بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکدهٔ علوم پایه

گروه ریاضی

(گرایش محض)

طبقه بندی مترهای فینسلری تخت تصویری

از:

آمنه سمیعی پاقلعه

استاد راهنما:

دکتر اسماعیل عزیزپور

شهریور ۱۳۸۸

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

که نور وجودشان همواره روشنی و گرمای زندگی‌ام بوده است.

تقدیر و تشکر

حمد وسپاس خداوندی را که زبان از عنایت شکرش قاصر است وخرد در ژرفای معرفتش عاجز، او که آغاز و پایانی ندارد. پروردگار متعال را شاکرم که عنایت پیدا وپنهانش در تمام زندگی‌ام جریان داشته است. اکنون که با لطف او مرحله دیگری از تحصیلاتم را به پایان می رسانم برخود لازم می دانم تا مراتب سپاس و امتنان قلبی خویش را از اساتید علمی و اخلاقی، خانواده و دوستان خود خواستار باشم.

نخست از پدر و مادرم که مشوق من هستند و شرایط و محیط را برایم فراهم کردند تا بتوانم این مسیر را با آرامش طی کنم و نیز دعای خیرشان همواره همراهم بوده سپاسگزارم و برایشان آرزوی سلامتی و کامیابی دارم.

برخود لازم می‌دانم از زحمات و تلاش‌های استاد راهنمایم جناب آقای دکتراسماعیل عزیزپور تشکر و قدردانی نمایم، مسلما در طول انجام این پروژه، اگر پیشرفتی در کار شکل می‌گرفت بواسطه‌ی دلگرمی‌ها و راهنمایی‌های بی‌دریغ استاد بزرگوارم بود و در ادامه راه نیز هیچ گاه از همراهی و همگامی استاد ارجمندم بی نیاز نخواهم بود.

همچنین از نماینده تحصیلات تکمیلی آقای دکتر اسماعیل انصاری و داوران این پایان‌نامه آقایان دکتر داود احمدی دستجردی و دکتر بهزاد نجفی تشکر نمایم که با راهنمایی‌های خود مرا در تصحیح این پایان‌نامه یاری نمودند.

فهرست مندرجات

چکیده

طبقه بندی متر های فینسلری تخت تصویری
آمنه سمیعی پاقلعه

متریک‌های فینسلری که ژئودزیک‌های آن ها روی یک زیر مجموعه ی باز در R^n خطوط راست باشند، متریک های فینسلری تصویری نامیده می‌شوند. مشخص است که انحنای پرچمی هر متریک فینسلری تخت تصویری یک تابع اسکالر از بردار های مماسی است (اگر متریک ریمان باشد انحنای پرچمی ثابت است). در این پایان نامه، مسائل روی طبقه بندی متریک های فینسلری تخت تصویری با انحناء ثابت مورد بحث قرار می‌گیرند. تقریب چنین متریک هایی توسط بسط تیلور آن ها بیان می گردد لذا مثال‌های زیادی در نظر گرفته شده، که به عنوان مدل‌هایی در هندسه‌ی فینسلری می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

اگر $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک متریک ریمان و $\beta = b_iy^i$ یک ۱—فرمی باشد، نشان داده شده است که توابع $F = \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)}$ (متریک ماتسوموتو) و $F = \alpha + \epsilon\beta + \beta arctan(\beta/\alpha)$ ، تحت شرایطی متریک فینسلری تخت تصویری با انحناء ثابت می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: متریک ریمان، متریک فینسلری، (α, β) —متریک، متریک های فینسلری تخت تصویری، انحنای پرچمی، متریک ماتسوموتو، متریک آرک تانژانت.

Abstract:

Classification of projectivly flat Finsler metrics

Ameneh Samiei Paghaleh

Finsler metrics on an open subset in R^n with straight geodesics are said to be projective. It is known that the flag curvature of any projective Finsler metric is a scalar function of tangent vectors (the flag curvature must be a constant if it is Riemannian). In this paper, we discuss the classification problem on projective Finsler metrics of constant flag curvature. We express them by a Taylor expansion or an algebraic formula. Many examples constructed in this paper can be used as models in Finsler geometry.

If $\alpha = \sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ is a Riemannian metric and $\beta = b_iy^i$ is a 1-form, it showed that under the conditions, the functions $F = \frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)}$ and $F = \alpha + \epsilon\beta + \beta arctg(\beta/\alpha)$ are projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature.

