بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضیات کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی بازی ریزش چیپ و ساختار مشبکه آن

نگارش:

سمیرا طارمی

استاد راهنما:

دکتر اردشیر دولتی

استاد مشاور:

دکتر رحیم علیزاده

تیر ۱۳۹۰

تقدیم به

خون پاک شهدا و پدر و مادر عزیزم

که سجده ی ایثارشان گل محبت را در وجودم پروراند و

وجود گهربارشان لحظه های مهربانی را به من آموخت.

تقدیر و تشکر

خدایا

هیچکس در طریق شکر تو به سر منزلی نرسد، مگر آن که احسان دیگری از سوی تو برای او فراهم آید و سپاس دیگری را بر وی لازم گرداند. شکرگزار نعمات خداوند بی‌همتا هستم که رخصت کسب علم و دانش را به من عطا فرموده است.

در ابتدا نهایت تشکر و قدردانی خود را از استاد گرامی جناب آقای دکتر اردشیر دولتی ملک آبادی ابراز می‌نمایم که با راهنمایی‌ها، تلاش‌های بی وقفه و نظرات ارزشمندشان مرا در به ثمر رسیدن این پایان نامه یاری کردند. همچنین از استاد گرامی جناب آقای دکتر رحیم علیزاده به خاطر مشاوره‌هایشان تشکر و قدردانی می‌نمایم.

بر خود لازم می‌دانم از اساتید بزرگوار سرکار خانم دکتر مریم طهماسبی و جناب آقای دکتر محمد علی نصر آزادانی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند نیز تشکر کنم.

با تقدیر و درود فراوان به پدر بزرگوارم و سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و همگامی مادر دلسوز و مهربانم که آرامش روحی و آسایش فکری مرا فراهم نمودند تا با حمایت های همه جانبه در محیطی مطلوب، مراتب تحصیلی و نیز پایان نامه درسی را به نحو احسن به اتمام برسانم.

همچنین از تمامی دوستان و عزیزانی که در طی این مسیر یاری گر و مشوق من بوده اند، نهایت تقدیر و تشکر را داشته و برای تمامی عزیزان آرزوی سربلندی و توفیق روزافزون دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه بازی ریزش چیپ (CFG) را به عنوان یک مدل کلی از مدل‌های پویای گسسته مطالعه می‌کنیم. سپس انواع مختلفی از این بازی را معرفی کرده و گراف‌هایی را که فضای پیکربندی بازی روی آن‌ها تشکیل مشبکه می‌دهند بررسی می‌کنیم. در ادامه نشان می‌دهیم که فضای پیکربندی هر CFG همگرا، یک مشبکه است. همچنین مشبکه‌های القا شده توسط CFG را با مشبکه‌های موضعا توزیعی بالایی(ULD)، توزیعی (D)، مشبکه‌های القا شده توسط ASM و $MCFG$ مقایسه می‌کنیم. سپس بازی ریزش چیپ رنگ شده را به عنوان یک بازی که مشبکه‌های القا شده توسط آن تمام مشبکه‌های ULD را در بر دارند بررسی می‌کنیم. در انتها به مطالعه بازی ریزش چیپ علامت‌دار و حالت خاصی از آن می‌پردازیم. این حالت را بازی ریزش چیپ علامت‌دار تغییر یافته می‌نامیم و ارتباط بین مشبکه آن‌ها را با $L(CFG)$ مقایسه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مشبکه، بازی ریزش چیپ (CFG)، بازی ریزش چیپ جهش یافته ($MCFG$)، بازی ریزش چیپ علامت‌دار ($SCFG$)، مدل تپه شنی آبلی (ASM).

