دانشکده ی علوم

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ی ریاضی- آنالیز

«نمایش های استوار از نیم شبکه ها و نیم گروههای معکوس»

بوسیله ی

مجید بابانظری

استاد راهنما

دکتر بهمن طباطبایی

دی ماه ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

بـه نـام خـدا

اظـهـار نـامـه

اینجانب مجید بابانظری (۸۸۰۵۸۴) دانشجوی کارشناسی ارشد رشـته ی ریاضی گرایش آنالیز دانشکده علوم شیراز بیان می کنم ایـن پایـان نامـه دست مایه ی پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام. همچنین اظهار می دارم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد می نمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتـشر نکـرده و یـا در اختیـار دیگران قرار نمی دهم .کلیه حقوق این اثر مطابق با آیـین نامـه مالکیـت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: مجید بابانظری

تاریخ و امضاء: ۱۳۹۰/۱۱/۳۰

به نام خدا

نمایش های استوار از نیمه شبکه ها
ونیم گروه های معکوس

به کوشش:

مجید بابانظری

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه ی کارشناسی ارشد

در رشته:

ریاضی محض

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی کمیته ی پایان نامه ، با درجه : عالی

دکتر بهمن طباطبایی، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)..
دکتر محمدرضا فرهنگ دوست، استاد یار بخش ریاضی..
دکتر محسن تقوی، دانشیار بخش ریاضی..

دی ماه ۱۳۹۰

تقدیم به:

اعضای خانواده ام که همواره مشوق من بوده اند.

سپاسگزاری

سپاس خداوندی را که همواره سمیع و بصیر است و لطف او انتها ندارد. حال که به یـاری او بـه انتهای این فصل از دوره علمی خود رسیده ام، برخود لازم مـی دانـم کـه از زحمـات بـی دریـغ استاد فرزانه ام جناب آقای دکتر بهمن طباطبایی قدردانی کنم.درضمن از اساتید مشاورم جناب آقای دکتر محمدرضا فرهنگ دوست و جناب آقای دکتر محسن تقوی کمال تشکر را دارم.

باشد که این عزیزان همواره در سایه ی لطف حق باشند.

چکیده

نمایش های استوار از نیم شبکه ها و نیم گروههای معکوس

به کوشش

مجید بابانظری

منظور از یک نیم گروه بولی معکوس، یک نیم گروه معکوس است که نیمه شبکه ی عناصر خود توان آن یک جبر بولی است. ما در این پایان نامه، نمایش هایی روی نیم گروههای معکوس را بررسی می کنیم که استوار هستند. سپس نمایش مهمی از نیم گروههای معکوس بولی بنام نمایش Vagner – Preston ارائه می کنیم که هرگز استوار نیست. سپس نمایش استواری بنام نمایش کانونی منظم روی نیم گروه های معکوس ارائه می کنیم و به بررسی وفاداری آن می پردازیم.

در نهایت مفهوم پیوستگی یک نیم گروه معکوس را بیان می کنیم و با ذکر یک مثال نقض نشان می دهیم که همه ی نیم گروههای معکوس پیوسته نیستند.

فهرست مطالب

فصل اول

مقدمه

هدف اصلی در این پایان نامه، بررسی نمایش های استوار روی نیم گروههای بولی معکوس است. منظور از یک نیم گروه بولی معکوس، یک نیم گروه معکوس است که شبکه ی عناصر خود توان آن ساختار جبر بولی به خود می گیرند.

یکی از متداول ترین نیم گروههای بولی معکوس $L(X)$ است. در این پایان نامه نشان می دهیم که

$E(L(X)) = P(X)$. در واقع $L(X)$ مجموعه ی همه ی توابع دو سویی روی زیرمجموعه های X است.

در این پایان نامه همریختی های بین نیم گروه های معکوس به توی جبرهای بولی به طور کامل بررسی می شوند. مشهورترین همریختی از نیم گروه معکوس S بتوی یک نیم گروه بولی معکوس، نمایش

Vagner – Preston نام دارد.این نمایش ویژگی های خاصی دارد، از جمله اینکه هرگز استوار نیست و در ضمن بوسیله ی آن ثابت می شود که هر نیم گروه معکوس، زیر نیم گروهی از یک $L(X)$ است.

فرض کنیدکه σ یک نمایش روی نیم گروه معکوس S باشد، σ را وفادارمی گویند هرگاه σ تابعی یک به یک باشد. در واقع بعضی اوقات عناصر متفاوت s,t،تحت نمایش های استوار روی S از هم جدا نمی شوند. در این پایان نامه ما به بررسی شرایطی می پردازیم که تحت آن این امر اتفاق بیفتد.