Keywords: Riemannian Metric, Finsler Metri, (α, β)-Metric, Projective Flat Finsler Metric , Flag Curvature , Matsumoto Metric , Arctangent Metric.

مقدمه

در اوایل قرن ۲۰ بروالد متریک‌های فینسلری تصویری از انحنای پرچمی ثابت بخصوص حالت انحنای پرچمی صفر را مورد مطالعه قرار داد ([۳] و [۲]). بروالد نشان داد که متریک هیلبرت روی دامنه‌های قویا محدب در R^n دارای انحنای پرچمی $K = -1$ است. فانک همه‌ی متریک‌های فینسلری تصویری با انحنای پرچمی ثابت روی دامنه‌های محدب در R^2 را طبقه بندی کرد. بعد از آن فانک سعی کرد یکتائی متریک‌های فینسلری تخت تصویری با $K = 1$ روی S^2 را نشان دهد[۹] و [۱۰]. در ۱۹۹۵ برایانت نشان داد که دقیقا یک خانواده ۲ پارامتری از متریک‌های فینسلری تخت تصویری روی S^2 با $K = 1$ وجود دارد [٦] و [۷]. او همچنان نشان داد که چطور متریک های فینسلری تصویری موضعی با انحنای پرچمی ثابت ۱ یعنی $K = 1$ را بسازد و نشان داد که فقط متریک های فینسلری معکوس پذیر با $K = 1$ روی S^2 متریک ریمان استاندارد می‌باشند.

مسئله‌ی چهارم هیلبرت در حالت هموار معادل با مشخص نمودن متریک‌های فینسلری روی یک زیر مجموعه‌ی باز در R^n است که ژئودزیک‌های آنها خطوط مستقیم باشند. چنین متریک‌هایی، متریک‌های فینسلری تصویری نامیده می‌شوند. در این پایان نامه به دسته بندی مسائل روی متریک‌های فینسلری تخت تصویری با انحناء ثابت می‌پردازیم.

اکنون به شرح مختصری از مطالب پایان نامه می پردازیم:

فصل اول: در این فصل به بیان تعاریف متریک فینسلری و متریک ریمان و (α,β) — متریک می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز می‌باشند.

فصل دوم: دراین فصل ابتدا به بیان تعاریف الصاق ، الصاق بروالد، اسپری، انحنای پرچمی و E — انحناء می‌پردازیم سپس متریک‌های فینسلری تخت تصویری را با بسط تیلور یا فرمول‌های جبری بیان نموده و مثال‌های زیادی که به عنوان نمونه‌هایی در هندسه‌ی فینسلری می‌تواند مورد استفاده قرار گیرند را می‌سازیم.

فصل سوم: در این فصل با استفاده از تعریف (α,β) — متریک به بیان شرایطی می‌پردازیم که متریک ماتسوموتو و تقریب وابسته به آن و متریک آرک تانژانت و چند جمله‌ای تحت آن شرایط به طور موضعی تخت تصویری می‌شوند و همچنین انحنای پرچمی متریک آرک تانژانت و چند جمله‌ای

را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این پایان نامه از مقالات زیر برگرفته شده است:

1-Zhongmin Shen , Projectively flat Finsler metrics of constant flag curvature. Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 4, 1713–1728.

2-Li Benling , Projectively flat Matsumoto metric and its approximation. Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed. 27 (2007), no. 4, 781–789.

3-YU Yao-yong , Projectively flat arctangent Finsler metric, Yu / J Zhejiang Univ Science A 2006 7(12):2097-2103.

فصل ۱

تعریف ها و مفاهیم اولیّه‌ی هندسه‌ی فینسلری

۱.۱ ساختارهای فینسلری

فرض کنید M یک منیفلد هموار n− بعدی و برای هر $x \in M$، $TM := \bigcup_{x\in M} T_xM$ کلاف مماس روی M با تابع تصویر طبیعی $\pi : TM \longrightarrow M$ باشد. هر عضو از TM بصورت (x, y) می‌باشد که در آن $x \in M$ و $y \in T_xM$ است. همچنین فرض کنید $TM\backslash \circ = TM - \{\circ\}$.