پیشگفتار

مطالعه مشبکه‌ها بخش مهمی از نظریه ترتیب است و نتایج بسیاری در مورد آن‌ها وجود دارد. تاکنون کلاس‌های متفاوتی از مشبکه‌ها که در علوم کامپیوتر، ریاضیات، فیزیک و علوم اجتماعی کاربرد دارند، تعریف شده‌اند [۱۳]. شناسایی مشبکه‌ها و انوع آن‌ها و تولید الگوریتمی که مشبکه‌های خاصی را تولید کند اهمیت بسیاری دارد. در این پایان‌نامه به بررسی بازی ریزش چیپ [۱] (CFG) که توسط برنر [۲]، لاواز [۳] و شر [۴] به طور مستقل معرفی شده است [۸، ۹] می‌پردازیم. انواع متفاوتی از بازی‌های ریزش چیپ به نام‌های مدل تپه شنی آبلی [۵] (ASM) و بازی ریزش چیپ جهش یافته [۶] $(MCFG)$ (که در فیزیک [۱، ۱٤]، علوم کامپیوتر [۸، ۹، ۱۸] و علوم اجتماعی [٤، ۵، ۲۱] کاربرد زیادی دارند)، معرفی شده‌اند. هر یک از این بازی‌ها، مشبکه خاص خود را تولید می‌کنند که بررسی این مشبکه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. از طرف دیگر بازی ریزش چیپ، یک حالت کلی از بسیاری از مدل‌های پویای گسسته است. این واقعیت اهمیت مطالعه‌ی این مدل را دو چندان می‌کند، زیرا هر خصوصیت آن با بسیاری از مدل‌های دیگر مشترک بوده و یک درک خوب از CFGها، ما را به درک خوبی از مدل‌های پویای گسسته ارائه شده می‌رساند.

بین مشبکه‌های مربوط به بسیاری از مدل‌های پویای گسسته، بخصوص مدل تپه شنی و بازی ریزش چیپ ارتباط تنگاتنگی وجود دارد. فضای پیکربندی بازی ریزش چیپ ساختار مشبکه دارد

[۱] $Chip\ firing\ game$

[۲] $Bjorner$

[۳] $Lovasz$

[٤] $Shor$

[۵] $Abelian\ sandpile\ model$

[۶] $Mutating\ chip\ firing\ game$

که در بسیاری از شبیه‌سازی‌ها و الگوریتم‌های مرتبط با مشبکه‌ها از آن‌ها استفاده می‌شود [۳]. برای مثال یک الگوریتم کلی وجود دارد که هر مشبکه توزیعی و یک عنصر تصادفی از این مجموعه را با توزیع یکنواخت ارائه می‌دهد [۲۸]. از آنجا که بیشتر مدل‌هایی که ما مطالعه می‌کنیم مدل‌هایی از موضوعات فیزیکی هستند، احتمال نمونه‌گیری پیکربندی با توزیع یکنواخت تعیین کننده است، چرا که مطالعه بی‌نظمی سیستم را ممکن می‌سازد و تصوری از موضوعات مدل‌بندی شده که در طبیعت شبیه‌سازی می‌شوند را ارائه می‌دهد.

از طرف دیگر برخی نتایج مربوط به CFGها در اثبات مشبکه بودن یک مجموعه جزیی مرتب مورد استفاده قرار می‌گیرند. کاربرد جدیدی از این مطلب در زمینه کاشی‌کاری‌ها [۱۰] به کار رفته است و اثبات اصلی روشی است که از نقطه نظر نظریه ترتیب مورد علاقه است.

در این پایان‌نامه قصد داریم به مطالعه چگونگی تولید انوع مشبکه‌های القا شده توسط CFG پرداخته و انواع بازی‌های ریزش چیپ را از این دیدگاه مقایسه کنیم. همچنین به بررسی بازی‌هایی می‌پردازیم که با کمی تغییرات روی CFG به وجود آمده‌اند و مشبکه‌هایشان را مقایسه می‌کنیم، به طوری که در فصل ۶ پایان‌نامه که اختصاص به نتایج بنده دارد به بررسی یکی از این بازی‌ها پرداخته شده است. هدف از این کار ارائه شرایطی است که بتوان توسط آن انواع مشبکه‌هایی را تولید کرد که پیش از این الگوریتمی برای تولید آن‌ها وجود نداشته است. با مقایسه‌ی مشبکه‌های این بازی‌ها به وسعت و نوع تولید مشبکه‌های هر بازی پی‌برده و می‌توان برای تولید مشبکه‌های جدید الگوریتم ارائه داد.