همچنین در این پایان نامه ،ویژگی های نمایش استوار کانونی $\lambda : S \to L(\Omega)$ بررسی می شود که در اینجا، Ω مجموعه ی همه ی ابر فیلتر ها روی S است.به این نمایش، نمایش منظم می گویند.

اگر S نیم گروه معکوس پیوسته باشدو s,t دو عنصر متفاوت S باشند واگر بازای هر نمایش استوار مثل σ روی S داشته باشیم که $\sigma(s) = \sigma(t)$ ، آنگاه $\lambda(s) = \lambda(t)$.بنابراین نمایش کانونی تحت این شرایط وفادار نیست.

لازم به ذکر است که در مطلب اخیر، شرط پیوستگی S اساسی است. زیرا بدون شرط پیوستگی S، باذکر مثالی درستی مطلب اخیر به کلی نفی می شود.

مقاله به طور زیر ساختار بندی شده است:

در فصل اول بطور خلاصه تعاریف و قضیه های مورد نیاز بیان می شود، در فصل دوم نمایش های استوار روی نیمه شبکه ها و مفهوم چگالت بیان می شود. در فصل سوم مفهوم فیلترها و ابرفیلترها بیان می شود و این نکته ثابت می شود که هر فیلتر درون یک ابر فیلتر قرار می گیرد.

در فصل چهارم به بررسی خانواده ی خاصی از نمایش ها می پردازیم که مشخصه نام دارند و استوار بودن آنها را بررسی می کنیم.

در فصل پنجم نیم گروههای بولی معکوس مورد مطالعه قرار می گیرند و یکی از مشهورترین نیم گروههای بولی معکوس به نام $L(X)$ معرفی می شود.

در فصل ششم نمایش های معروفی همچون $Vagner - Preston$ و نمایش کانونی معرفی می شوند و شرایط استوار بودن آنها بررسی می گردد.

در فصل هفتم بیان می داریم که تحت چه شرایطی یک نمایش وفادار است و تحت چه شرایطی عناصر نیم گروه S از هم جدا می شوند. همچنین به بررسی رده ی خاصی از نیم گروه های معکوس

که E^*- $unitary$ نام دارند می پردازیم.

در فصل هشتم یک مثال نقض خیلی مهم ارائه می کنیم که در آن نیم گروهی ناپیوسته معرفی می شود که نمایش کانونی منظم روی آن وفادار نیست.

تعریف ۱-۱: جبر (Algebra)

یک جبر A روی میدان F، یک فضای خطی روی F با یک ضرب به شکل $(x,y)\to xy$ از $A\times A$ به A است که به ازای همه ی $x,y,z\in A$ وبه ازای هر اسکالر دلخواه $\alpha\in F$ دارای ویژگی های زیر است:

(۱): $x(yz)=(xy)z$

(۲): $(x+y)z=xz+yz$ و $x(y+z)=xy+xz$

(۳): $\alpha(xy)=(\alpha x)y=x(\alpha y)$

میدان F روی A، میدان برداری نام دارد.اگر F میدان اعداد حقیقی باشد، به A جبر حقیقی و اگر F میدان اعداد مختلط باشد به A جبر مختلط می گویند، به علاوه اگر A فضای نرم دار باشد به آن جبر نرم دار می گویند.

تعریف ۱-۲: برگشت(Involution):

فرض کنیم که X یک فضای خطی مختلط باشد.

تابع $x\to x^*$ از X به X یک برگشت*(Involution)* نام دارد، هرگاه به ازای هر x و y متعلق به X وبه ازای هر عدد مختلط مثل α ، روابط زیر برقرار باشد:

(۱): $(x+y)^*=x^*+y^*$

(۲): $(\alpha x)^*=\overline{\alpha}\,x^*$

(۳): $(x)^{**}=x$

تعریف ۱-۳: ❋- جبر (❋ - Algebra)

به جبرمختلط A، یک ❋ - جبر می گویند ،هرگاه روی جبر A یک تابع برگشت مثل (❋) با این ویژگی تعریف گردد که :

$(xy)^*=y^*x^*$

تعریف ۱-۴ : ❋- جبرنرم دار (Normed ❋ - Algebra)

فرض کنیم که A یک جبرمختلط با یک نرم و یک برگشت مثل (❋) باشد، در این صورت A را

❋ -جبر نرم دار می گویند.

