بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته ریاضی، گرایش جبر

عنوان:

کیلی گراف‌های گروه‌های مستطیلی

استاد راهنما:

دکتر لیلا شهباز

استاد مشاور:

دکتر فیروز پاشایی

پـژوهشگر:

شیرین برکند

مهر ۱۳۹۲

تقدیم به مهربان فرشتگانی که...

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور آنهاست...

تقدیم به خانواده عزیزم

خدایا...

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

سپاس گزاری...

سپاس خدایی را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او گزاردن نتوانند...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه ای او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین، برحسب وظیفه از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوار... که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای من بودند و از خواهر بزرگوارم که همواره در کنار، و یاور همیشگی‌ام است، کمال تشکر را دارم.

از استاد با کمالات و شایسته سرکار خانم دکتر لیلا شهباز که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند، از استاد فرزانه و دلسوز جناب آقای دکتر فیروز پاشایی که زحمت مشاوره این پایان نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان، این پروژه به نتیجه مطلوب نمی‌رسید، و از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر رحیم رحمتی اصغر که زحمت داوری این پایان نامه را متقبل شدند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

شیرین برکند

مهر ۱۳۹۲

نام خانوادگی: برکند نام: شیرین

عنوان پایان‌نامه: کیلی گراف‌های گروه‌های مستطیلی

استاد راهنما: دکتر لیلا شهباز استاد مشاور: دکتر فیروز پاشایی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: مهر ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۱۱۸

کلیدواژه‌ها: کیلی گراف، گراف راس-متعدی، گروه مستطیلی.

چکیده. در این پایان‌نامه، ابتدا توصیفی از کیلی گراف‌های گروه‌های مستطیلی را ارائه می‌دهیم و در ادامه کیلی گراف‌های راس-متعدی گروه‌های مستطیلی را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم کیلی گراف $Cay(S, C)$ اتومورفیسم-راس-متعدی است، اگر S گروه مستطیلی باشد و زیر نیمگروه تولید شده به وسیله C نیمگروهی اورتودکس باشد. افزون بر این، توصیفی از گراف‌های راس-متعدی که کیلی گراف‌هایی از نیمگروه‌های متناهی هستند ارائه می‌کنیم و همه نتایج به دست آمده برای کیلی گراف‌های روی گروهها را در مورد کیلی گراف‌های روی نیمگروه ها بررسی می‌کنیم.

فهرست مطالب

مقدمه

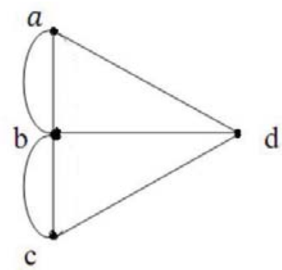
طرح مسئله هفت پل کونیگسبرگ [۱] آغاز مسیر نظریه گراف است که این مسئله در سال **۱۷۳۶** توسط لئونارد اویلر [۲] حل شد.

مسئله هفت پل این بود:

در قرن هیجده، شهر کونیگسبرگ (واقع در شهر پروس، کالینیگ راد [۳] در روسیه) به وسیله رودخانه پرگل [۴] به چهار بخش تقسیم شده بود که توسط هفت پل به هم مربوط بودند. مردم یکشنبه ها سعی می کردند شهر را طوری دور بزنند که از هر پل فقط یکبار گذشته و سپس به نقطه شروع باز گردند.

اویلر ثابت کرد که چنین مسیری وجود ندارد. او ابتدا نقشه شهر را با نقشه ای که خشکی ها، رودها و پل ها را نشان می داد، جایگزین کرد. سپس هر خشکی را با یک نقطه به عنوان یک راس و هر پل را نیز با یک خط به عنوان یال نمایش داد. (شکل زیر)

[۱] Königsberg
[۲] Leonhard Euler (1707-1782)
[۳] Kaliningrad
[۴] Pergel



اویلر نشان داد برای آنکه چنین مسیری وجود داشته باشد که از یک راس شروع شود و از تمامی یال ها یکبار بگذرد و به همان راس بازگردد، باید گراف همبند بوده و هر یک از راس های آن نیز از درجه زوج باشد (قضیه اویلر). چنین مسیری، دور اویلری و چنین گرافی، گراف اویلری نامیده می شود. چون در این مسئله، چهار راس از درجه فرد داریم، پس دور و مسیر اویلری وجود ندارد.