مطالب این پایان‌نامه به صورت زیر دسته بندی شده است:

فصل اول به یادآوری بعضی مفاهیم پایه‌ای درباره مجموعه‌های جزیی مرتب، مشبکه‌ها و نتایج به کار گرفته شده در این پایان‌نامه اختصاص یافته است. در فصل دوم به تعریف بازی ریزش چیپ، انواع متفاوت آن و تعاریف پایه‌ای مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل سوم حالتی از CFG را بررسی می‌کنیم که گراف پشتیبانی آن فاقد مولفه بسته باشد و ثابت می‌کنیم در این حالت فضای پیکربندی بازی یک مشبکه است. سپس در حالت کلی پیکربندی توسعه یافته را تعریف کرده و نشان می‌دهیم که برای تمام بازی‌های CFG، فضای پیکربندی توسعه یافته یک مشبکه است. در انتهای این فصل نگاهی به CFGهای موازی خواهیم داشت. در فصل چهارم به مطالعه کلاس $L(CFG)$ (کلاس‌های

مشبکه‌های فضای پیکربندی CFGهای همگرا) پرداخته و ثابت می‌کنیم که هر CFG معادل یک CFG ساده است. همچنین مشخصه‌های فضای پیکربندی CFG را ارائه داده و اثبات می‌کنیم که فضای پیکربندی القا شده بوسیله CFGهای همگرا، یک مشبکه است (در نتیجه مشبکه‌های فصل سوم زیر مجموعه‌ای از این مشبکه‌ها هستند). در ادامه رابطه این مشبکه را با مشبکه‌های توزیعی و ULD بررسی می‌کنیم. سپس رابطه میان سه مدل متفاوت از بازی‌های ریزش چیپ را بررسی کرده و نشان می‌دهیم که مدل CFG تعمیمی از مدل ASM، مدل $MCFG$ معادل یک CFG و CFGای که در گراف پشتیبانی‌اش فاقد دور باشد معادل یک ASM است.

در فصل پنجم تعمیمی از CFG را ارائه می‌دهیم که دقیقا کلاس مشبکه‌های ULD را تولید می‌کند. در انتها در فصل ششم بازی ریزش چیپ علامت‌دار را تعریف کرده و با اعمال تغییراتی روی آن، بازی ریزش چیپ علامت‌دار تغییر یافته را ارائه می‌کنیم. نشان می‌دهیم در چه شرایطی این بازی معادل یک CFG است.

فهرست مطالب

[۷] *Partially ordered set* $(Poset)$

[۸] *Lattice*

[۹] *The coloured Chip Firing Game*

لیست تصاویر

فصل ۱

یادآوری

۱.۱ مقدمه

این فصل به یادآوری بعضی مفاهیم پایه‌ای درباره مجموعه‌های جزیی مرتب، مشبکه‌ها و نتایج به کار گرفته شده در این پایان‌نامه اختصاص یافته است. نتایج معروف بدون اثبات بیان شده است. در تهیه مطالب این فصل از منابع [۲، ٦، ۷، ۱۱، ۱۳، ۲۵، ۲۷، ۲۹] استفاده شده است.

۲.۱ مجموعه جزیی مرتب[۱]

تعریف ۱.۱. فرض کنید P یک مجموعه باشد. یک ترتیب (یا ترتیب جزیی) روی P یک رابطه دوتایی $\leqslant$ روی P است به‌طوری‌که، برای هر $x, y, z \in P$ ،

۱) $x \leqslant x$،

۲) اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant x$ آنگاه $x = y$،

۳) اگر $x \leqslant y$ و $y \leqslant z$ آنگاه $x \leqslant z$.

این شرایط به ترتیب، انعکاسی، پادمتقارنی و تعدی نامیده می‌شوند. مجموعه مجهز به یک رابطه ترتیب $\leqslant$ را یک مجموعه جزیی مرتب (یا مجموعه مرتب) می‌گوییم.

