat{a}^{m}\hat{a}^{\dagger n}\right\}_{s}$ ها ضرایب بسط تیلور زیر هستند

$$\hat{D}\left(\alpha,s\right)\equiv\sum_{n.m=0}^{\infty}\frac{\alpha^{n}\left(-\alpha^{*}\right)^{m}}{n!m!}\left\{\left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{n}\hat{a}^{m}\right\}_{s}. \qquad (۱-۱)$$

به خصوص عملگرهای $\hat{D}\left(\alpha,1\right)$ و $\hat{D}\left(\alpha,-1\right)$ عبارتند از

$$\hat{D}\left(\alpha,1\right)=\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}+\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^{2}\right)=\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}\right)\exp\left(-\alpha^{*}\hat{a}\right),$$

$$\hat{D}\left(\alpha,-1\right)=\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}-\alpha^{*}\hat{a}-\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^{2}\right)=\exp\left(-\alpha^{*}\hat{a}\right)\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}\right).$$

با توجه به تساوی اول برای عملگر $\hat{D}\left(\alpha,1\right)$ و تعریف ترتیب $+1$ حاصل‌ضرب عملگرهای خلق و فنا می‌توان نوشت

$$\hat{D}\left(\alpha,1\right)=\exp\left(\alpha\hat{a}^{\dagger}\right)\exp\left(-\alpha^{*}\hat{a}\right)=\sum_{n.m}\frac{\alpha^{n}\left(-\alpha^{*}\right)^{m}}{n!m!}\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^{m},$$

$$\hat{D}\left(\alpha,1\right)\equiv\sum_{n.m}\frac{\alpha^{n}\left(-\alpha^{*}\right)^{m}}{n!m!}\left\{\hat{a}^{m}\hat{a}^{\dagger n}\right\}_{+1}\qquad\Rightarrow\qquad\left\{\hat{a}^{m}\hat{a}^{\dagger n}\right\}_{+1}=\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^{m}.$$

بنابراین ترتیب $s=+1$ متناظر با ترتیب نرمال برای حاصل‌ضرب عملگرهای خلق و فنا می‌باشد. به همین ترتیب با در نظر گرفتن عملگر $\hat{D}\left(\alpha,-1\right)$ و تساوی دوم می‌توان نشان داد که ترتیب $s=-1$ متناظر با ترتیب پاد نرمال برای حاصل‌ضرب عملگرهای خلق و فنا می‌باشد

$$\left\{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n \hat{a}^m\right\}_1 = \left(\hat{a}^\dagger\right)^n \hat{a}^m, \qquad \left\{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n \hat{a}^m\right\}_{-1} = \hat{a}^m \left(\hat{a}^\dagger\right)^n.$$

برای یک s دلخواه می‌توان نوشت

$$e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \frac{s}{2}\alpha\alpha^*} = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\alpha^n \left(-\alpha^*\right)^m}{n!m!} \left\{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n \hat{a}^m\right\}_s.$$

از طرفی با بسط تیلور طرف چپ تساوی بالا داریم

$$\mathrm{L.H.S.} = \hat{1} + \alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \frac{s}{2}\alpha\alpha^* + \frac{1}{2!}\left(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a} + \frac{s}{2}\alpha\alpha^*\right)^2 + \ldots$$

لذا با جمع همه جملات شامل ضریب $\alpha^n\left(-\alpha^*\right)^m$ در این بسط و ضرب کردن آنها در ضریب $n!m!$ می‌توانیم $\left\{\left(\hat{a}^\dagger\right)^n \hat{a}^m\right\}_s$ را محاسبه کنیم. مثلاً

$$\left\{\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}_s = \frac{-s}{2} + \frac{1}{2}\left(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\left\{\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}_{s=0} = \frac{\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger}{2}, \qquad \left\{\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}_{s=1} = \hat{a}^\dagger\hat{a}, \qquad \left\{\hat{a}^\dagger\hat{a}\right\}_{s=-1} = \hat{a}\hat{a}^\dagger,$$

$$\left\{\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}\right\}_s = -s\hat{a}^\dagger + \frac{1}{3}\left(\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a} + \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}\hat{a}^{\dagger 2}\right), \ldots$$