در سال ۱۸۴۸ ، گوستاو کیرشف [۱] نوع خاصی از گراف‌ها به نام درخت را مورد بررسی قرار داد (درخت یک گراف بدون جهت فارغ از حلقه است که همبند بوده ولی شامل دور نباشد). او این مفهوم را هنگام تعمیم قوانین اهم برای جریان الکتریکی در روشی که حاوی شبکه‌های الکتریکی بود، به کار گرفت. ده سال بعد، آرتور کیلی [۲] همین نوع گراف را به کار برد. در همین دوران شاهد حضور دو ایده مهم دیگر در صحنه هستیم. ایده اول حدس چهار رنگ بود که نخستین بار توسط فرانسیس گوتری [۳] در حدود سال ۱۸۵۰ مورد بررسی قرار گرفت. این مسئله سرانجام در سال ۱۹۷۶ توسط کنت اپل [۴] و ولفگان هاکن [۵] با استفاده از یک تحلیل رایانه‌ای پیچیده حل شد. ایده مهم دیگر دور هامیلتون بود که به صورت زیر بیان می شود:

[۱]Gustav Kirchhoff (1824-1887)
[۲]Arthur Cayley (1821-1898)
[۳]Francis Guthrie (1831-1899)
[۴]Kenneth Appel
[۵]Wolfgan Haken

اگر $\Gamma=(V,E)$ یک گراف با خاصیت $|V|\geq ۳$ باشد، گوئیم Γ یک دور هامیلتون دارد اگر یک دور در Γ موجود باشد که شامل همه رئوس Vباشد.

در سال ۱۹۳۶، اولین کتاب که توسط دنیس کونیک [۱] ریاضیدان مجارستانی که محقق برجسته‌ای در این رشته بود، چاپ شد. از آن زمان تا کنون کارهای زیادی در این مبحث انجام شده و در پنجاه سال اخیر ، از کامپیوتر کمک شایان توجهی گرفته شده است. در بین محققان معاصر در این موضوع می‌توان کلود برگه [۲] و وی شواتال پائول اردوش [۳] را نام برد.

کیلی گراف ابتدا روی گروه‌های متناهی توسط کیلی در سال ۱۸۷۸ به صورت گرافی که رئوس آن اعضای گروه و یالهای آن زوج مرتب هایی از اعضای گروهند که توسط عضوی از یک زیرمجموعه خاص از گروه است، وصل می شوند، مطرح شد. ماکس دهن [۴] در سال ۱۰ – ۱۹۰۹ کیلی گراف را به عنوان نمودار گروه معرفی کرد.

در ریاضیات، کیلی گراف همچنین با نام‌های کیلی گراف رنگی، نمودار کیلی، نمودار گروه یا گروه رنگی نیز شناخته شده است. کیلی ساختار گروه را به نظریه رمز ارتباط می‌دهد.

در این پایان نامه، کیلی گراف روی نیمگروه نیز به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

فرض کنیم S یک نیمگروه باشد و $C\subseteq S$. کیلی گراف روی نیمگروه S با مجموعه رابط C، عبارت است از

[۱] Denes König (1884-1944)
[۲] Clsude Berge
[۳] V. Chvatal Paul Erdös
[۴] Max Dehn