۱.۱.۱ تعریف (ساختار فینسلری). یک ساختار فینسلری روی M یک تابع $F : TM \longrightarrow [\circ, \infty)$ با خواص زیر است:

۱) F روی $TM\backslash\circ$ هموار(C^∞) باشد،

۲) به ازای هر $\lambda > \circ$، $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$،

۳) ماتریس $n \times n$

$$(g_{ij}) := ([\frac{۱}{۲}F^{۲}]_{y^iy^j})$$

در هر نقطه از $TM\backslash\circ$ مثبت معین باشد [۴].

ملاحظه. در بعضی حالات F در شرط $F(x,-y)=F(x,y)$ صدق می‌کند. در این حالت همگنی مطلق را داریم، یعنی برای هر $\lambda \in \mathbb{R}^n$، $F(x,\lambda y)=|\lambda|F(x,y)$.

فرض کنید $(x^1,\cdots,x^n)=(x^i): U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک دستگاه مختصات موضعی روی یک زیرمجموعه‌ی باز $U \subset M$ باشد. در این حالت برای $i=1,...,n$، $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ و $\{dx^i\}$ به ترتیب پایه‌های T_xM و T_x^*M می باشند. اگر $(x^1,\cdots,x^n)$ یک دستگاه مختصات موضعی باشد $(x^1,\cdots,x^n,y^1,\cdots,y^n)$ را نمایش مختصات موضعی روی $\pi^{-1}(U) \subset TM$ در نظر می گیریم. بنابراین برای هر $y \in T_xM$ داریم

$$y=y^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

از نمادهای $F_{y^i},F_{y^iy^j},\cdots$ و $F_{x^i},F_{x^ix^j},\cdots$ برای مشتقات جزئی استفاده می‌کنیم.

۱.۱.۲ تعریف (منیفلد ریمانی). فرض کنید M یک منیفلد n- بعدی هموار باشد. یک متریک ریمانی هموار g روی M یک خانواده‌ی $\{g_x\}_{x\in M}$ ازضربهای داخلی روی فضای T_xM است بطوریکه توابع $g_{ij}(x):=g_x(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$ هموار باشند. چون هر g_x یک ضرب داخلی است، ماتریس (g_{ij}) در هر $x\in M$ مثبت معین است. می‌توانیم بنویسیم

$$g=g_{ij}(x)dx^i\otimes dx^j.$$

این متریک g یک ساختار فینسلری متقارن F روی TM بوسیله‌ی رابطه‌ی زیر تعریف می‌کند

$$F(x,y):=\sqrt{g_x(y,y)}.$$

بنابراین هر منیفلد ریمانی (M,g) یک منیفلد فینسلری است[۲۱].

۲.۱ متریک از نوع (α,β)

۱.۲.۱ تعریف متریک (α,β). (α,β)– متریک به صورت $F=\alpha\phi(s)$ $s=\frac{\beta}{\alpha}$ بیان می‌شود به طوریکه $\alpha=\sqrt{a_{ij}y^iy^j}$ یک متریک ریمان و $\beta=b_iy^i$ یک ۱– فرمی و $\phi=\phi(s)$ یک تابع C^∞ مثبت روی بازه‌ی باز $(-b_0,b_0)$ است، که در رابطه‌ی

$$\phi(s)-s\phi'(s)+(b^2-s^2)\phi''(s)>0,\quad |s|\leq b<b_0.$$

صدق می‌کند[۸].

لم ۱.۱ یک (α,β)—متریک، یک متریک فینسلری است اگر و فقط اگر برای هر $x \in M$، $||\beta_x||_\alpha < b_\circ$ [۸].

فصل ۲

متریک های فینسلری تخت تصویری

۱.۲ مقدمه

مسئله‌ی چهارم هیلبرت معادل با مشخص نمودن رفتار توابع فاصله روی یک زیر مجموعه‌ی باز در R^n می‌باشد که در آن خطوط مستقیم کوتاهترین مسیر هستند [۱۳]. توابع فاصله‌ای که بوسیله‌ی متریک‌های فینسلری القاء می‌شوند به عنوان یک جواب هموار مورد توجه قرار دارند. مسئله‌ی هیلبرت در حالت هموار بررسی متریک‌های فینسلری روی یک زیر مجموعه‌ی باز در R^n است که ژئودزیک‌های آنها خطوط مستقیم باشند چنین متریک‌های فینسلری، متریک‌های فینسلری تصویری نامیده می‌شوند.