همچنین توجه به فرم تابعی $\hat{D}\left(\alpha,0\right) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} = \hat{D}\left(\alpha\right)$ معلوم می‌کند که این تابع، در واقع تابع مولد ترتیب متقارن توان‌های مختلف عملگرهای خلق و فنا می‌باشد. بنابراین عملگر $\left\{\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^m\right\}_{s=0}$ میانگین همه روش‌های مرتب کردن حاصل‌ضرب n فاکتور از $\hat{a}^\dagger$ و m فاکتور از $\hat{a}$ است و لذا $s = 0$ ترتیب متقارن را مشخص می‌کند. عملگر دلخواه $\hat{F}$ را می‌توان به صورت یک سری توانی ازحاصل‌ضرب‌های ترتیب s به فرم زیر بسط داد

$$\hat{F} \equiv \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{n,m}^{(s)} \left\{\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^m\right\}_s, \qquad (۱-۲)$$

که در آن ضرایب $f_{n,m}^{(s)}$ اعداد مختلطی هستند. این ثابت‌ها در حالت کلی به پارامتر ترتیب وابسته هستند. رابطه بالا عملگر $\hat{F}$ در ترتیب s را تعریف می‌کند. برای مقادیر $s=-1, s=0, s=1$ این سری توانی عملگر $\hat{F}$ در ترتیب نرمال، متقارن و پاد نرمال خواهد بود.

۱-۲- نمایش اسکالر عملگر $\hat{F}$ در ترتیب s و تابع نماد $W(\alpha,s)$

اگر مجموعه بردارهای $\{|\alpha_i\rangle\}$ یک مجموعه راست هنجار و کامل بسازند آنگاه هر عملگر $\hat{F}$ را می‌توان به شکل زیر بسط داد

$$\hat{F}=\sum_i|\alpha_i\rangle\langle\alpha_i|\hat{F}\sum_j|\alpha_j\rangle\langle\alpha_j|,$$

$$\hat{F}=\sum_{i,j}F_{i,j}|\alpha_i\rangle\langle\alpha_j|=\sum_{i,j}F_{i,j}\hat{U}_{i,j},$$

که در آن بنا به تعریف $\hat{U}_{i,j}\equiv|\alpha_i\rangle\langle\alpha_j|$ است. عناصر ماتریسی $F_{i,j}$ که ضرایب این بسط هستند به شکل زیر نیز قابل محاسبه هستند

$$F_{i,j}=\langle\alpha_i|\hat{F}|\alpha_j\rangle=\mathrm{Tr}\left(\hat{F}|\alpha_j\rangle\langle\alpha_i|\right)=\mathrm{Tr}\left(\hat{F}\hat{U}_{i,j}^{\dagger}\right),$$

در اینجا عملگر $\hat{F}$ نقش یک بردار و $\hat{U}_{i,j}$ ها نقش بردارهای پایه و $\mathrm{Tr}\{...,...\}$ نقش ضرب داخلی را بازی می‌کنند. مجموعه عملگرهای $\{\hat{U}_{i,j}\}$ در بالا کامل گفته می‌شود زیرا هر عملگر $\hat{F}$ را می‌توان بر حسب آنها بسط داد. برای یک سیستم کوانتومی یک بعدی، همه مشاهده‌پذیرها به همراه عملگر چگالی را می‌توان بر حسب $(\hat{q}^m\hat{p}^n)$ ها در ترتیب متقارن نوشت. لذا (برد) تابع مولد چنین ترتیبی، یعنی مجموعه

$$\left\{e^{i[\eta\hat{q}+\xi\hat{p}]}\Big|(\eta,\xi)\in\mathbb{R}^2\right\},$$

یک مجموعه کامل است. آشکارا هر تبدیل وارون پذیر از اعضای این خانواده (مانند تبدیل انتگرال فوریه) نیز یک مجموعه کامل خواهد بود. مثلاً مجموعه

$$\hat{D}(q,p)=2\pi\hbar\delta_{sym.}^{(2)}\left(\hat{q}-q,\hat{p}-p\right),\qquad (q,p)\in\mathbb{R}^2,$$

نیز یک مجموعه کامل از عملگرها است. در اینجا بنا به تعریف

$$\delta^{(2)}_{sym.}\left(\hat{q}-q,\hat{p}-p\right)\triangleq\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int e^{i\left[\eta\left(\hat{q}-q\right)+\xi\left(\hat{p}-p\right)\right]}\,d\xi\,d\eta$$