یک گراف جهتدار با مجموعه راس S و مجموعه یال

$$.E\Big(Cay(S,C)\Big) = \Big\{(s,cs)|s \in S, c \in C\Big\}$$

لازم به ذکر است که کیلی گراف گروه‌ها به طور وسیعی مطالعه شده و نتایج جالبی از آنها به دست آمده است (برای مثال مرجع [۲] را ببینید) اخیرا ، کیلی گراف‌ها روی نیمگروه‌ها توسط برخی از پژوهشگران مطالعه شده است (مراجع [۶]-[۷]، [۱۰]-[۱۸]، [۲۴]، [۲۵]) و نتایج به دست آمده برای کیلی گراف‌های گروه‌ها در مورد کیلی گراف روی نیمگروه‌ها بررسی شده است. در این پایان نامه، این مطالعه ها تشریح شده است. همچنین، به یک نوع خاصی از گراف ها به نام گراف های راس-متعدی پرداخته شده است. زیرا، کیلی گراف گروه‌ها راس-متعدی هستند، به این معنی که برای هر دو راس u و v یک خودریختی (گراف) مانند f وجود دارد که $f(u) = v$ (مرجع [۳]). همچنین کلارو [۱] و پراگر[۲] در مرجع [۱۵] کیلی گراف‌های راس-متعدی روی نیمگروه‌های S را که همه ایده‌آل‌های چپ اصلی تولید شده توسط مجموعه رابط C متناهی هستند، دسته‌بندی کرده‌اند و فان [۳] و زنگ [۴] در [۷] توصیفی از کیلی گراف‌های راس-متعدی باندهای متناهی را ارائه کرده‌اند. کیلی گراف ها از منظر راس-متعدی بودن در این پایان نامه بررسی شده‌اند. مراجع اصلی عبارتند از:

1- B. Khosravi, M. Mahmoudi, On Cayley graphs of rectangular groups, Discrete Mathematics, **310** (2010), 804-811.

---
[۱] Kelarev
[۲] Praeger
[۳] Fan
[۴] Zeng

2- S. Panma, Characterization of Cayley graphs of rectangular groups, Thai Journal of Mathematics Volume **8** (2010), 535–543.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم مقدماتی و تعاریف اولیه در مورد گراف‌ها و نیمگروه‌ها ارائه شده است. فصل دوم به بیان تعاریف گروه مستطیلی، حاصلضرب رسته‌ای گراف و گراف جهتدار گروه و یک قضیه مهم (اصلی) که کیلی گراف‌های گروه های مستطیلی را دسته‌بندی می‌کند، اختصاص یافته است.

در فصل سوم، کیلی گراف‌های راس-متعدی گروه‌های مستطیلی ارائه می‌شود. به علاوه، نشان می‌دهیم که کیلی گراف‌های اتومورفیسم-راس-متعدی $Cay(S,C)$ روی نیمگروه‌های متناهی S با مجموعه رابط C به طوری که $\langle C\rangle$، اورتودکس هستند، در حقیقت کیلی گراف‌های گروه‌های مستطیلی می‌باشند. همچنین شرط لازم و کافی برای این‌که گراف‌های راس-متعدی، کیلی گراف روی نیمگروه باشند، بیان شده است.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

در این فصل که شامل دو بخش است، تعاریف، قضایای مقدماتی و نمادهای مورد نیاز آمده است. اغلب این مفاهیم و قضایا از مراجع [۵]-[۲] و [۹] اخذ شده اند.

۱.۱ گراف جهتدار و بدون جهت

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم V یک مجموعه ناتهی متناهی باشد و $E \subseteq V \times V$. $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ را یک گراف جهتدار [۱] بر V می‌نامند و V را مجموعه رئوس (گره‌ها) و E را مجموعه یال‌های (یا اضلاع یا قوس‌های) $\overrightarrow{\Gamma}$ می‌گویند.

هرگاه $e = (u, v)$ یالی از گراف $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ باشد، u را ابتدا و v را انتهای e می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱. در گراف $\Gamma = (V, E)$ با یک راس v، تعداد یال های با انتهای v را درجه ورودی [۲] و تعداد یال های با ابتدای v را درجه خروجی [۳] می‌نامیم و به ترتیب با $d_\Gamma^+(v)$ و $d_\Gamma^-(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. گراف $\overrightarrow{H} = (V', E')$ یک زیرگراف [۴]، از گراف $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ نامیده می‌شود اگر $V' \subseteq V$ و $E' \subseteq E$.