تعریف۱-۵ : *- جبر باناخ (Banach * - Algebra)

*- جبر باناخ، یک *- جبر نرم دار کامل است.

تعریف ۱-۶ : * - همریختی (* - Homomorphism)

فرض کنید که $(A,*)$ و $(B,*)$ دو * - جبر باشند، همریختی $\varphi : A \to B$ را * - همریختی می گوییم هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم که $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$ ونیز φ همریختی جبری باشد.

هرگاه * - همریختی φ یک به یک هم باشد به آن * - یکریختی گوییم.

تعریف ۱-۷ : C^*- جبر (C^* - Algebra)

C* - جبر ، یک * - جبر باناخ مثل A است، با این ویژگی که :

$$\forall T \in A \quad : \quad \left\| T^*T \right\| = \| T \|^2$$

مثلاً اگر X یک فضای فشرده ی هاسدورف باشد، آنگاه *C(X)* متشکل از همه ی توابع پیوسته روی فضای

فشرده ی X با نرم زیر:

$$(\forall f \in C(X) \quad \|f\| = \sup\{\ |f(x)|\ : x \in X\}$$

و باتابع برگشتی که هر عنصر *C(X)* را به مزودجش منتقل می کند ،یک C^*- جبراست.

تعریف ۱-۸ : خود الحاق (Self- adjoint)

فرض کنیم که A یک C^* – جبر باشد و $a \in A$ ،عنصر a را خودالحاق گویند هرگاه $a^* = a$

تعریف ۱-۹ : نیم گروه (Semi group) وزیرنیم گروه (Subsemigroup)

مجموعه ی S یک نیم گروه است هرگاه S، نسبت به عمل دوتایی و شرکت پذیر مفروض، بسته باشد. زیرمجموعه ی ناتهی T از نیم گروه S یک زیرنیم گروه است هرگاه:

$$(\forall x, y \in T) \Rightarrow (xy \in T)$$

تعریف ۱-۱۰ : نیم گروه معکوس و زیرنیم گروه معکوس
(Inverse Semigroup and Inverse Subsemigroup)

نیم گروه S یک نیم گروه معکوس است ،هر گاه برای هر $s \in S$ ،عنصر یکتای $s^* \in S$ چنـان موجـود باشـد بـه طوریکـه $ss^*s = s$ و $s^*ss^* = s^*$. زیـرنیم گـروه T از نـیم گـروه معکوس S یک
زیرنیم گروه معکوس است هرگاه:

$$(\forall x \in T) \Rightarrow (x^* \in T)$$

تعریف۱-۱۱:خود توان(***Idempotent***)

گیریم که نیم گروه S یک نیم گروه معکوس باشد و عنصر $s \in S$به گونه ای باشد کـه $s^2 = s$
.
آنگاه sرا خودتوان گوییم.

تعریف۱-۱۲: عنصر صفر و عنصر یک، در یک نیم گروه معکوس
(Zero and multiplicative unit)

عنصر $\text{o} \in S$ را که برای هر $s \in S$ دارای این خاصیت است که $\circ = s\circ = \circ s$ را عنصر صـفر نیم گروه معکوس S می نامیم.
همچنین عنصر 1 را که به ازای هر $s \in S$ دارای این خاصیت اسـت کـه $s = 1s = s1$، عنـصر ضربی یکه ی S می نامیم.

قضیه ۱-۱۳:

فرض کنید که S یک نیم گروه معکوس پذیر باشد، مجموعه ی عناصر خـود تـوان S را بـا $E(S)$ نشان می دهیم در این صورت:
الف) $s^*s \in E(S)$
ب) $E(S)$ یک نیم گروه از عناصرجابجایی است.
اثبات (الف):

$$(s^*s)^2 = s^*ss^*s = (s^*ss^*)s = s^*s$$

اثبات (ب): فرض کنیم که وارون هر عضو S مثل t با t' نشان داده شود.

حال گیریم که $e,f \in E(S)$.نشان می دهیم کـه وارون حاصلـضرب f,e، یعنـی وارون ef ،خودتوان است، یعنی اگر $x=(ef)'$ وارون ef باشد، آنگاه نشان می دهیم که $x^2 = x$.