است. برای نمایش درستی این موضوع تبدیل معکوس‌پذیر انتگرالی فوریه دو بعدی این خانواده را به ترتیب زیر محاسبه می‌کنیم

$$\int\delta^{(2)}_{sym.}\left(\hat{q}-q,\hat{p}-p\right)e^{i\left[\eta' q+\xi' p\right]}\,dq\,dp=\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int e^{i\left[\eta\hat{q}+\xi\hat{p}\right]}\,e^{-i\left[q\left(\eta-\eta'\right)+p\left(\xi-\xi'\right)\right]}\,dq\,dp\,d\xi\,d\eta,$$

$$=\int e^{i\left[\eta\hat{q}+\xi\hat{p}\right]}\delta\left(\eta-\eta'\right)\delta\left(\xi-\xi'\right)d\xi\,d\eta,$$

$$=e^{i\left[\eta'\hat{q}+\xi'\hat{p}\right]}\;.$$

اغلب مناسب است از شکل جدیدی از انتگرال فوریه استفاده شود. فرض کنید $f\left(\xi\right)$ یک تابع تعریف شده بر صفحه مختلط باشد. انتگرال فوریه آن را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$g\left(\alpha\right)=\frac{1}{\pi}\int\exp\left(\alpha\xi^*-\alpha^*\xi\right)f\left(\xi\right)d^2\xi. \qquad (۳-۱)$$

این شکل خاص تبدیل انتگرالی فوریه رابطه بستاری (یا تعامد) ویژه خود را نیز همراه دارد که به شکل زیر است

$$\frac{1}{\pi^2}\int\exp\left(\alpha\,\xi^*-\alpha^*\xi\right)d^2\xi=\delta^{(2)}\left(\alpha\right).$$

با استفاده از شرط تعامد بالا می‌توان تبدیل وارون را بدست آورد

$$\int g\left(\alpha\right)\exp\left(-\alpha\eta^*+\alpha^*\eta\right)d^2\alpha=\frac{1}{\pi}\int\exp\left[\alpha\left(\xi-\eta\right)^*-\alpha^*\left(\xi-\eta\right)\right]f\left(\xi\right)d^2\xi\,d^2\alpha,$$

$$=\pi\int\delta^2\left(\xi-\eta\right)f\left(\xi\right)d^2\xi=\pi f\left(\eta\right)$$

در نتیجه

$$f\left(\eta\right)=\frac{1}{\pi}\int\exp\left(\eta\alpha^*-\eta^*\alpha\right)g\left(\alpha\right)d^2\alpha.$$

چون مجموعه عملگرهای $\hat{D}(\alpha, s)$ برای $\alpha \in \mathbb{C}$ همان مجموعه عملگرهای $\left\{ e^{i[\eta'\hat{q}+\xi'\hat{p}]} \middle| (\eta', \xi') \in \mathbb{R}^2 \right\}$ است لذا این مجموعه نیز یک مجموعه کامل است. انتگرال فوریه اعضای این مجموعه نیز یک مجموعه کامل خواهند بود. این تبدیل انتگرال فوریه به شکل زیر تعریف می‌شود

$$\hat{U}_s(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2\xi \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi) \hat{D}(\xi, s), \tag{۴-۱}$$

برای هر مقدار داده شده پارامتر ترتیب s خانواده $\hat{U}_s(\alpha), \quad \alpha \in \mathbb{C}$ یک پایه است. هر مجموعه از عملگرها مانند $\hat{D}_s(\beta)$ که در رابطه تعامد زیر

$$\mathrm{Tr}\left\{ \hat{U}_s(\alpha) \hat{D}_s(\beta) \right\} = \delta^{(2)}(\alpha - \beta) \tag{۵-۱}$$

صدق کند به تشابه با آنالیز برداری پایه دوگان نامیده می‌شود. نشان خواهیم داد مجموعه عملگرهای $\hat{D}_s(\alpha)$ که با قاعده زیر تعریف می‌شوند متناظر با پایه دوگان هستند

$$\hat{D}_s(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int d^2\xi \exp(\alpha\xi^* - \alpha^*\xi) \hat{D}(\xi, -s) = \pi \hat{U}_{-s}(\alpha), \qquad \alpha \in \mathbb{C} \tag{۶-۱}$$