در هندسه‌ی فینسلری انحنای پرچمی $K(p, y)$ مانند انحنای مقطعی در هندسه‌ی ریمانی است. مشخص است هر متریک فینسلری تصویری از انحنای اسکالر است یعنی $K(p, y) = K(y)$، انحنای پرچمی یک تابع اسکالری از بردار مماسی y است.

در اوایل قرن ۲۰ بروالد متریک‌های فینسلری تصویری از انحنای پرچمی ثابت بخصوص حالت انحنای پرچمی صفر را مورد مطالعه قرار داد ([۳] و [۲]). بروالد نشان داد که متریک هیلبرت روی دامنه‌های قویا محدب در R^n انحنای پرچمی $K = -1$ دارد. فانک همه‌ی متریک‌های فینسلری تصویری با انحنای پرچمی ثابت روی دامنه‌های محدب در R^2 را طبقه بندی کرد. بعد از آن فانک سعی کرد یکتائی متریک‌های فینسلری تخت تصویری با $K = 1$ روی S^2 را نشان دهد[۹] و

[۱۰]. با شرایط اضافی او نشان داد که متریک ریمانی استاندارد یک چنین متریکی است. در ۱۹۹۵ برایانت نشان داد که دقیقا یک خانواده ۲ پارامتری از متریک‌های فینسلری تخت تصویری روی S^2 با $K = 1$ وجود دارد [۶] و [۷]. یک متریک فینسلری تخت تصویری $F(x,y)$ روی یک زیر مجموعه‌ی $U \subset R^n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید:

$$P(x,y) := \frac{F_{x_k}(x,y)y^k}{2F(x,y)},$$

و ژئودزیک‌های $C(t) = (x^i(t))$ از متریک $F(x,y)$ بوسیله‌ی $\frac{d^2x^i}{dt^2} + 2P(x, \frac{dx}{dt})\frac{dx^i}{dt} = 0$ توصیف می‌شوند لم (۲.۲) را ببینید. $P(x,y)$ را عامل تصویری $F(x,y)$ می‌نامند. در این فصل از پایان نامه یک رابطه‌ی کلی برای متریک‌های فینسلری تخت تصویری $x-$ تحلیلی از انحنای پرچمی ثابت می‌دهیم. هدف این است که $F(x,y)$ و $P(x,y)$ را بر حسب $F(0,y) = \psi(y)$ و $P(x,y) = \phi(y)$ بیان کنیم. تعریف‌ها وقضایایی که از ذکر مرجع خودداری شده بر مبنای مرجع [۲۱] ارائه گردیده است.

۲.۲ انحنای ریمان و $E-$ انحنا

تعریف ۱.۲ $F(x,y)$ را در $x = 0$، $x-$ تحلیلی گویند هر گاه، یک عدد کوچک $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد چنانچه برای هر $y \neq 0$،$F(x,y)$ بتواند به صورت یک سری توانی $\sum a_{i_1\cdots i_k}(y)x^{i_1}\cdots x^{i_k}$ در x بیان شود. برای یک متریک فینسلری تصویری $F(x,y)$ در $x = 0$ عامل تصویری $P(x,y)$ نیز در $x = 0$، $x-$ تحلیلی است.

تعریف ۲.۲ یک نرم مینکوفسکی $\psi(y)$ روی فضای برداری V یک تابع C^∞ روی $V - \{0\}$ با خواص زیر است

۱) $\psi(y) \geq 0$ و $\psi(y) = 0$ اگر و فقط اگر $y = 0$ ،

۲) $\psi(y)$ یک تابع همگن مثبت از درجه یک است یعنی برای $t \geq 0$ ، $\psi(ty) = t\psi(y)$ ،

۳) $\psi(y)$ قویا محدب است یعنی برای هر $y \neq 0$ ماتریس $g_{ij}(y) := \frac{1}{2}[\psi^2]_{y^iy^j}$ مثبت معین است

[۲۱] و [۴].

یک متریک فینسلری F روی منیفلد M یک تابع C^∞ روی $TM-\{0\}$ است چنانچه $F_p := F|_{T_pM}$ برای هر $p \in M$ یک نرم مینکوفسکی روی T_pM است. فرض کنید F یک متریک فینسلری روی منیفلد n بعدی M باشد برای هر بردار $y \neq 0$، که $y \in T_pM$، F یک ضرب داخلی g_y روی T_pM به صورت زیر القاء می‌کند

$$g_y(U,V) = g_{ij}(x,y)U^iV^j = \frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}(x,y)U^iV^j,$$

اینجا $x=(x^i)$ مختصات $p \in M$ و $(x,y)=(x^i,y^i)$ مختصات $y \in T_PM$ را نشان می‌دهد.