عنصر fxe را در نظر بگیرید، اولاً این عنصرخودتوان است. زیرا :

$$(fxe)^2 = (fxe)(fxe) = f(xefx)e = f(xx'x)e = fxe$$

حال ادعا می کنیم که fxe وارون ef است،زیرا:

$$(fxe)ef(fxe) = fxe^2f^2xe = fxefxe = (fxe)^2 = fxe$$

$$ef(fxe)ef = ef^2xe^2f = efxef = (ef)x(ef) = (ef)(ef)'(ef) = ef$$

پـــس fxe وارون ef اســـت .لـــذا $(ef)' = fxe$ و در ضـــمن چـــون $x=(ef)'$، پس $(ef)' = f(ef)'e$.

از طرفـی قـبلاً خودتـوان بـودن fxe ثابـت شـد،پس وارون ef یعنـی $(ef)'$ نیـز خودتـوان اسـت.ولـی مـی دانـیم کـه هـر عـضو خودتـوان، وارونـش بـا خـودش یکـسان اسـت. لـذا $((ef)')' = (ef)'$ پس $ef = (ef)'$.حال چون $(ef)'$خودتوان است ،پس ef هم خودتوان است. لذا $E(S)$ نسبت به عمل ضرب بسته است.از این رو $ef\ ,\ fe \in E(S)$.

حال :

$$ef(fe)ef = (ef)(ef) = (ef)^2 = ef \quad , \quad fe(ef)fe = (fe)(fe) = (fe)^2 = fe.$$

پس $ef\ ,\ fe$ وارون های efهستند. پس طبق یکتایی عنصر وارون باید $ef = fe$.

تعریف ۱-۱۴ : جبر بولی(Boolean Algebra)

جبر بولی سه تایی $(B,\vee,\wedge)$ است که در آن B یک مجموعه ای ناتهی است و $\vee,\wedge$ دو عمل دوتایی روی B هستند که به ازای هر $a,b,c \in B$ در شرط های (الف) تا (ه) صدق می کنند.

الف) جابه جایی:

$$a \vee b = b \vee a$$
$$a \wedge b = b \wedge a$$

ب) شرکت پذیری :

$$a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$$
$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$$

ج) پخش پذیری :

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

د) یکه ها:

عنصرهای $\circ,1 \in B$ با شرط $\circ \neq 1$ وجود دارند به قسمی که $a \wedge 1 = a \quad , \quad a \vee \circ = a$.

ه) متمم گیری:

برای هر $a \in B$ ، عنصریکتای $\neg a \in B$ به گونه ای وجود دارد که :

$\neg a = \max\{t : t \wedge a = \circ\}$ ونیز $a \vee \neg a = 1 \quad , \quad a \wedge \neg a = \circ$.

تعریف ۱-۱۵: مجموعه ی جهت دار (Dircted set) :

یک مجموعه ی مرتب جزئی $(D,\leq)$ با این خاصیت که برای هر x,y متعلق به D، z − ای درون D موجود است که $x \leq z$ و $y \leq z$ ، جهت دار خوانده می شود.

۱-۱۶: تعریف: شمارای نوع دوم: (Second countable)

فضای توپولوژیکی $(S \ ,\tau)$ را شمارای نوع دوم گوییم هرگاه دارای پایه ای شمارا باشد.

تعریف ۱-۱۷:تور(Net):

تور ،تعمیمی از مفهوم دنباله است که عموماً در فضاهای توپولوژیکی که ناشمارا ویا شمارای نوع دوم هستند به کار می رود و کاربرد اصلی آن در توپولوژی ، بررسی فشردگی فضاهای توپولوژیک ، بسته بودن یک مجموعه و پیوستگی توابع است.

یک تابع $x : D \to X$ را که در آن $(D,\leq)$ یک مجموعه ی جهت دار است، یک تور خوانده می شود. مثلاً N با رابطه ی ترتیب جزئی معمولی، یک مجموعه ی جهت دار است و لذا هر دنباله یک تور است.اکنون یک مجموعه ی جهت دار مهم ارائه می کنیم.

فرض کنیم که (S,τ) فضای توپولوژیکی باشد و $p \in S$.حال مجموعه ی همه ی همسایگی های حول p را در نظر می گیریم. این مجموعه را با N_p نشان می دهیم وبه آن سیستم همسایگی حول p می گوییم. واضح است که N_p با رابطه ی ترتیب زیر یک مجموعه ی جهت دار است:

$$(\forall N_1 , N_2 \in \mathrm{N}_p \quad N_1 \leq N_2 \Leftrightarrow N_1 \supseteq N_2 \quad)$$

تعریف ۱-۱۸: همگرایی یک تور(Convergence of a net)

یک تور مانند $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ در فضای توپولوژیک (S,τ) ،همگرا به نقطه ای از S مانند a است، هرگاه به ازای هر مجموعه ی باز G شامل a، یک $\alpha_G \in D$ به گونه ای وجود داشته باشد که برای هر $\alpha \ge \alpha_G$، x_α متعلق به G باشد. در این صورت می نویسیم که: $\lim\limits_{\alpha} x_\alpha = a$ یا $x_\alpha \to a$.