عمل ضرب دو عملگر و سپس محاسبه رد حاصل‌ضرب آنها بسیار شبیه ضرب داخلی بردارها در آنالیز برداری است. ما در اینجا این عمل "ضرب داخلی" را با نماد زیر نشان خواهیم داد

$$\mathrm{Tr}\left\{ \hat{A}\hat{B} \right\} = \hat{A} \odot \hat{B}.$$

دوگانی پایه $\hat{D}_s(\alpha)$ را می‌توان با استفاده از ویژگی‌های زیر از عملگر انتقال ثابت کرد. نخست آنکه رد عملگر انتقال در فضای فاز برابر است با

$$\mathrm{Tr}\left\{ \hat{D}(\alpha) \right\} = \pi \delta^{(2)}(\alpha) \tag{۷-۱}$$

برای اثبات این رابطه کافی است رد سمت چپ را بر پایه حالت‌های همدوس محاسبه کنیم. ویژگی دوم آن است که حاصل‌ضرب دو عملگر انتقال (صرف نظر از یک ثابت) دوباره یک عملگر انتقال است و

$$\hat{D}(\xi) \hat{D}(\eta) = e^{\frac{1}{2}(\xi\eta^* - \eta\xi^*)} \hat{D}(\xi + \eta). \tag{۸-۱}$$

از اینجا بلافاصله نتیجه می‌گیریم که

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{D}\left(\xi,s\right)\hat{D}\left(\eta,-s\right)\right]=\pi\,\delta^{(2)}\left(\xi+\eta\right)\,, \tag{۹-۱}$$

اکنون می‌توانیم رابطه تعامد پایه‌های مستقیم و دوگان آنها یعنی

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s\left(\alpha\right)\hat{D}_s\left(\beta\right)\right\}=\delta^{(2)}\left(\alpha-\beta\right).$$

را ثابت کنیم. با استفاده از خطی بودن عمل رد داریم

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s\left(\alpha\right)\hat{D}_s\left(\beta\right)\right\}=\mathrm{Tr}\left[\left\{\frac{1}{\pi^2}\int e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\,\hat{D}\left(\xi,s\right)d^2\xi\right\}\left\{\frac{1}{\pi}\int e^{\beta\eta^*-\beta^*\eta}\,\hat{D}\left(\eta,-s\right)d^2\eta\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi^3}\int e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\,e^{\beta\eta^*-\beta^*\eta}\,\mathrm{Tr}\left\{\hat{D}\left(\xi,s\right)\hat{D}\left(\eta,-s\right)\right\}d^2\xi\,d^2\eta.$$

اکنون برای محاسبه رد حاصل‌ضربی که در انتگرال آخر ظاهر شده است از (۱-۹) استفاده می‌کنیم

$$\mathrm{Tr}\left\{\hat{U}_s\left(\alpha\right)\hat{D}_s\left(\beta\right)\right\}=\frac{1}{\pi^3}\int e^{\alpha\xi^*-\alpha^*\xi}\,e^{\beta\eta^*-\beta^*\eta}\,\pi\,\delta^{(2)}\left(\xi+\eta\right)d^2\xi\,d^2\eta,$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\int e^{(\alpha-\beta)\xi^*-(\alpha-\beta)^*\xi}\,d^2\xi=\delta^{(2)}\left(\alpha-\beta\right),$$

لذا

$$\hat{U}_s\left(\alpha\right)\odot\hat{D}_s\left(\beta\right)=\delta^{(2)}\left(\alpha-\beta\right).$$

هر عملگر $\hat{F}$ را می‌توان بر پایه عملگرهای $\hat{D}_s\left(\alpha\right)$ به صورت انتگرالی زیر بسط داد

$$\hat{F}=\int W_{\hat{F}}\left(\alpha,s\right)\hat{D}_s\left(\alpha\right)d^2\alpha.$$

نشان می‌دهیم که تابع وزن $W_{\hat{F}}\left(\alpha,s\right)$ بوسیله رد زیر داده می‌شود

$$W_{\hat{F}}\left(\alpha,s\right)\triangleq\mathrm{Tr}\left[\hat{F}\,\hat{U}_s\left(\alpha\right)\right]=\hat{U}_s\left(\alpha\right)\odot\hat{F}.$$

برای نشان دادن درستی ادعای بالا دو طرف عبارت بسط انتگرالی را در $\hat{U}_s\left(\beta\right)$ ضرب و سپس رد حاصل‌ضرب را محاسبه می‌کنیم