[۱] Digraph (Directed graph)
[۲] In-Degree
[۳] Out-Degree
[۴] Subgraph

زیر گراف $\overrightarrow{H}$ از $\overrightarrow{\Gamma}$ را با نماد $\overrightarrow{H} \subseteq \overrightarrow{\Gamma}$ نمایش می‌دهیم. اگر $\overrightarrow{H} \subseteq \overrightarrow{\Gamma}$ و $\overrightarrow{H} \neq \overrightarrow{\Gamma}$ آنگاه $\overrightarrow{H}$ را زیرگراف سره از $\overrightarrow{\Gamma}$ نامیده و با $\overrightarrow{H} \subset \overrightarrow{\Gamma}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. زیرگراف $\overrightarrow{\Gamma}_۱ = (V_۱, E_۱)$ از $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ را القا شده توسط $V_۱$ گوییم اگر $\emptyset \neq V_۱ \subseteq V$ و $E_۱ = \Big\{(u,v) \in E | u, v \in V_۱\Big\}$. آن را با نماد $\overrightarrow{\Gamma}[V_۱]$ نمایش می‌دهیم.

زیرگراف القا شده از $\overrightarrow{\Gamma}$ توسط $E_۱$ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۵.۱.۱. دو گراف جهتدار $\overrightarrow{\Gamma}_۱ = (V_۱, E_۱)$ و $\overrightarrow{\Gamma}_۲ = (V_۲, E_۲)$ را در نظر می‌گیریم. نگاشت $\varphi : V_۱ \to V_۲$ را همریختی [۱] گراف می‌نامیم اگر از $(u,v) \in E_۱$ نتیجه می شود $\Big(\varphi(u), \varphi(v)\Big) \in E_۲$.

همریختی φ را یکریختی [۲] می‌نامیم اگر φ دوسویی و $\varphi^{-۱}$ همریختی باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ یک گراف جهتدار باشد. همریختی $\varphi : V \to V$ را درونریختی [۳] گراف می‌نامیم. اگر درونریختی φ دوسویی باشد، آن را خودریختی [۴] گراف می‌نامیم. مجموعه همه درونریختی‌های (خودریختی‌های) روی گراف $\overrightarrow{\Gamma}$ را با نماد $End(\overrightarrow{\Gamma})$ $(Aut(\overrightarrow{\Gamma}))$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۷.۱.۱. گراف $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ را بدون جهت [۵] می‌نامیم، هرگاه از جهت اضلاع E صرف نظر شود. چنین گرافی را گراف زمینه [۶] گراف جهتدار $\overrightarrow{\Gamma}$ می‌نامیم.

---

[۱] Homomorphism
[۲] Isomorphism
[۳] Endomorphism
[۴] Automorphism
[۵] Undirected
[۶] Underlying undiected graph

تبصره ۸.۱.۱. *به طور مشابه می‌توان مفاهیم بالا برای گراف جهتدار را برای گراف بدون جهت نیز تعریف کرد.*

تعریف ۹.۱.۱. اگر $\Gamma = (V, E)$ یک گراف باشد و رئوس u و v در آن طوری باشند که بیش از یک یال مشترک داشته باشند، گوییم بین این دو راس یال چندگانه [۱] وجود دارد. در این صورت می‌گویند گراف Γ دارای یال چندگانه است. اگر یالی از گراف Γ دو انتهای یکسان داشته باشد، آن را طوقه [۲] می‌نامیم. گراف $\Gamma = (V, E)$ را ساده گوییم هرگاه طوقه و یال چندگانه نداشته باشد.

۲.۱ همبندی در گراف

در این بخش رابطه همبندی گراف‌ها تعریف شده و نشان داده می‌شود که رابطه همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رئوس گراف است.

تعریف ۱.۲.۱. یک گشت [۳] به طول n از گراف Γ دنباله‌ای ناتهی متناهی مانند

$$v_۰, e_۱, v_۱, e_۲, v_۲, \ldots, e_n, v_n$$

از راس‌ها و یال‌هاست که برای هر i، e_i یال $(v_{i-۱}, v_i)$ است.

تکرار راس‌ها و یال‌ها در یک گشت مجاز است.

تعریف ۲.۲.۱. اگر در یک گشت یال تکراری موجود نباشد، آن را پیگرد [۴] می‌نامیم.