اگر برای هر $N \in \mathrm{N}_p$، x_N نقطه ی دلخواهی از N باشد، آنگاه $(x_N)_{N\in N_P}$ یک تورهمگرا به p است.

قضیه ی ۱-۱۹:

فرض کنیم که (S,τ) یک فضای توپولوژیکی باشد و $A \subseteq S$ و $p \in S$. در این صورت اگر $p \in \overline{A}$،آنگاه یک تور همگرا به p وجود دارد.

اثبات: چون $p \in \overline{A}$ ، لذا هر همسایگی N از p مجموعه ی Aرا در نقطه ای مانند a_N قطع
می کند.در این صورت $(a_N)_{N\in N_P}$ یک تور همگرا به p متشکل از نقاط A خواهد بود.

قضیه ی ۱-۲۰:

فرض کنیم که تابع $f:(S_1,\tau_1)\to(S_2,\tau_2)$ پیوسته باشد، حال اگر $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یک تور همگرا به x در S_1 باشد، آنگاه $\lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha) = f(\lim\limits_{\alpha}(x_\alpha))$.

اثبات: گیریم که G مجموعه ای باز حول $f(x)$ باشد. پس $x \in f^{-1}(G)$. حال چون f پیوسته است، پس $f^{-1}(G)$ در S_1 باز است و x را شامل می شود.اما $x_\alpha \to x$، پس طبق تعریف همگرایی تور ها داریم که:

$$\exists \beta \ \ s.t \quad \forall \alpha \ge \beta \quad x_\alpha \in f^{-1}(G)$$

لذا :

$$\exists \beta \ \ s.t \quad \forall \alpha \ge \beta \quad f(x_\alpha) \in G$$

و این یعنی $f(x_\alpha) \to f(x)$، ازاینرو $\lim\limits_{\alpha} f(x_\alpha) = f(\lim\limits_{\alpha}(x_\alpha))$.

قضیه ی ۱-۲۱:

فرض کنیم کـه توابـع $f:(S_1,\tau_1)\to(S_2,\tau_2)$ و $g:(S_1,\tau_1)\to(S_2,\tau_2)$ تـوابعی پیوسته اند و فرض کنیم که E زیرمجموعه ی چگالی از S_1 باشد .حال اگر f,g روی E بـا هم برابر باشند، آنگاه f,g روی S_1 هم با یکدیگر برابرند.

اثبات:

گیریم که $x\in S_1$، لذا $x\in\overline{E}=S_1$، لذا توری همچون $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ در E وجود دارد کـه بـه x همگراست.یعنی $\lim_{\alpha} x_\alpha = x$.حال چون x_α –ها درون E هـستند و روی E، توابـع f,g برابرند پس بازای هر $\alpha\in D$ ، $f(x_\alpha)=g(x_\alpha)$. لذا:

$$f(x)=f(\lim_{\alpha} x_\alpha)=\lim_{\alpha}(f(x_\alpha))=\lim_{\alpha}(g(x_\alpha))=g(\lim_{\alpha} x_\alpha)=g(x)$$

ازاینرو f,g روی S_1 با هم برابرند.

تعریف ۱-۲۲ : فضای هاسدورف

فضای توپولوژیکی (S,τ) را هاسدورف می گوییم ، هرگاه بـه ازای هـر دو عـضو متمـایز از S مانند x,y دو مجموعه ی بـاز G_1 و G_2 موجـود باشـد بـه طوریکـه $x\in G_1$ و $y\in G_2$ و $G_1\cap G_2=\phi$.

قضیه ۱-۲۳:

اگر فضای توپولوژیکی (S,τ) هاسدورف باشد، حد هر تور در آن یکتاست.

اثبات: فـرض کنـیم کـه $(x_\alpha)_{\alpha\in D}$ یـک تـور دارای دو حـد متمـایز x_1 و x_2 باشـد. پـس مجموعــه هــای بــاز G_1 و G_2 بــه گونــه ای وجــود دارنــد کــه $x_1\in G_1$ و $x_2\in G_2$ و $G_1\cap G_2=\phi$. بنا بر تعریف حد،

α_1 –ای هست که برای هر $\alpha\ge\alpha_1$ ، $x_\alpha\in G_1$ و α_2 –ای هست که برای هـر $\alpha\ge\alpha_2$، $x_\alpha\in G_2$. بنا بر جهت دار بودن D، یک γ هست که $\gamma\ge\alpha_1$ و $\gamma\ge\alpha_2$.

