بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده‌ی علوم پایه

حل عددی معادلات دیفرانسیل با استفاده از روش گالرکین– موجک

نگارش

عطا دژبرد

استاد راهنما: دکتر حمید صفدری

استاد مشاور: دکتر حمید مسگرانی

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

در رشته‌ی ریاضی کاربردی

مهر ماه ۱۳۹۱

باسمه‌تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

تعهدنامه‌ی اصالت اثر

اینجانب عطا دژبرد متعهد می‌شوم که مطالب مندرج در این پایان‌نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است، مطابق مقررات ارجاع و در فهرست منابع و مأخذ ذکر گردیده است. این پایان‌نامه قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است. در صورت اثبات تخلف(در هر زمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد.

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی می‌باشد.

نام و نام خانوادگی دانشجو: عطا دژبرد

امضاء

تهران- لویزان- کدپستی ۱۶۷۸۸- صندوق پستی ۱۶۳- ۱۶۷۸۵ تلفن ۹-۲۲۹۷۰۰۶۰(داخلی ۲۳۴۷) نمابر ۲۲۹۷۰۰۱ پست الکترونیکی sru@sru.ac.i

تقدیم به

پدرم به استواری کوه

مادرم به زلالی چشمه

همسرم به صمیمیت باران

دخترم به طراوت شبنم

قدردانی و تشکر

بنام خداوندکزین برتراندیشه برنگذرد

حمد و سپاس خدای را عز و جل که به انسان استعداد و فکرت آموخت تا حقایق جهان هستی را کاوش و کشف نماید و از این حقایق درجهت حل مشکلات جامعه بهره گیرد.

ضروری است که مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به همه عزیزان و بزرگوارانی که درتکمیل این پایان نامه مرا یاری داده اند ابراز نمایم.بدینوسیله از زحمات اساتید محترم راهنما و مشاور، جناب آقایان دکترحمید صفدری و دکترحمید مسگرانی تشکر و قدردانی می نمایم.این عزیزان نه تنها مرا در مسیر پایان نامه راهنمایی و هدایت نمودند، بلکه بعنوان الگویی برای اینجانب در تفکر علمی و رفتار حرفه ای قرار گرفتند. همچنین از جناب آقای دکتر رضا ملاپور که در تهیه این رساله همواره از محبت های بی دریغشان بهرمند شدم، سپاسگزارم.

چکیده:

مزیت های روش گالرکین- موجک نسبت به روش تفاضلات یا عناصر متناهی به استفاده خیلی‌زیاد آن در علوم و مهندسی، پزشکی،... منجر شده است. در سالهای اخیر تلاش زیادی برای پیداکردن جواب معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک شد. در این پایان‌نامه با بکارگیری رویه‌ی گالرکین و استفاده از موجک ها به عنوان پایه، به حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی پرداخته شده است.

کلید واژه: روش گالرکین- موجک، عدد وضعیت، ضرایب همبندی، ممان ها، معادلات دیفرانسیل معمولی.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول

(مقدمه و مروری برآنالیزحقیقی و تابعی)

فصل دوم

(معرفی موجک ها)

فهرست مطالب

فصل سوم

(محاسبه $\varphi, \psi, \Omega_{d1,d2}^{k1,k2}$)

فصل چهارم

(محاسبه عددی معادلات دیفرانسیل معمولی با استفاده از روش گالرکین – موجک)

فصل پنجم

(مثال های عددی)

فهرست مطالب

فصل ششم

(حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی درفضای دو بعدی)