[۱] Multiple edges
[۲] Loop
[۳] Walk
[۴] Trail

تعریف ۳.۲.۱. اگر گشتی راس و یال تکراری نداشته باشد، آن را مسیر [۱] می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. اگر بین هر دو راس گراف Γ مسیری موجود باشد، گوییم Γ همبند است.

لم ۵.۲.۱. *رابطه همبندی یک رابطه هم‌ارزی روی مجموعه رئوس گراف $\Gamma = (V, E)$ است. در نتیجه، مجموعه رئوس Γ را به کلاس‌های هم‌ارزی $V_1, \dots, V_m$ افراز می‌کند.*

برهان. فرض کنیم R رابطه همبندی گراف باشد که به صورت زیر تعریف شده است:

$$\forall u, v \in V, \quad uRv \Longleftrightarrow \text{بین } u \text{ و } v \text{ مسیری موجود باشد}.$$

نشان می‌دهیم یک رابطه هم ارزی است.

۱) uRu. چون گراف همبند است، پس مسیری از u به u موجود است.

۲) به ازای هر $u, v \in V$، اگر uRv، آنگاه مسیری بین u و v موجود است. پس مسیری بین v و u هم وجود دارد. بنابراین vRu.

۳) به ازای هر $u, v, w \in V$، اگر uRv و vRw، آنگاه مسیری بین u و v، v و w وجود دارد.

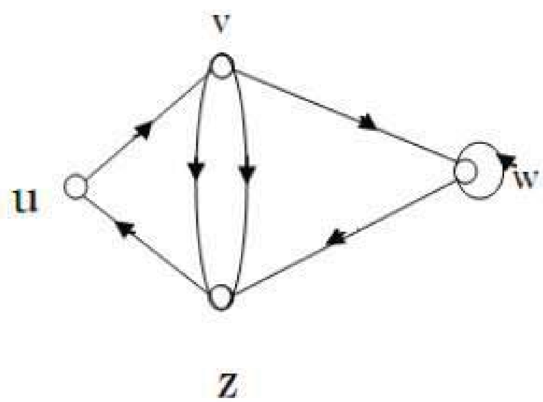
فرض کنیم $u, e_1, u_1, e_2, \dots, e_n, v$ و $v, e'_1, v_1, e'_2, \dots, e'_m, w$ مسیرهای بین این دو راس باشند. در نتیجه $u, e_1, u_1, e_2, \dots, e_n, v, e'_1, v_1, e'_2, \dots, e'_m, w$ دنباله‌ای ناتهی است که از راس u شروع و به راس w ختم می شود. پس بین u و w مسیری موجود است و لذا uRw. □

[۱] Path

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم $\Gamma = (V, E)$ یک گراف باشد و رابطه همبندی روی V آن را به کلاس‌های هم‌ارزی $V_1, \dots, V_m$ افراز کند. هر کدام از زیرگراف‌های $\Gamma[V_1]$ و ... و $\Gamma[V_m]$ را یک مولفه همبند از Γ [1] می‌نامیم.

تبصره ۷.۲.۱. *اگر گراف Γ دقیقا یک مولفه داشته باشد، گراف همبند است. در غیر این صورت، Γ گرافی ناهمبند خواهد بود.*

مثال ۸.۲.۱. *شکل زیر یک گراف جهتدار است که:*



۱) *دارای مجموعه رئوس $V = \{u, v, z, w\}$ و مجموعه یال‌های*

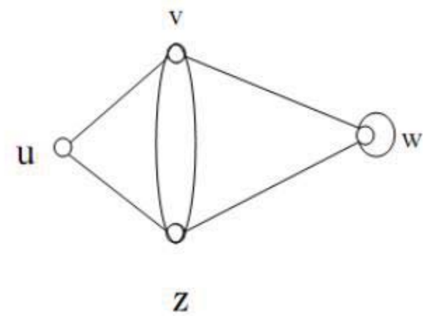
$$E = \Big\{(u, v), (z, u), (v, z), (v, z), (v, w), (w, z), (w, w)\Big\}$$

است که در راس w طوقه و بین دو راس v و z یال چندگانه وجود دارد. پس این گراف، گراف ساده نیست.