لذا $x_\gamma\in G_1\cap G_2=\phi$ که ممکن نیست.

قضیه۱-۲۴:

اگر فضای توپولوژیکی (S,τ) هاسدورف باشد، آنگاه هر زیرفضای آن نیز هاسدورف است.

اثبـــات: اگـر A زیرمجموعـه ی نـاتهی از S باشـد، آنگـاه مـی دانـیم کـه مجموعـه ی $\tau/A=\{G\cap A:G\in\tau\}$ تشکیل یک توپولوژی روی A مـی دهـد و فـضای توپولوژیـک $(A,\tau/A)$ یک زیرفضا برای (S,τ)است.حال نشان مـی دهـیم کـه $(A,\tau/A)$ هاسـدورف

است.

فرض کنیم که x,y دو عنصر متفاوت در A باشند. چون Sهاسدورف است، دو مجموعه ی باز G_1 و G_2 به گونه ای موجودندکه $x \in G_1$ و $y \in G_2$ و $G_1 \cap G_2 = \phi$.بنابراین $H_1 = G_1 \cap A$ و $H_2 = G_2 \cap A$ دو مجموعه ی باز در زیرفضای $(A, \tau / A)$ هستند که $x \in H_1$ و $y \in H_2$ و $H_1 \cap H_2 = \phi$. لذا $(A, \tau / A)$ هاسدورف است.

قضیه ی ۱-۲۵:

اگر به ازای هر αمتعلق به I، (S_α, τ_α) هاسدورف باشد، آنگاه $\prod_{\alpha \in I} (S_\alpha, \tau_\alpha)$ نیز هاسدورف است.

اثبات: گیریم که به ازای هر αمتعلق به I، (S_α, τ_α) هاسدورف باشد، فرض کنیم که x,y دو

نقطه ی متمایز از فضای حاصلضربی $\prod_{\alpha \in I} (S_\alpha, \tau_\alpha)$ باشد. چون $x \neq y$ ، لذا $\alpha_\circ \in I$ چنان موجود است که $x(\alpha_\circ) \neq y(\alpha_\circ)$. چون $S_{\alpha_\circ}$ هاسدورف است، لذا دو مجموعه ی باز و مجزای G_1, G_2 در $S_{\alpha_\circ}$ چنان موجودند که $x(\alpha_\circ) \in G_1$ و $y(\alpha_\circ) \in G_2$. لذا $\pi_{\alpha_\circ}(x) = x(\alpha_\circ) \in G_1$ ، که در اینجا $\pi_{\alpha_\circ}$تابع افکنش یا تصویر روی مؤلفه ی $\alpha_\circ$- ام است. واضح است که توابع افکنش نگاشت هایی پیوسته هستند.

مشابهاً $\pi_{\alpha_\circ}(y) = y(\alpha_\circ) \in G_2$، پس $x \in \pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_1)$ و $y \in \pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_2)$.

واضح است که $\pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_1)$ و $\pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_2)$ دو مجموعه ی باز شامل y,x در فضای $\prod_{\alpha \in I} (S_\alpha, \tau_\alpha)$ هستند ونیز:

$$\pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_1) \cap \pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_2) = \pi_{\alpha_\circ}{}^{-1}(G_1 \cap G_2) = \phi.$$

ازاینرو $\prod_{\alpha \in I} (S_\alpha, \tau_\alpha)$ هاسدورف است.

تعریف ۱-۲۶: زنجیر (Chain)

گیریم که $(\sum, \leq)$ مجموعه ای جزئاً مرتب باشد، آنگاه زیرمجموعه ی Λ از $\sum$ را زنجیر می نامند هرگاه به ازای هر دو عضو از Λ مثل b_1 و b_2 ، داشته باشیم که $b_2 \leq b_1$ یا $b_1 \leq b_2$.

۱-۲۷ : لم زورن (Zorn lemma)

اگر $\sum$ مجموعه ای ناتهی همراه با رابطه ی ترتیب جزئی $\leq$ باشد با این ویژگی که هر زنجیر ناتهی از آن، کران بالایی در $\sum$ داشته باشد ،آنگاه $\sum$ عضو ماکسیمال دارد.