---
[۱] $Partially\ ordered\ set\ (Poset)$

تعریف ۲.۱. فرض کنید P یک مجموعه جزیی مرتب و Q زیر مجموعه‌ای از آن باشد. می‌گوییم Q رابطه ترتیب P را به ارث می‌برد هرگاه، $x, y \in Q$ و $x \leq y$ اگر و تنها اگر در P داشته باشیم $x \leq y$. این ترتیب روی Q را ترتیب القا شده[۲] از P و Q را مجموعه جزیی مرتب القا شده از P می‌نامیم.

تعریف ۳.۱. اگر x و y دو عنصر از یک مجموعه جزیی مرتب باشند و $x < y$ و $x \leq z < y$ نتیجه دهد که $z = x$، آنگاه گوییم x توسط y پوشانده شده است و می‌نویسیم $x \prec y$ ($y \succ x$). همچنین اگر $x \prec y$، می‌گوییم x یک پوشش پایینی[۳] از y است (یا y یک پوشش بالایی[٤] از x است).

تعریف ٤.۱. اگر P یک مجموعه جزیی مرتب باشد آنگاه برای هر x و y، فاصله $[x, y]$ برابر مجموعه $\{z \in P, x \leq z \leq y\}$ است.

تعریف ۵.۱. یک مجموعه جزیی مرتب را با P نمایش می‌دهیم و نمودار هاسه[۵] آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱) هر عنصر x از P با یک نقطه p_x در صفحه نمایش داده می‌شود.

۲) اگر $x < y$، آنگاه p_x پایین‌تر از p_y است.

۳) p_y و p_x با یک خط به هم وصل می‌شوند اگر و تنها اگر $x \prec y$.

در شکل ۱.۱ نمودار هاسه یک مجموعه جزیی مرتب نمایش داده شده است.

تعریف ٦.۱. دو مجموعه جزیی مرتب P و P' را یکریخت گویند هرگاه یک نگاشت دوسویی $\varphi : P \longrightarrow P'$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که:

$$\forall x, y \in P, x \leq y \Longleftrightarrow \varphi(x) \leq \varphi(y).$$

تعریف ۷.۱. یک توسیع خطی [٦] از یک مجموعه جزیی مرتب P، لیست $x_1, ..., x_n$ از همه عنصرهای آن است به‌طوری‌که اگر $x_i < x_j$، آنگاه $i < j$.

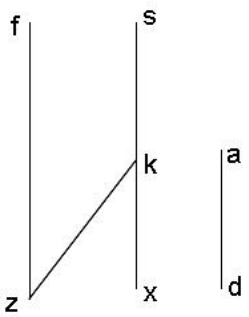
[۲] *Induced order*

[۳] *Lower cover*

[٤] *Upper cover*

[۵] *Hasse*

[٦] *Linear extension*



شکل ۱.۱: نمودار هاسه یک مجموعه جزیی مرتب.

تعریف ۸.۱. یک ایده‌آل از مجموعه جزیی مرتب P زیرمجموعه I از P است اگر $y \leq x$ آنگاه $y \in I$، برای هر $x \in I$ و $y \in P$.

نمادگذاری: $O(P)$ یعنی مجموعه همه ایده‌آل‌های P.

۳.۱ مشبکه[۷]

تعریف ۹.۱. فرض کنید A یک مجموعه جزیی مرتب باشد. یک کران بالا برای یک زیر مجموعه غیر تهی B از A یک عنصر $d \in A$ است به قسمی که به ازای هر $b \in B$، $b \leq d$.

تعریف ۱۰.۱. فرض کنید A یک مجموعه جزیی مرتب باشد و $\varnothing \neq B \subseteq A$. یک کران پایین برای B عبارت است از یک عنصر $d \in A$ به قسمی که به ازای هر $b \in B$، $d \leq b$.