تعریف ۳.۲ فرض کنید M یک منیفلد باشد یک اسپری روی M یک میدان برداری G روی $TM-\{0\}$ است که در مختصات موضعی (x^i,y^i) در TM، به صورت زیر بیان می‌شود

$$G = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(x,y)\frac{\partial}{\partial y^i},$$

به طوریکه $G^i(y)$ توابع موضعی روی TM هستند و در رابطه‌ی $G^i(x,\lambda y)=\lambda^2G^i(x,y)$ به ازای هر $\lambda > 0$ صدق می‌کند. یک منیفلد با یک اسپری فضای اسپری نامیده می‌شود.

اگر $\hat{c}$ یک منحنی انتگرال از G باشد، یعنی

$$\frac{d\hat{c}}{dt} = G_{\hat{c}},$$

بنابراین تابع تصویر $c=\pi o\hat{c}$، در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\frac{d^2c^i}{dt^2} + 2G^i(\frac{dc^i}{dt}) = 0,$$

که $G^i := \frac{1}{2}g^{il}\left[(F^2)_{x^ky^l}y^k - (F^2)_{x^l}\right]$ و $[g^{il}]$ معکوس $[g_{il}]$ می باشد. G^i ضرایب اسپری $F(x,y)$ نامیده می‌شوند [۲۱] و [۱۷].

تعریف ۴.۲ $F(x,y)$ کاملا مثبت گفته می‌شود اگر اسپری نظیر آن کاملا مثبت باشد . یک اسپری G کاملا مثبت است اگر هر ژئودزیک تعریف شده روی $[0,a)$ را بتوان به یک ژئودزیک روی $[0,+\infty)$ توسعه داد و یک اسپری G کاملا منفی است اگر هر ژئودزیک تعریف شده روی $(-a,0]$ را بتوان به یک ژئودزیک روی $(-\infty,0]$ توسعه داد و اسپری G کامل است اگر کاملا مثبت و کاملا منفی باشد[?].

تعریف ۵.۲ یک الصاق ∇ روی منیفلد M، یک خانواده از نگاشت‌ها $\nabla := \{\nabla^y : T_xM \times C^\infty(TM) \longrightarrow T_xM, y \in T_xM - \{0\}, x \in M\}$ می‌باشد که دارای خواص زیر است

۱) $\nabla^{\lambda y}_u V = \lambda \nabla^y_u V$،

۲) $\nabla^y_u(fV) = u(f)V + f\nabla^y_u V$،

۳) $\nabla^y_u(U+V) = \nabla^y_u(U) + \nabla^y_u V$،

۴) $\nabla^y_{fu}(V) = f\nabla^y_u V$،

۵) $\nabla^y_{u+v} V = \nabla^y_u V + \nabla^y_v V$،

٦) $\nabla^Y_U V - \nabla^Y_V U = [U, V]$،

به طوریکه $\lambda > 0$ و $u, v \in T_xM$ و $Y, U, V \in C^\infty(TM)$، [۲۱].

فرض کنید که ∇ یک الصاق روی منیفلد M باشد، در دستگاه مختصات موضعی (x^i, y^i) در TM، مجموعه توابع موضعی Γ^i_{jk} روی TM به صورت زیر تعریف می‌شوند $\Gamma^i_{jk}(y)\frac{\partial}{\partial x^i}|_x = \nabla^y_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad y \in T_xM$. چون $[\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}] = 0$ بنا بر قسمت ٦ در تعریف الصاق همواره داریم $\Gamma^i_{jk}(y) = \Gamma^i_{kj}(y)$.

بنا بر تعریف تاب ،در این حالت ∇ دارای تاب صفر است. برای هر $u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i}$، $\nabla^y_u V$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$\nabla^y_u V = \{u(V^i)(x) + V^j(x)\Gamma^i_{jk}(y)u^k\}\frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

تعریف ٦.۲ هر گاه Γ^i_{jk} که $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij}(y)\frac{\partial}{\partial x^k}$ توابع موضعی و ∇^y الصاق روی منیفلد M مستقل از $y \in TM - \{0\}$ باشد ∇الصاق آفین نامیده می‌شود [۲۱].