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فهرست نمودارها

فهرست شکل‌ها

عنوان **صفحه**

فهرست علائم و اختصارات

$A \quad B \quad C$	ماتریس
a_k	ضرایب φ
b_k	ضرایب ψ
$c_{j,l}$	ضرایب تابع مقیاس
D	عدد موجک
$d_{j,k}$	ضرایب موجک
$I_{j,k}$	محمل $\varphi_{j,k}$ و $\psi_{j,k}$
M_k^p	pامین ممان $\varphi(x-k)$
$\mathbb{N}$	مجموعه اعداد طبیعی
P	مرتبه ممان $p=\frac{D}{2}$
$P_{v_j}f$	تصویر متعامد f در فضای V_j
$P_{w_j}f$	تصویر متعامد f در فضای W_j
$\mathbb{R}$	مجموعه اعداد حقیقی
V_j	j امین زیر فضا
W_j	فضای مکمل متعامد فضای V_j
$\mathbb{Z}$	مجموعه اعداد صحیح
$\varphi(x)$	پایه تابع مقیاس
$\psi(x)$	پایه موجک

فهرست پیوست

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه و مروری بر آنالیز حقیقی و تابعی

مقدمه:

گاهی در رشته‌های مختلف علوم، مهندسی، پزشکی، اقتصاد و... ضرورت پیدا می‌کند که برای بیان مسئله‌ی معینی مدل ریاضی ساخته شود. اغلب این مدل‌های ریاضی معادلاتی شامل یک تابع مجهول و مشتقات تابع نسبت به متغیرهای مستقل هستند. چنین معادلاتی را معادلات دیفرانسیل می‌نامند.اگر در یک معادله دیفرانسیل، تابع مجهول، تابعی فقط از یک متغیر مستقل باشد، آن را یک معادله دیفرانسیل معمولی و اگر تابع مجهول تابعی از چند متغیر مستقل باشد آن را یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی می‌نامیم.پیداکردن جواب تحلیلی معادلات دیفرانسیل همیشه ممکن نیست اگر مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل بالا باشد کار برای پیداکردن جواب تحلیلی سخت می‌شود. پس باید به دنبال روشی بود که بتوان جواب معادلات دیفرانسیل را با آن تقریب زد. روش‌هایی که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل به‌کار می‌روند می‌توان به روش تیراندازی خطی، تفاضل متناهی، ریلی– ریتس و در ابعاد بالاتر روش عناصر متناهی اشاره داشت. در این رساله از روش گالرکین برای تقریب جواب مسائل مقدار مرزی استفاده شده است. که به نوعی از روش عناصر متناهی گرفته شده است. ایده‌ی اصلی این روش جستجوی جواب در فضای متناهی به‌جای کل فضا است. با انتخاب پایه‌ای متناهی برای زیر فضای متناهی تعیین شده، می‌توان جواب مسئله را برحسب این پایه‌ها تقریب زد.در سال‌های اخیر موجک‌ها به خاطر پایایی و مؤثر بودن بیشترین اهمیت را پیداکرده‌اند. در این رساله موجک‌ها برای بسط جواب مسئله‌ی مقدار مرزی به کار خواهد رفت. موجک‌ها توابع پایه-ای‌اند که دارای خواص ویژه‌ای هستند و بسط توابع مختلف به وسیله‌ی جملات این توابع پایه نشان داده می‌شوند. [۱,۲,۳,۴]موجک‌های بسیاری با ویژگی‌های متفاوت وجود دارند برای مثال، موجک‌های هار، موجک‌های متعامد و دابیشز با محمل فشرده و موجک‌های میر[۳,۵,۶] موجک‌های دابیشز از بیشترین اهلیت برخوردار هستند آنها دارای محمل فشرده روی بازه‌ی [o, D-1] هستند که پارامتر D عدد موجک یا عدد دابیشز نامیده می‌شود.

در این رساله دراین فصل مروری بر آنالیز تابعی و حقیقی انجام خواهد گرفت در فصل دوم به معرفی مختصری از موجک‌ها خواهیم پرداخت در فصل سوم روش محاسبه‌ی مقدار تابع مقیاس، تابع موجک و ضرایب همبندی آمده است. در فصل چهارم به معرفی روش گالرکین و محاسبه‌ی معادلات دیفرانسیل درجه دوم با شرایط مرزی به روش گالرکین موجک خواهیم پرداخت. در فصل پنجم مثال‌های عددی مطرح خواهد شد و در نهایت در فصل ششم به عنوان تحقیق بیشتر به حل عددی معادلات مشتقات جزیی به روش گالرکین موجک خواهیم پرداخت.

(۱ـ۱) فضای توابع انتگرال‌پذیر

تعریف: تابع f مطلقا انتگرال‌پذیر است اگر $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|\,dt < \infty$.

فضای توابع انتگرال‌پذیر با $L^1(\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود.

(۱ـ۲) فضای نرم‌دار:

از نرم‌ها برای تعیین بزرگی یا اندازه‌ی بردارها و ماتریس‌ها استفاده می‌شود. این نرم‌ها به ترتیب به صورت‌های $\|x\|$ و $\|A\|$ نوشته می‌شوند.

(۱-۲-۱) نرم‌های بردار

تعریف: تابع $\|.\|: \mathfrak{R}^n \to \mathfrak{R}$ نرم نامیده می‌شود، هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

$\|x\| \geq o \quad \forall x \quad , \quad \|x\| = o \Leftrightarrow x = o$

$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

که α یک اسکالر است.

تعریف: فضای خطی X مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای نرم‌دار خطی می‌نامند.

قرارداد: L_∞ـ نرم چنین تعریف می‌شود: $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$

(۱-۲-۲)نرم‌های ماتریس

تعریف: فرض کنید M فضای برداری همه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ باشد. تابع $\|.\|: M \to \mathfrak{R}$ را نرم ـ ماتریس می‌نامند هرگاه در شرایط زیر صدق کند.

$\|A\| \geq o \quad \forall A \quad , \quad \|A\| = o \Leftrightarrow A = o$

$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$

مثال: هر یک از توابع زیر نرم ـ ماتریس هستند:

(الف) ـ فروبنیوس ـ نرم

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

(ب) ـ L_1 ـ نرم، یا ماکزیمم مجموع درایه‌های ستون‌ها

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

(پ) ـ L_2 ـ نرم

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^TA)}$$

که $\rho(A^TA)$ شعاع طیفی ماتریس A^TA است. یادآور می‌شویم که شعاع طیفی ماتریس مربعی B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho(B) = \max_i |\lambda_i|$$

و λ_i ، $i = 1,2,\dots,n$ مقادیر ویژه‌ی B هستند.

(ت) ـ L_∞ـ نرم، یا ماکزیمم مجموع درایه‌های سطرها

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right|$$

(۱-۲-۳) نرم‌های سازگار

از آنجایی که بردارها و ماتریس‌ها با هم در ارتباط هستند، می‌خواهیم بین نرم‌های آنها نیز رابطه‌ای برقرار کنیم.

تعریف: گفته می‌شود که یک نرم ماتریس $\|A\|$ با یک نرم بردار $\|x\|$ سازگار است هرگاه

$$\|Ax\| \le \|A\|\|x\| \qquad (1-1)$$

اکنون با توجه به (۱-۱)، متناظر با هر نرم ـ بردار مفروض، یک نرم ـ ماتریس سازگار با آن به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|A\| = sup_{x\neq o}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \qquad (2-1)$$

نرم ماتریس تعریف شده با (۱-۲) نرم طبیعی یا نرم ماتریس وابسته به نرم بردار نامیده می‌شود. این نرم را نرم القایی نیز می‌نامند. واضح است که از (۱-۲)، رابطه‌ی (۱-۱) نتیجه می‌شود.

اگر قرار دهیم $z = \frac{x}{\|x\|}$ ، آنگاه برای $x \neq o$ داریم $\|z\| = 1$ و $\|Az\| = \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. پس (۱-۲) معادل است با

$$\|A\| = sup_{\|z\|=1}\|Az\| \qquad (3-1)$$

از آنجایی که مجموعه‌ی $\{z: \|z\| = 1\}$ بسته و کراندار است و $\|Az\|$ تابعی است پیوسته، پس (۱-۳) معادل با

$$\|A\| = max_{\|z\|=1}\|Az\| \qquad (4-1)$$

است . بنابراین از (۱-۴) به عنوان تعریف نرم طبیعی استفاده خواهیم نمود.