تعریف ۱۱.۱. فرض کنید A یک مجموعه جزیی مرتب باشد و $\varnothing \neq B \subseteq A$. یک بزرگترین کران پائین برای B یک کران پائین d_0 از B است به طوری که به ازای هر کران پائین d از B، $d \leq d_0$.

تعریف ۱۲.۱. فرض کنید A یک مجموعه جزیی مرتب باشد و $\varnothing \neq B \subseteq A$. یک کوچکترین کران بالا برای B یک کران بالای t_0 از B است به طوری که به ازای هر کران بالای t از B، $t_0 \leq t$.

۷ *Lattice*

تعریف ۱۳.۱. فرض کنید A یک مجموعه جزیی مرتب باشد. یک عنصر $a \in A$ را یک عنصر ماکسیمال در A گویند اگر به ازای هر $c \in A$ که مقایسه‌پذیر با a باشد، آنگاه $c \leq a$.

تعریف ۱٤.۱. فرض کنید A یک مجموعه جزیی مرتب باشد. یک عنصر $a \in A$ را یک عنصر مینیمال در A گویند اگر به ازای هر $c \in A$ که مقایسه‌پذیر با a باشد، آنگاه $a \leq c$.

تعریف ۱۵.۱. یک مجموعه جزیی مرتب L، مشبکه است اگر هر دو عنصر x و y از L یک کوچکترین کران بالا و یک بزرگترین کران پایین داشته باشند. کوچکترین کران بالای دو عنصر x و y وست [۸] (یا سوپریمم) نامیده شده و با نماد $x \vee y$ نمایش داده می‌شود و بزرگترین کران پایین دو عنصر x و y رسند [۹] (یا اینفیمم) نامیده شده و با نماد $x \wedge y$ نمایش داده می‌شود.

به وضوح با توجه به تعریف فوق اگر مجموعه داده شده دارای عنصر مینیمال منحصر به فرد باشد و نسبت به وست بسته باشد و یا اگر یک عنصر ماکسیمال منحصر به فرد داشته باشد و نسبت به رسند بسته باشد، یک مشبکه داریم.

همه مشبکه‌هایی که متناهی هستند، دارای عناصر مینیمال و ماکسیمال هستند که برای مشبکه متناهی L به ترتیب با ۰_L و ۱_L نمایش داده می‌شوند.

تعریف ۱٦.۱. فرض کنید L یک مشبکه باشد. زیر مجموعه ناتهی L_1 از L را زیر مشبکه [۱۰] برای L گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in L_1$، عناصر $x \vee y$ و $x \wedge y$ (که در L تعیین می‌شوند) در مجموعه L_1 نیز قرار داشته باشند.

تعریف ۱۷.۱. یک مشبکه، رتبه‌بندی شده [۱۱] است اگر هر مسیر از عنصر ماکسیمال به عنصر مینیمال طول یکسان داشته باشند.

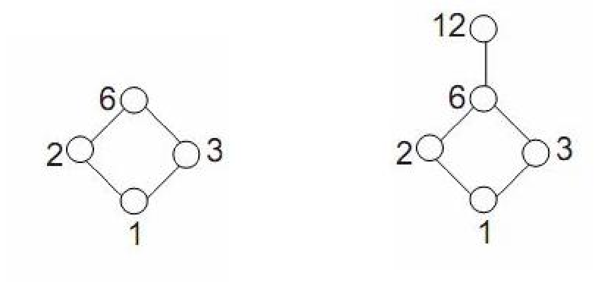
در شکل ۲.۱ (الف) یک مشبکه رتبه بندی شده نمایش داده شده است.

[۸] *Join*

[۹] *Meet*

[۱۰] *Sublattice*

[۱۱] *Ranked*



(ب) (الف)

شکل ۲.۱: (الف) مشبـــکه رتبه‌بندی شده L و (ب) یـک زیر مشبکه از L. توجـه کـــنید که $S = \{۱, ۲, ۳, ۱۲\}$ یک مشبکه است ولی یک زیر مشبکه از L نیست.