برای هر اسپری یک الصاق استاندارد وجود دارد. فرض کنید $G = y^i\frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i(y)\frac{\partial}{\partial y^i}$ یک اسپری بر منیفلد M باشد، نمادهای کریستوفل مربوط به G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma^i_{jk}(y) := \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k},$$

که Γ^i_{jk} توابع موضعی روی $TM - \{0\}$ می‌باشند.

تعریف ۷.۲ برای هر $y \in TM - \{0\}$ نگاشت $\nabla^y : T_xM \times C^\infty(TM) \longrightarrow T_xM$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\nabla^y_u V := \{u(V^i)(x) + V^j(x)\Gamma^i_{jk}(y)u^k\}\frac{\partial}{\partial x^i}|_x,$$

که در آن $u = u^i\frac{\partial}{\partial x^i}|_x \in T_xM$ و $V = V^i\frac{\partial}{\partial x^i} \in C^\infty(TM)$.

$\nabla = \{\nabla^y\}|_{y\in TM-\{0\}}$ یک الصاق روی M می‌باشد که آن را الصاق بروالد مربوط به G می‌نامند [۲۱].

الصاق بروالد همواره بدون تاب است، زیرا

$$\Gamma^i_{jk}(y) := \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^k \partial y^j} = \Gamma^i_{kj}(y),$$

تعریف ۸.۲ تابع $R_y : T_pM \longrightarrow T_pM$ که

$$R_y(v) = R^i_k(y)v^k\frac{\partial}{\partial x^i}|_p, \qquad v = v^k\frac{\partial}{\partial x^k}|_p,$$

را در نظر بگیرید. R_y یک نگاشت خطی روی فضای مماسی می‌باشد که در آن

$$R^i_k = 2\frac{\partial G^i}{\partial x^k} - y^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} + 2G^j\frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j}\frac{\partial G^j}{\partial y^k}. \qquad (1.2)$$

R_y تانسور انحناء اسپری G نامیده می‌شود[۲۱].

اگر ∇ الصاق خطی وابسته به اسپری G باشد، نشان می‌دهیم که تساوی بالا برای ضرایب تانسور انحنا برقرار است

$$R^i_{jkl} = R(\partial_k, \partial_l)\partial_i = \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\partial_i - \nabla_{\partial_l}\nabla_{\partial_k}\partial_i,$$

که در اینجا $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ و $t \longleftrightarrow q$ به این معنی است که q به t و t به q تبدیل شود

$$\nabla_{\partial_l}\partial_i = \Gamma^t_{li}\partial_t \ , \quad \nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\partial_i = \chi(\Gamma^t_{li})\frac{\partial}{\partial x^t} + \Gamma^t_{li}\nabla_{\partial_k}\partial_t$$

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\partial_i &= \frac{\partial}{\partial x^k}(\Gamma^t_{li})\frac{\partial}{\partial x^t} + \Gamma^t_{li}(\Gamma^q_{tk})\frac{\partial}{\partial x^q}\ , \quad q \longleftrightarrow t\\ &= \frac{\Gamma^t_{li}}{\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^t} + \Gamma^q_{li}(\Gamma^t_{qk})\frac{\partial}{\partial x^t}\\ &= \Big(\frac{\Gamma^t_{li}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{li}(\Gamma^t_{qk})\Big)\frac{\partial}{\partial x^t},\end{aligned}$$

و به همین ترتیب می‌توان نشان داد که

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_l}\nabla_{\partial_k}\partial_i &= \frac{\partial}{\partial x^l}\Gamma^s_{ik}\frac{\partial}{\partial x^s} + \Gamma^s_{ik}\nabla_{\partial_l}\partial_s\\ &= \Big(\frac{\partial\Gamma^t_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^u_{ik}\Gamma^t_{ul}\Big)\frac{\partial}{\partial x^t},\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned}\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_l}\partial_i - \nabla_{\partial_l}\nabla_{\partial_k}\partial_i &= \Big(\frac{\partial\Gamma^t_{li}}{\partial x^k} + \Gamma^q_{li}\Gamma^t_{qk} - \frac{\partial\Gamma^t_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^u_{ik}(\Gamma^t_{ul})\Big)\frac{\partial}{\partial x^t}\\ &= \Big(\frac{\partial\Gamma^t_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^t_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^q_{li}\Gamma^t_{qk} - \Gamma^u_{ik}\Gamma^t_{ul}\Big)\frac{\partial}{\partial x^t}\\ &= \Big(\frac{\partial\Gamma^j_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^j_{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^j_{sk}\Gamma^s_{li} - \Gamma^j_{ls}\Gamma^s_{ik}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}\ , \quad i \longleftrightarrow j\\ &= \Big(\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^j_{sk}\Gamma^s_{li} - \Gamma^j_{ls}\Gamma^s_{ik}\Big)\frac{\partial}{\partial x^j}.\end{aligned}$$