قضیه: $\|A\|$ تعریف شده با (۱-۴) نرم ماتریس است.

تعریف: یک فضای خطی همانند X ، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود اگر تابعی حقیقی مانند $\langle \ , \ \rangle$ و بر روی $X \times X$ تعریف شده باشد که در شرایط زیر صدق نماید.

۱) $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

۲) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \quad \langle \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2, g \rangle = \lambda_1 \langle f_1, g \rangle + \lambda_2 \langle f_2, g \rangle$

۳) $\langle f, f \rangle \geq o$

۴) $\langle f, f \rangle = o \Leftrightarrow f = o$

هر فضای ضرب داخلی با نرم $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ یک فضای خطی نرم‌دار است.

تعریف: در فضای ضرب داخلی X، $f, g \in X$ را بر هم عمود می‌نامیم هرگاه $\langle f, g \rangle = o$ و آن را با نماد $f \perp g$ نشان می‌دهیم.

اگر f و g در فضای ضرب داخلی X بر هم عمود باشند آنگاه تساوی $\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ برقرار است.

تعریف: زیر فضای S از فضای ضرب داخلی X را متعامد می‌نامیم اگر $\forall f, g \in S, f \neq g \ \ \langle f, g \rangle = o$ همچنین زیر فضای S از X را متعامد یکه می‌نامیم اگر

$$\forall f, g \in S \ \ \langle f, g \rangle = \begin{cases} o & f \neq g \\ 1 & f = g \end{cases}$$

زیر فضای مکمل متعامد را با $S^{\perp}$ نشان می‌دهیم و شامل همه‌ی عناصری از X است که بر S عمود باشد یعنی:

$S^{\perp} = \{f \in X: f \perp S\}$

تعریف:دنباله $\{f_n\}_{n\in N}$ یک دنباله‌ی کوشی است اگر برای هر $\varepsilon > o$ و n و p به اندازه‌ی کافی بزرگ داشته باشیم:

$\|f_n - f_p\| < \varepsilon$

تعریف: فضای خطی نرم‌دار X را کامل می‌گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن به عضوی از X همگرا باشد.

(۱ـ۳) فضای هیلبرت (H):

تعریف: هر فضای نرم‌دار کامل، فضای باناخ و یک فضای باناخ همراه با ضرب داخلی، یک فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

مثال:$L^2(\mathbb{R})$ که در واقع فضای توابع مربع انتگرال‌پذیر تعریف می‌شود یعنی

$L^2(\mathbb{R}) = \{f | \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\}$

با ضرب داخلی$f, g \in L^2(\mathbb{R})$ $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt$ و نرمی به صورت$\|f\| = (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ یک فضای هیلبرت است. تعریف می‌کنیم:

$L^{\infty}(\mathbb{R}) = \{f | sup_{t\in R}|f(t)| < \infty\}$

(۱ـ۳ـ۱) پایه‌های فضای هیلبرت:

پایه‌ی متعامد یکه: یک خانواده‌ی $\{e_n\}_{n\in N}$ در فضای هیلبرت H متعامد است اگر برای هر $n \neq p$

$\langle e_n, e_p\rangle = o$

اگر برای $f \in H$ یک دنباله‌ی$\lambda[n]$ وجود داشته باشد به طوری که

$\lim_{n\to\infty} \|f - \sum_{n=o}^{N} \lambda[n] e_n\| = o$

آنگاه $\{e_n\}_{n\in N}$ یک پایه‌ی متعامد برای H نامیده می‌شود. از خاصیت متعامد بودن لزوماً $\lambda[n] = \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|e_n\|^2}$

و می‌توانیم بنویسیم: $f = \sum_{n=o}^{+\infty} \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|e_n\|^2} e_n$

تعریف: اگر برای هر $\forall n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $\|e_n\| = 1$ آنگاه پایه‌ی متعامد یکه نامیده می‌شود.