تعریف ۱۸.۱. یک مشبکه ابرمکعب[۱۲] از بعد n است، اگر با یک مجموعه از زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عنصری به همراه رابطه ترتیب شمول یکریخت باشد. ابرمکعب‌ها را مشبکه‌های بولی نیز می‌نامند. یک مثال از ابرمکعب در شکل ۳.۱ (ج) نمایش داده شده است.

تعریف ۱۹.۱. یک مشبکه، موضعی توزیعی بالائی[۱۳] است اگر فاصله بین هر عنصر و وست همه پوشاننده‌های بالای آن یک ابرمکعب باشد. این مشبکه را مشبکه ULD می‌نامند [۲۷]. در شکل ۳.۱ (ب) یک مشبکه ULD نمایش داده شده است.

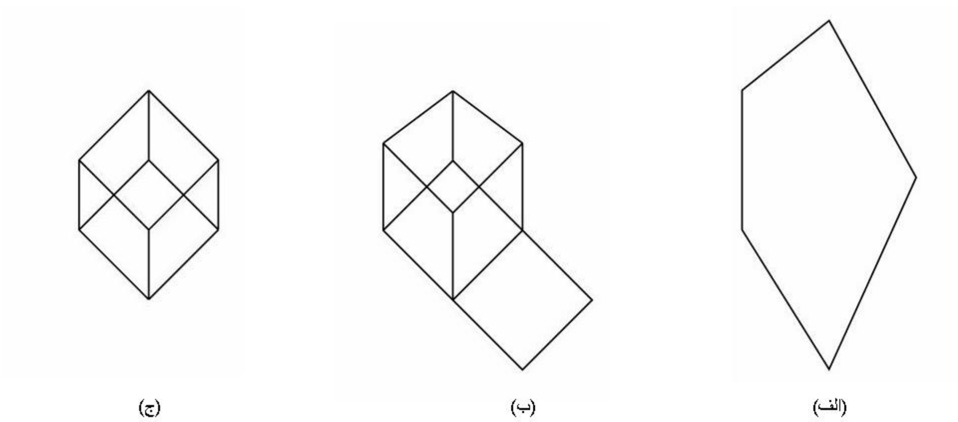
تعریف ۲۰.۱. یک مشبکه موضعی توزیعی پائینی[۱۴] است اگر فاصله بین هر عنصر و رسند همه پوشاننده‌های پایین آن یک ابرمکعب باشد. این مشبکه را مشبکه LLD می‌نامند [۲۷]. در شکل ۳.۱ (ب) یک مشبکه توزیعی نمایش داده شده است.

به وضوح همه مشبکه‌های ULD رتبه‌بندی شده هستند.

[۱۲] *Hypercube*

[۱۳] *Upper locally distributive*

[۱۴] *Lower locally distributive*



شکل ۳.۱: (الف) یک مشبکه که توزیعی نیست ، (ب) مشبکه توزیعی (مشبکه LLD و ULD) و (ج) ابرمکعب از بعد ۳.

تعریف ۲۱.۱. مشبکه L توزیعی[۱۵] است اگر در یکی از دو رابطه توزیعی زیر صدق کند:

$$\forall x, y, z \in L, x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \tag{۱.۱}$$

$$\forall x, y, z \in L, x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \tag{۲.۱}$$

مشبکه‌های توزیعی را معمولا با D نمایش می‌دهند. مثالی از مشبکه‌های توزیعی در شکل ۳.۱ (ب و ج) نمایش داده شده است. در شکل ۳.۱ (الف) یک مشبکه که توزیعی نیست نمایش داده شده است.

دو رابطه (۲.۱) و (۱.۱) معادلند، زیرا به سادگی نشان داده می‌شود که $x = x \vee (x \wedge y)$، باکمک این رابطه و رابطه (۲.۱) می‌توان رابطه (۱.۱) را بدست آورد:

[۱۵] $Distributive$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z)$$
$$= (x \vee (x \wedge y)) \vee ((x \vee y) \wedge z)$$
$$= x \vee ((x \wedge z) \vee (y \wedge z))$$
$$= (x \vee (x \wedge z)) \vee (y \wedge z)$$
$$= x \vee (y \wedge z).$$

به همین ترتیب رابطه (۲.۱) از رابطه (۱.۱) نتیجه می‌شود.