تعریف ۹.۲ فرض کنیم $F(x,y)$ یک متریک فینسلری بر منیفلد n- بعدی M باشد تعریف می‌کنیم

$$K(P,y) := \frac{g_y(u,R_y(u))}{g_y(y,y)g_y(u,u)-g_y(y,u)^2}, \qquad (۲.۲)$$

$K(P,\mathrm{y})$ را انحنای پرچمی مربوط به پرچم (P,y) می‌نامندکه در اینجا P مماس بر رویه مورد نظر است [۲۱].

لم ۱.۲ $K(P,y)$ مستقل از انتخاب $u \in P$ می‌باشد به طوریکه $P = \mathrm{span}\{y,u\}$ [۲۱].

توضیح: وقتی $F(x,y)$ ریمان است: $K(P,y) = K(P)$ ، $K(P)$ مستقل از $y \in P$ است و این دقیقا همان انحنای برشی در هندسه‌ی ریمانی می‌باشد[۲۱].

تعریف ۱۰.۲ گوئیم $F(x,y)$ دارای انحنای اسکالر $K(y)$ است هر گاه برای هر $x \in M$ و هر $y \in T_xM - \{0\}$ ، $K(P,y)$ مستقل از تمام صفحات P شامل y باشد یعنی $K(P,y) = K(y)$ که در آن $K : TM \longrightarrow R$ هر گاه تابع اسکالر فوق تابع ثابت باشد گوئیم دارای انحنای ثابت است به عبارتی $K(P,y) = K(y) = \lambda$، [۲۱] .

هر گاه $F(x,y)$ دارای انحنای اسکالر باشد انحنای ریمان آن در دستگاه مختصات موضعی به صورت زیر می‌باشد:

$$R^i{}_k = \lambda\, F^2 \Big\{\delta^i_k - F^{-1} F_{y^k} y^i\Big\},$$

چندین کمیت غیرریمانی در هندسه‌ی فینسلری وجود دارد ، یکی از مهمترین کمیّت‌های غیرریمانی انحنای E است.

تعریف ۱۱.۲ تابع $E_y : T_pM \otimes T_pM \longrightarrow R$ تعریف شده بوسیله‌ی

$$E_y := E_{jk}(y) u^j v^k, \quad E_{ij} := \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^i \partial y^j}\Big[\frac{\partial G^m}{\partial y^m}\Big] \tag{۳.۲}$$

به طوریکه ، $u = u^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_x$ و $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}|_x$ انحنای بروالد میانگین [1] یا E–انحناء نامیده می‌شود [۲۱].

انحنای E با انحنای پرچمی رابطه‌ی تنگاتنگ دارد. برای سطح‌های ۲ – بعدی $P \subset T_pM$ و بردار مخالف صفر $y \in T_pM$ انحنای پرچمی $E(P,y)$ به صورت زیر بیان می‌شود

$$E(P,y) := \frac{F^3(y) E_y(u,u)}{g_y(y,y) g_y(u,u) - g_y(y,u)^2}, \tag{۴.۲}$$

به طوریکه $P = \mathrm{span}\{y,u\}$ [۲۱].

می گوییم که تابع $F(x,y)$ دارای انحنای پرچمی ثابت E است اگر برای هر پرچم (P,y)،

$$E = (n+1)c,$$

رابطه‌ی قبل هم‌ارز است با :

$$E_{ij} = (n+1) c F_{y^i y^j}.$$

متریک فانک روی دامنه‌های قویا محدب دارای $K = \frac{-1}{4}$ و $E = \frac{(n+1)}{4}$ است، مثال (۵.۳) را ببینید. منیفلدهای فینسلری زیادی از انحنای پرچمی ثابت و انحنای E ثابت وجود دارند.

[1] Mean Berwald Curvature