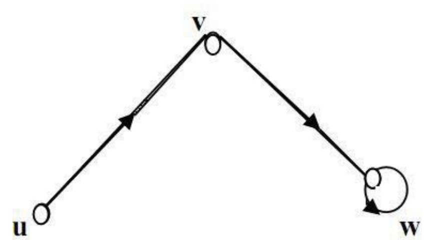
۲) *این گراف همبند است، چون یک مولفه (همبندی) دارد.*

۳) *گراف زمینه (بدون جهت) آن به صورت زیر است:*

[1] Connected component



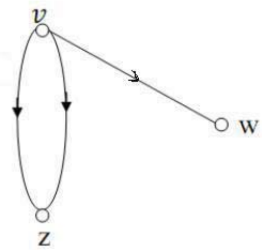
مثال ۹.۲.۱. فرض کنیم $\overrightarrow{\Gamma} = (V, E)$ گراف مثال ۸.۲.۱ باشد و $\emptyset \neq V_1 = \{u, v, w\} \subseteq V$. $\overrightarrow{\Gamma}[V_1]$ زیر گراف القا شده از V_1 به صورت



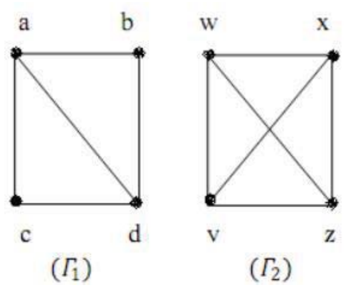
با مجموعه یال

$$E_1 = \Big\{(u, v), (v, w), (w, w)\Big\}$$

است و اگر $E' = \Big\{(v, z), (v, w)\Big\} \subseteq E$ ، $\emptyset \neq E'$ ، زیر گراف القا شده از E' (یعنی $\overrightarrow{\Gamma}(E')$) به شکل زیر است:

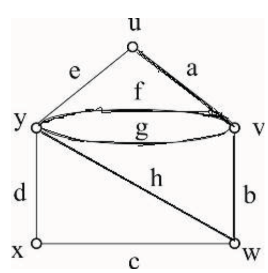


مثال ۱.۲.۱۰. *دو گراف شکل زیر را در نظر می‌گیریم:*



تابع $f:\Gamma_1\to\Gamma_2$ ***با تعریف*** $f(a)=w$، $f(b)=x$، $f(c)=v$ و $f(d)=z$ ***یک همریختی*** *گراف است.*

مثال ۱.۲.۱۱. *شکل زیر یک گراف بدون جهت است که برای نمونه یک گشت، یک پیگرد و یک مسیر در آن مشخص شده است:*



گشت: $uavfyfvgyhwbv$.

پیگرد : $wcxdyhwbvgy$.

مسیر: $xcwhyeuav$.

تعریف ۱.۲.۱۲. گراف جهتدار $\vec{\Gamma}$ را همبند می‌نامیم، اگر گراف زمینه‌اش همبند باشد.

تعریف ۱.۲.۱۳. گراف جهتدار $\vec{\Gamma}$ را به طور قوی همبند [۱] می‌نامیم اگر بین هر دو راس آن مسیری جهتدار وجود داشته باشد.

۱.۳ رنگ آمیزی گراف

دو نوع رنگ آمیزی برای گراف می‌توان در نظر گرفت:

۱) رنگ آمیزی رئوس،

۲) رنگ آمیزی یالی.

تعریف ۱.۳.۱. اگر $\Gamma = (V, E)$ یک گراف (جهتدار) باشد، یک رنگ آمیزی (راس) Γ وقتی رخ می‌دهد که رئوس Γ را طوری رنگ بزنیم که اگر (a, b) یال در Γ باشد، راس های a و b رنگ‌های متفاوتی داشته باشند. کمترین تعداد رنگ‌های لازم برای رنگ آمیزی Γ را عدد رنگی Γ می‌نامیم و با نماد $\chi(\Gamma)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱.۳.۲. *گراف زیر را در نظر می‌گیریم.*

[۱] Strongly connected