تعریف ۲۲.۱. فرض کنید L یک مشبکه باشد. عنصر $x \in L$، وست تحویل‌ناپذیر[۱۶] است اگر

۱) $x \neq \circ_L$.

۲) اگر برای هر $a, b \in L$، $x = a \vee b$ آنگاه $x = a$ یا $x = b$.

شرط دوم به این مفهوم است که اگر برای هر $a, b \in L$ که $a < x$ و $b < x$، آنگاه $a \vee b < x$.
در شکل ٤.١ (ب) وست‌های تحویل‌ناپذیر یک مشبکه نمایش داده شده است..

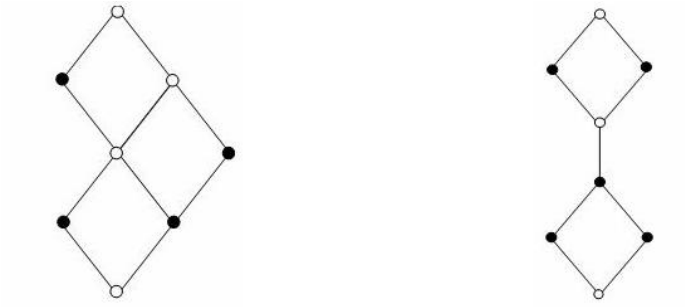
تعریف ۲۳.۱. تعریف رسند تحویل‌ناپذیر [۱۷] دقیقا دوگان تعریف ۲۲.۱ است. در شکل ٤.١ (الف) رسندهای تحویل‌ناپذیر یک مشبکه نمایش داده شده است.

وست تحویل‌ناپذیر و رسند تحویل‌ناپذیر مشبکه، در نمودار هاسه آن با دو قانون زیر به آسانی قابل تشخیص است:

- j یک وست تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر یک پوشش پایینی منحصر به فرد با نماد j^- داشته باشد.
- m یک رسند تحویل‌ناپذیر است اگر و تنها اگر یک پوشش بالایی منحصر به فرد با نماد m^+ داشته باشد.

قرارداد: مجموعه وست‌های تحویل‌ناپذیر مشبکه L را با J_L، یا به طور ساده با J و مجموعه رسندهای تحویل‌ناپذیر را با M_L، یا M نمایش می‌دهیم.

---
[۱۶] $Join-irreducible$
[۱۷] $Meet-irreducible$



(الف) (ب)

شکل ۱.٤: در (الف) رسندهای تحویل‌ناپذیر یک مشبکه و در (ب) وست‌های تحویل‌ناپذیر یک مشبکه با نقاط توپر مشخص شده‌اند.

گزاره ۲٤.۱. [۱۱] فرض کنید L یک مشبکه باشد. هر عنصر x از L، وستِ وست‌های تحویل‌ناپذیر کوچکتر از خودش و رسندِ رسندهای تحویل‌ناپذیر بزرگتر از خودش است:

$$x = \bigvee\{j \in J, j \leq x\} = \bigwedge\{m \in M, x \leq m\}.$$

قرارداد: برای $x \in L$ مجموعه $\{j \in J, j \leq x\}$ $(\{m \in M, x \leq m\})$ را با نماد J_x (M_x) نمایش می‌دهیم.

مجموعه $\{J_x, \forall x \in L\}$ یکریخت با L است [۲، ۷]. در واقع، برای هر عنصر x و y مشبکه، رابطه ترتیب به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$x \leq y \iff J_x \subset J_y \iff M_y \subset M_x,$$

علاوه براین، در مشبکه، وست با فرمول زیر داده شده است [۲، ۷]:

$$M_{x \vee y} = M_x \cap M_y.$$

برای مشبکه‌های ULD، مشخصات زیر را داریم: